

关于复合粒子量子场论的重整化理论和红外发散消去问题*

何祚庥 张肇西

(中国科学院高能物理研究所)

量子电动力学以及量子场论的重整化理论的建立已经近三十年了。但包含复合粒子的跃迁、产生、湮灭等过程的辐射修正的计算问题却没有很好解决。近来,由于复合粒子场论的研究有一些进展^[1],这就又提出了对复合粒子体系如何重整化以及如何消去红外发散的问题。

过去,在计算包含复合粒子体系的辐射修正时,其跃迁矩阵元及其修正项大多是以物理直观的方式引进的,即根据一些物理的考虑挑选了一些费曼图再“装上”波函数。这就发生一些值得探讨的问题。例如,以前人们在计算由 e^+e^- 组成的氢原子体系的双光子和三光子湮灭时,通常取以下的自由正反电子湮灭图^[2-4]

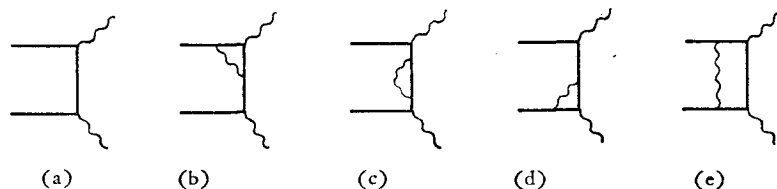


图 1

($J^P = 1^-$ 的氢原子的三光子湮灭的费曼图还要多一些,详见文献[3],本文略。)求出正负电子在相对速度 $v \rightarrow 0$ 的截面 σ 后,乘上相对速度 v 和相应的束缚态波函数零点值的平方 ρ , 即有湮灭几率

$$\Gamma = \sigma v \rho. \quad (1)$$

但这样就产生了以下一些问题: 1) 图1(e)算式将多出一个库仑发散项 $\frac{\pi\alpha}{v}$, 在所谓只保留横光子部分的贡献,纵光子部分的贡献已经在束缚态波函数内的理由下,简单地把这一项去掉¹⁾。2) 还将多出一项剩余的红外发散项 $\frac{\alpha}{\pi} v^2 \ln \frac{m}{\lambda}$, 以是高阶项的理由去掉。3) 理论值和实验值有明显的偏差。(三光子湮灭超过两倍标准偏差,双光子湮灭由于实验不够精确,不足以检验理论计算。)如果对上述计算再较深入研究一下,可以发现图 1 (e) 完全是多算了。这是文献[1]讨论复合粒子场论的微扰展开式时完全解决了的问题。当然,如果在计算中确实去掉了图 1 (e),会使消去红外发散的问题更加突出。在进行辐射修正计算时,仅考虑图 1 (b), (c), (d) 和对它们进行重整,明显不会消去其中所有的红外发散项。

* 1976年10月17日收到。

1) 虽然这里只讲两光子湮灭的图 1 (e), 对于三光子湮灭情况也有这一问题, 即多计算了文献[2]中定义的可分析图。

分析起来,在过去氩原子湮灭的计算中,会出现上述问题的原因,在于迄今还没有一个包含复合粒子在内的处理红外发散的理論. 红外发散消去问题和紫外发散重整问题是相联系的,因而首先需要讨论包含复合粒子的紫外重整的问题.

如果对复合粒子场论微扰展开式研究一下,可以发现,复合粒子的 S 矩阵元微扰展开式和通常自由粒子 S 矩阵元微扰展开式不同之处只在于多了一个束缚态波函数^[1]. 因而复合粒子场论的重整问题就归结为研究复合粒子波函数的重整问题. 复合粒子波函数是和相应的复合粒子的格林函数相联系的,复合粒子波函数即是相应的格林函数在束缚态质壳上的极点的留数. 以自旋 $1/2$ 的正反粒子构成的复合粒子为例,由 B-S 方程的普遍理論,可知在动量空间的双粒子格林函数 $K(P, p, q)$ 和动量空间的 B-S 波函数 $\chi_{P\zeta}(p)$ 有如下的形式:

$$K(P, p, q) = i \sum_{\zeta} \frac{\chi_{P\zeta}(p) \bar{\chi}_{P\zeta}(q)}{P_0 - E_{\zeta} + i\epsilon} + (P_0 \rightarrow E_{\zeta} \text{ 时正则项}), \quad (2)$$

并满足如下的方程:

$$\begin{aligned} & [\bar{O}(P, p, p') - \bar{I}(P, p, p')] \cdot K(P, p', q) \\ &= \int d^4 p' [-\delta(p - p') S_F'^{-1} \left(\frac{P}{2} + p \right) K(P, p', q) S_F'^{-1} \left(\frac{P}{2} - p \right) \\ &\quad - \bar{I}(P, p, p') K(P, p', q)] \\ &= \delta^{(4)}(p - q), \end{aligned} \quad (3)$$

$$[\bar{O}(P, p, p') - \bar{I}(P, p, p')] \cdot \chi_{P\zeta}(p') = 0, \quad (4)$$

其中 E_{ζ} 是在复合粒子在 ζ 能级的能量, $\bar{O}, \bar{I}$ 是相应的微分算子和积分算子. 由量子电动力学的普遍的重整化理論,可知电子内线,光子内线,顶角,自由粒子波函数,电荷,双粒子格林函数有如下的重整化公式:

$$S_F'(p) = Z_2 S_F^c(p), \quad D_F'(p) = Z_3 D_F^c(p), \quad \Gamma_{\mu}'(p_1 p_2) = Z_1^{-1} \Gamma_{\mu}^c(p_1 p_2), \quad (5a)$$

$$\bar{u}(p) = Z_2^{1/2} \bar{u}^c(p), \quad u(p) = Z_2^{1/2} u^c(p), \quad a_{\mu}(k) = Z_3^{1/2} a_{\mu}^c(k), \quad (5b)$$

$$e_0 = Z_3^{-1/2} e_c, \quad (5c)$$

$$K(P, p, q) = Z_2^2 K^c(P, p, q). \quad (5d)$$

仔细研究积分核 $I(P, p, q)$ 的重整化,在分析它所包含的费曼图形后,不难发现它与 $K(P, p, q)$ 的重整化基本上一致,只是比 $K(P, p, q)$ 少了“四条腿”,因此有

$$I(P, p, q) = Z_2^{-2} I^c(P, p, q) \quad (5e)$$

(在写(5c-e)式时,已利用了华德恒等式,即 $Z_1 = Z_2$). 从(2)和(5d)式可以看出,对 B-S 波函数需要进行下列重整,即有

$$\chi_{P\zeta}(p) = Z_2 \chi_{P\zeta}^c(p), \quad \bar{\chi}_{P\zeta}(p) = Z_2 \bar{\chi}_{P\zeta}^c(p). \quad (6)$$

将(5a), (5e) 和(6)式代入(3)和(4)式,易得到

$$[\bar{O}^c(P, p, p') - \bar{I}^c(P, p, p')] \cdot K^c(P, p', q) = \delta^{(4)}(p - q), \quad (7)$$

$$[\bar{O}^c(P, p, p') - \bar{I}^c(P, p, p')] \cdot \chi_{P\zeta}^c(p') = 0. \quad (8)$$

这意味着当我们进行波函数重整时,双粒子格林函数的极点的位置是不变的.

由束缚态的普遍微扰展开式,易知对一个不可分拆骨架图,其中包含有 n 个顶角, F .

条电子内线, F_γ 条光子内线, N_e 条电子外线, N_γ 条光子外线, 并有 M_B 个束缚态时, 有如下关系:

$$n = F_e + M_B + \frac{N_e}{2} = 2F_\gamma + N_\gamma, \quad (9)$$

相应的矩阵元就有

$$M \sim e^n \int (\Gamma'_\mu)^n (S'_F)^{F_e} (D'_F)^{F_\gamma} (u')^{N_e} (a'_v)^{N_\gamma} (\chi)^{M_B}, \quad (10)$$

由(5),(9)和(10)式易证

$$M \sim (e_c)^n \int (\Gamma_\mu^c)^n (S_F^c)^{F_e} (D_F^c)^{F_\gamma} (u^c)^{N_e} (a_v^c)^{N_\gamma} (\chi^c)^{M_B}. \quad (11)$$

这表明在跃迁矩阵元中所有紫外发散都进行了重整, 只有物理电荷出现. 如果在复合粒子微扰展开式中涉及了反常内线时可仍有(11)式^[1], 只是此时第一种反常内线的 F_e 应取为 -1 , 第二种反常内线的 F_e 应取为 0 .

下面讨论红外发散问题. 红外发散与光子无质量的事实相联系, 也与电子线是否在质壳上有关. 对于任意一个费曼图, 当其外电子线都不在质壳上时, 则没有红外发散. 这一情况的出现是和下列事实相联系的: 因为任何一费曼图, 与动量为 p 的电子外线直接联接的电子内线一定有

$$\frac{m - i(p - k)}{m^2 + (p - k)^2} \quad (12)$$

的形式. 当电子外线不在质壳上, $p^2 + m^2 \neq 0$. 当 $k \rightarrow 0$ 时, (12)式不奇异. 相反, 当电子外线在质壳上, $p^2 + m^2 = 0$. 当 $k \rightarrow 0$ 时, (12)式是奇异的. 正是这样的奇异性

和光子内线 $\frac{1}{k^2}$ 导致红外发散. 所以费曼图的电子外线都不在质壳上时是无红外发散的.

对于仅有复合粒子和自由光子的跃迁体系, 由于其电子线都不在质壳上, 因此这样的体系, 其红外发散的唯来源是对顶角和自能函数在质壳上进行重整产生的. 既然在微扰展开式中, 顶角函数的数目总是大于自能的数目, 因而尽管存在华德恒等式, 并不足以使顶角和自能的红外发散完全相消! 这就是用通常的方法在计算辐射修正时红外发散不能完全消除的根本原因. 以前, 对于自由正、反电子湮灭的计算, 做法是利用图 1(e) 消去图 1(b), (c) 和 (d) 三个图消剩下的顶角型的红外发散项, 同时图 1(e) 还多出新的红外发散项(前文提到的 $\frac{\alpha}{\pi} v \ln \frac{m}{\lambda}$ 项). 再靠自由正、反电子可以发射软光子, 让软光子的红外发散把图 1(e) 多出的红外发散消去. 但是对于束缚态氢原子的湮灭的红外发散显然不能用自由正、反电子湮灭的类似方法去消除, 由于它不能计算图 1(e), 还由于 C 宇称守恒也不允许软光子发射, 只能另找途径.

事实上, 束缚态时的红外发散消除可以说比自由粒子情况还简单些. 仔细分析后即可知, 经过重整, 把 S 矩阵元中复合粒子波函数改为重整化后的波函数 χ^c , 不仅做到紫外发散的重整, 而且还由于重整后的 B-S 波函数 χ^c 将包含新的红外发散项, 从而使整个 S 矩阵元中红外发散项完全相消: 显然当 S 矩阵元中没有电子外线, 即 $N_e = 0$, 就恒有

$$n = F_e + M_B. \quad (13)$$

并有

$$Z_1^n Z_2^{-(F_c + M_B)} = 1. \quad (14)$$

考虑到 $K(P, p, q)$, $I(P, p, q)$, $\chi_{P_c}(p) \cdots$ 原无红外发散, 所以 Z_1^2 与 $K(P, p, q)$, $I(P, p, q)$ 的红外发散, Z_2 与 $\chi_{P_c}(p)$ 的红外发散……是互相抵消的. 因此, (14) 式也意味着在相应重整后的任何阶的跃迁矩阵元中, 红外发散项完全相消.

如果某跃迁过程, 不仅有束缚态还有自由电子时, 只要束缚态部分按本文给出的规则重整, 自由电子部分用通常规则重整和消除红外发散, 不难证明, 即可做到整个 S 矩阵元重整, 又能把红外发散完全消除.

最后指出, 从以上的讨论, 我们可以看到, 在进行氢原子湮灭一类有束缚态的过程的辐射重整计算时, B-S 波函数取通常的梯形近似的波函数是不行的, 必须由(8)式出发, 取与所计算的辐射修正的阶数相对应的 $\bar{O}^c$ 和 $\bar{I}^c$, 解出推广的广义梯形近似波函数 χ^c , 则 χ^c 中自动含有所需要的红外发散项, 使整个跃迁矩阵元不含红外发散.

参 考 文 献

- [1] 何祚庥、张肇西、黄涛, 物理学报, **25** (1976), 215.
- [2] J. Harris & L. M. Brown, *Phys. Rev.*, **105** (1957), 1656.
- [3] M. A. Strosio & J. M. Holt, *Phys. Rev.*, **A10** (1974), 749.
- [4] M. A. Strosio, *Physics Reports*, **22C**(5), (1975).

ON THE RENORMALIZATION THEORY OF THE ULTRAVIOLET AND INFRARED DIVERGENCES IN THE QUANTIZED THEORY OF COMPOSITE PARTICLES

HE ZUO-XIU ZHANG ZHAO-XI

(Institute of High Energy Physics, Academia Sinica)