

群表示论的物理方法(V)*

$SU_3 \supset SO_3$ 和 $SU_4 \supset SU_2 \times SU_2$ 分类基

陈金全 高美娟 王 凡
(南京大学物理系)

提 要

本文给出了核物理中常用的 $SU_3 \supset SO_3$ ($f = 1-6$) 和 $SU_4 \supset SU_2 \times SU_2$ 波函数在 Gelfand 表象中的展开系数。

一

以往核结构研究中应用群论时, 大多采用 Racah 在原子光谱理论中发展的方法, 因此计算矩阵元时总要用到母分系数 (*f. p. c.*). Gelfand^[1] 早已给出了 U_n 群的标准基, 并给出了 U_n 群无穷小算符的矩阵元的普遍公式^[1,2]. Moshinsky^[3] 指出了核结构计算中常用的单体和两体算符可用酉群的无穷小算符表示出来. 因此如果采用 Gelfand 基, 则计算这些算符的矩阵元就可直接利用 Gelfand 矩阵元公式而免去麻烦的母分系数. 但是 Gelfand 基往往不是物理上所直接需要的波函数, 物理上要的是角动量、自旋、同位旋等具有确定值的波函数. 因此要利用 Gelfand 基的长处, 就必须将物理分类基用 Gelfand 基表示出来. 文献[4]中介绍了在 Gelfand 表象中计算 $SU_m \supset SU_n \times SU_k$ 分类基的两种简便办法, 一种是利用 Gelfand 矩阵元, 另一种是利用置换群矩阵元. 现在分别用它们来计算核物理中用到的 $SU_3 \supset SO_3$ 和 $SU_4 \supset SU_2 \times SU_2$ 分类基. 不难看出, 其它物理分类基也可用类似的方法处理.

二

将 $SU_3 \supset SO_3$ 分类基 $|[\nu_\tau], JM\rangle$ 用 SU_3 的 Gelfand 基 $\left| \left(\begin{smallmatrix} [\nu] \\ m \end{smallmatrix} \right) \right\rangle$ 展开:

$$|[\nu_\tau], JM\rangle = \sum_{(m)} \left| \left(\begin{smallmatrix} [\nu] \\ m \end{smallmatrix} \right) \right\rangle \left\langle \left(\begin{smallmatrix} [\nu] \\ m \end{smallmatrix} \right) \right| [\nu_\tau], JM \rangle. \quad (1)$$

当 SO_3 不可约表示 (IR) J 在 SU_3 IR $[\nu]$ 中只出现一次时, 指标 τ 是多余的. 计算系数 $\left\langle \left(\begin{smallmatrix} [\nu] \\ m \end{smallmatrix} \right) \right| [\nu_\tau], JM \rangle$ 的方法见文献[4]第二节, 这里再作几点补充:

态的编号 $s = \begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1, & 0, & -1 \end{smallmatrix}$, $1, 0, -1$ 代表角动量第三分量 J_z .

* 1975 年 5 月 23 日收到.

递降算符

$$J_- = \sqrt{2}(E_{21} + E_{32}). \quad (2)$$

从角动量具有确定值的 SU_3 最高权态

$$|[m_{i3}], JJ\rangle = \left| \begin{pmatrix} m_{13} & m_{23} & 0 \\ m_{13} & m_{23} \\ m_{13} \end{pmatrix} \right\rangle, [\nu] = [m_{i3}] = [m_{13}, m_{23}] \quad (3)$$

出发,将递降算符 J_- 作用于(3)式, J_- 对(3)式左边的作用是熟知的,

$$J_- |[\nu_r], JM\rangle = \sqrt{J(J+1) - M(M-1)} |[\nu_r], JM-1\rangle. \quad (4)$$

J_- 对(3)式右边的作用则要利用 E_{21} 和 E_{32} 的 Gelfand 矩阵元^[2], 这样就可逐步求出 $|[\nu], JM\rangle$ 的展开系数.

利用 M 相同但 J 不同的态互相正交, 又可求出 $SU_3 \text{IR}[\nu]$ 内次大 J 的最高权态 $|[m_{i3}], J'J'\rangle$, 再利用算符 J_- , 又可求出其它态 $|[m_{i3}], J'M'\rangle$, 等等依次类推.

当 $SU_3 \text{IR}[\nu]$ 中包含 SO_3 的某一 $\text{IR}(J')$ 不止一次时, 利用上述正交性不能把态 $|[\nu], J'J'\rangle$ 完全确定. 例如 $SU_3[42]$ 表示包含 D 态两次, 这时需寻找附加量子数 τ 才能把它完全定下来. Racah 曾经指出^[9], 在 $SU_3 \supset SO_3$ 约化中, 不可能找到这样一个附加量子数, 它既有简单的选择规则, 又保证属于不同量子数的态互相正交. 因此本文在计算 $[42]$ 表示的这两个 D 态时, 是在保证正交性的前提下, 选取一合适的线性组合, 使得 $|[42]2M\rangle$ 和 $|[42]2-M\rangle$ 的展开系数有简单的对称关系(见表 1).

对 $f=1-6$, 系数 $\left\langle \begin{pmatrix} [\nu] \\ (m) \end{pmatrix} \right| [\nu_r] LM \rangle$ 的计算结果列于表 1. 表中 SU_3 的 Gelfand 符号中一律省略了第一行符号 $[\nu] = [m_{13}, m_{23}, 0]$.

同样, $SU_4 \supset SU_2 \times SU_2$ 分类基 $|[\nu_r], \begin{smallmatrix} T & S \\ M_T & M_S \end{smallmatrix} \rangle$ 可用 SU_4 的 Gelfand 基展开:

$$|[\nu_r], \begin{smallmatrix} T & S \\ M_T & M_S \end{smallmatrix} \rangle = \sum_{(m)} \left| \begin{pmatrix} [\nu] \\ (m) \end{pmatrix} \right\rangle \left\langle \begin{pmatrix} [\nu] \\ (m) \end{pmatrix} \right| [\nu_r], \begin{smallmatrix} T & S \\ M_T & M_S \end{smallmatrix} \rangle.$$

态的编号取: $i = \begin{smallmatrix} 1' & 2' \\ p & n \end{smallmatrix}$, $\alpha = \begin{smallmatrix} 1'' & 2'' \\ \alpha & \beta \end{smallmatrix}$, $s = \begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ p\alpha & p\beta & n\alpha & n\beta \end{smallmatrix}$

递降算符: $T_- = E_{31} + E_{42}$, $S_- = E_{21} + E_{43}$.

表象变换系数 $\left\langle \begin{pmatrix} [\nu] \\ (m) \end{pmatrix} \right| [\nu_r], \begin{smallmatrix} T & S \\ M_T & M_S \end{smallmatrix} \rangle$ 可利用文献[4]中第二节给出的方法(2)计算.

对 $f=1-4$ 计算结果列于表 2. 有关表的说明见文献[4]表 1 的附注.

三

文献[6]用转动群投影算符方法求得了 $f=1-3$ 情形 $SU_3 \supset SO_3$ 和 $SU_4 \supset SU_2 \times SU_2$ 波函数. 这种方法很麻烦, 例如 $SU_3 \rightarrow SO_3$ 约化要涉及 $2(f-1)$ 个 CG 系数之积的求和, $SU_4 \rightarrow SU_2 \times SU_2$ 约化要涉及 $4(f-1)$ 个 CG 系数之积的求和, 粒子数 f 愈大, 计算愈困难. 本文所用的方法要简单得多, 它不要任何 CG 系数, 而且计算过程不会因粒子数 f 增大而变得麻烦. 此外文献[6]表 2 给出的 $SU_4 \supset SU_2 \times SU_2$ 波函数中, 有几个位相

[31]

$\begin{array}{c} M \\ L \end{array}$	3	2	1	0	-1	-2	-3
	$\begin{pmatrix} 31 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 31 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 31 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 30 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 30 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$
F	1	$\frac{2}{3} \frac{1}{3} \frac{1}{3}$	$\frac{4}{15} \frac{5}{9} \frac{8}{45}$	$\frac{8}{15} \frac{4}{15} \frac{1}{5}$	$\frac{4}{15} \frac{3}{5} \frac{2}{15}$	$\frac{2}{3} \frac{1}{3} \frac{1}{3}$	1
D		$\frac{1}{3} \frac{*2}{3} \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} \frac{*4}{9} \frac{2}{9}$	$\frac{*1}{3} \frac{2}{3} \frac{0}{3}$	$\frac{*1}{3} \frac{0}{5} \frac{2}{5}$	$\frac{*1}{3} \frac{2}{3} \frac{1}{3}$	
P			$\frac{2}{5} \frac{0}{5} \frac{*3}{5}$	$\frac{2}{15} \frac{1}{15} \frac{*4}{5}$	$\frac{2}{5} \frac{*2}{5} \frac{1}{5}$		

[5]

$\begin{array}{c} M \\ L \end{array}$	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5
	$\begin{pmatrix} 50 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 50 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 50 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 50 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 50 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 50 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 40 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 30 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 00 \\ 0 \end{pmatrix}$
H	1	$\frac{8}{9} \frac{1}{9} \frac{1}{9}$	$\frac{2}{3} \frac{1}{3} \frac{1}{3}$	$\frac{8}{21} \frac{4}{7} \frac{1}{21}$	$\frac{8}{40} \frac{4}{20} \frac{5}{20}$	$\frac{8}{63} \frac{4}{63} \frac{1}{21}$	$\frac{8}{21} \frac{4}{7} \frac{1}{21}$	$\frac{2}{3} \frac{1}{3} \frac{1}{3}$	$\frac{8}{9} \frac{1}{9} \frac{1}{9}$	1	1
F		$\frac{1}{9} \frac{*8}{9} \frac{1}{9}$	$\frac{1}{3} \frac{*2}{3} \frac{1}{3}$	$\frac{8}{15} \frac{4}{15} \frac{1}{15}$	$\frac{8}{15} \frac{4}{15} \frac{1}{15}$	$\frac{4}{9} \frac{1}{9} \frac{*8}{15}$	$\frac{8}{15} \frac{4}{15} \frac{1}{15}$	$\frac{1}{3} \frac{*2}{3} \frac{1}{3}$	$\frac{1}{9} \frac{*8}{9} \frac{1}{9}$		
P				$\frac{3}{35} \frac{*8}{35} \frac{24}{35}$	$\frac{3}{35} \frac{*12}{35} \frac{8}{35}$	$\frac{3}{7} \frac{*35}{35} \frac{35}{35}$	$\frac{3}{35} \frac{*8}{35} \frac{24}{35}$				

[41]

$\begin{array}{c} M \\ L \end{array}$	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4
	$\begin{pmatrix} 41 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 41 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 41 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 31 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 41 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 31 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 40 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 31 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 40 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 30 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$
G	1	$\frac{3}{4} \frac{1}{4} \frac{1}{4}$	$\frac{7}{16} \frac{15}{112} \frac{3}{16}$	$\frac{1}{7} \frac{27}{56} \frac{15}{56}$	$\frac{5}{14} \frac{3}{14} \frac{5}{14}$	$\frac{1}{7} \frac{4}{7} \frac{5}{28}$	$\frac{3}{7} \frac{27}{56} \frac{5}{56}$	$\frac{3}{4} \frac{1}{4} \frac{1}{4}$	1
F		$\frac{1}{3} \frac{*3}{4} \frac{1}{4}$	$\frac{1}{16} \frac{*9}{16} \frac{5}{48}$	$\frac{1}{5} \frac{*49}{120} \frac{3}{8}$	$\frac{1}{10} \frac{*3}{30} \frac{1}{6}$	$\frac{*1}{5} \frac{4}{45} \frac{25}{36}$	$\frac{*1}{3} \frac{1}{24} \frac{5}{8}$	$\frac{*1}{4} \frac{3}{4} \frac{3}{4}$	
D		$\frac{5}{21} \frac{0}{21} \frac{*16}{21}$	$\frac{5}{14} \frac{5}{84} \frac{28}{21}$	$\frac{5}{14} \frac{*3}{28} \frac{10}{21}$	$\frac{15}{56} \frac{9}{56} \frac{21}{21}$	$\frac{5}{14} \frac{*5}{126} \frac{63}{63}$	$\frac{5}{21} \frac{*10}{21} \frac{2}{7}$		
P			$\frac{3}{10} \frac{*1}{20} \frac{2}{5}$	$\frac{3}{40} \frac{*3}{40} \frac{15}{15}$	$\frac{3}{8} \frac{1}{8} \frac{2}{3}$	$\frac{3}{10} \frac{*3}{10} \frac{0}{10}$	$\frac{2}{5} \frac{*2}{5} \frac{5}{5}$		

[32]

$L \backslash M$	3	2	1	0	-1	-2	-3
	$\begin{pmatrix} 32 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 32 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 31 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 31 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 22 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 31 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 30 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 30 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix}$
F	1	$\frac{1}{3} \frac{2}{3}$	$\frac{3}{5} \frac{4}{15} \frac{2}{15}$	$\frac{1}{5} \frac{8}{15} \frac{4}{15}$	$\frac{5}{9} \frac{8}{45} \frac{4}{15}$	$\frac{1}{3} \frac{2}{3}$	1
D		$\frac{2}{3} \frac{*1}{3}$	$0 \frac{*1}{3} \frac{2}{3}$	$0 \frac{*1}{3} \frac{2}{3}$	$*4 \frac{2}{9} \frac{1}{3}$	$*2 \frac{1}{3}$	
P		$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{5} \frac{*2}{5} \frac{*1}{5}$	$\frac{4}{5} \frac{*2}{15} \frac{*1}{15}$	$0 \frac{3}{5} \frac{*2}{5}$	$\frac{3}{5}$	

[33]

$L \backslash M$	3	2	1	0	-1	-2	-3
	$\begin{pmatrix} 33 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 32 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 31 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 32 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 31 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 31 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 31 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 30 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 30 \\ 0 \end{pmatrix}$
F	1	$\frac{1}{5} \frac{4}{5}$	$\frac{1}{5} \frac{4}{5}$	$\frac{3}{5} \frac{2}{5}$	$\frac{1}{5} \frac{4}{5}$	1	1
P		$\frac{4}{5} \frac{*1}{5}$	$\frac{4}{5} \frac{*1}{5}$	$\frac{2}{5} \frac{*3}{5}$	$\frac{4}{5} \frac{*1}{5}$		

[6]

$L \backslash M$	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6
	$\begin{pmatrix} 60 \\ 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 60 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 60 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 60 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 60 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 60 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 60 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 50 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 40 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 30 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 00 \\ 0 \end{pmatrix}$
I	1	$\frac{1}{11} \frac{1}{11}$	$\frac{10}{11} \frac{1}{11}$	$\frac{8}{11} \frac{3}{11}$	$\frac{16}{33} \frac{1}{33}$	$\frac{8}{33} \frac{20}{33}$	$\frac{16}{231} \frac{40}{30}$	$\frac{16}{231} \frac{40}{30}$	$\frac{16}{33} \frac{16}{33}$	$\frac{8}{11} \frac{3}{11}$	$\frac{10}{11} \frac{1}{11}$	1	1
G		$\frac{1}{11} \frac{*10}{11}$	$\frac{3}{11} \frac{*8}{11}$	$\frac{3}{11} \frac{*8}{11}$	$\frac{36}{77} \frac{*25}{77}$	$\frac{40}{77} \frac{*1}{77}$	$\frac{24}{77} \frac{64}{385}$	$\frac{40}{77} \frac{*1}{77}$	$\frac{36}{77} \frac{*25}{77}$	$\frac{3}{11} \frac{*8}{11}$	$\frac{1}{11} \frac{*10}{11}$		
D		$\frac{1}{21} \frac{*4}{21}$	$\frac{1}{21} \frac{*4}{21}$	$\frac{5}{21} \frac{*8}{21}$	$\frac{16}{21} \frac{1}{21}$	$\frac{5}{21} \frac{*8}{21}$	$\frac{10}{21} \frac{*1}{7}$	$\frac{5}{21} \frac{*8}{21}$	$\frac{1}{21} \frac{*4}{21}$	$\frac{8}{11} \frac{3}{11}$	$\frac{1}{11} \frac{*10}{11}$		
S							$\frac{1}{7} \frac{*6}{35}$	$\frac{1}{7} \frac{*6}{35}$	$\frac{1}{7} \frac{*6}{35}$	$\frac{1}{7} \frac{*6}{35}$	$\frac{1}{7} \frac{*6}{35}$		

[51]

$L \backslash M$	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5
	$\begin{pmatrix} 51 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 51 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 51 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 41 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 51 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 41 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 51 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 41 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 31 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 50 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 41 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 31 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 50 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 31 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 40 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 30 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$
H	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{8}{75}$	$\frac{8}{105}$	$\frac{8}{105}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{4}{5}$	1
G	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{3}{75}$	$\frac{3}{35}$	$\frac{3}{35}$	$\frac{3}{35}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
F		$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{140}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
D			$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
P				$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{175}$	$\frac{1}{175}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$

[42]

$L \backslash M$	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4
	$\begin{pmatrix} 42 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 41 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 42 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 41 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 42 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 41 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 31 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 41 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 31 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 22 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 41 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 31 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 22 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 40 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 31 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 22 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 40 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 30 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix}$
G	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{8}{21}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{4}{28}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{2}$	1
F	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
D ₁		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$
D ₂			$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
S				$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{175}$	$\frac{1}{175}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{7}$

1) 表中列的为系数 $\langle \begin{pmatrix} \nu_1 \\ m \end{pmatrix} | [\nu_1, LM] \rangle$ 的平方值, 带*号者代表该系数为负值.

2) 绝对位相的选择规则为 $\langle \begin{pmatrix} \nu_1 \\ m \end{pmatrix} | [\nu_1, LL] \rangle > 0$; $\langle \begin{pmatrix} \nu_1 \\ m \end{pmatrix} | [\nu_1, LL] \rangle$ 代表“权”最大的 Gelfand 基.

[4]

M_T	2				1				0				-1				-2			
	2	1	0	-1	-2	2	1	0	-1	-2	2	1	0	-1	-2	2	1	0	-1	-2
M_S	2	1	0	-1	-2															
T_S	1111	1112	1122	1222	2222	1113	1123	1114	1223	1224	2223	1234	2233	1344	2344	1444	2444	3333	3344	4444
2 2	1	1	1	1	1	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	1	1	1
1 1							$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
0 0							$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

[31]

M_T	1			0			-1		
	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1
M_S	112 113 111 3 2 4	122 123 112 114 3 2 4 2	222 122 124 3 4 2	123 133 113 114 3 2 4 3	223 123 124 134 114 3 4 3 2 4	223 224 124 144 4 3 4 2	233 133 134 3 4 3	234 134 144 4 3 4	234 244 144 4 3 4
T_S	$\frac{1}{12} \frac{2}{3} \frac{1}{4}$ $\frac{1}{3} \frac{2}{4}$	$\frac{1}{6} \frac{1}{3} \frac{1}{6} \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{1}{2}$	$\frac{1}{4} \frac{1}{12} \frac{2}{3}$ $\frac{1}{4} \frac{3}{4}$	$\frac{1}{6} \frac{1}{3} \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2} \frac{1}{6} \frac{1}{3}$	$\frac{1}{6} \frac{2}{9} \frac{1}{3} \frac{1}{9}$ $\frac{1}{6} \frac{2}{9} \frac{1}{9} \frac{1}{6}$	$\frac{1}{18} \frac{4}{9} \frac{1}{6} \frac{1}{3}$ $\frac{1}{6} \frac{1}{3} \frac{2}{2}$	$\frac{1}{6} \frac{3}{4} \frac{1}{2}$ $\frac{1}{4} \frac{1}{4} \frac{2}{12} \frac{3}{3}$	$\frac{1}{3} \frac{4}{3} \frac{1}{6}$ $\frac{1}{18} \frac{9}{9} \frac{1}{6}$	$\frac{1}{4} \frac{2}{2} \frac{1}{4} \frac{1}{2}$ $\frac{1}{4} \frac{1}{4} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$
2 1	$\frac{1}{12} \frac{2}{3} \frac{1}{4}$	$\frac{1}{6} \frac{1}{3} \frac{1}{6} \frac{1}{2}$	$\frac{1}{4} \frac{1}{12} \frac{2}{3}$	$\frac{1}{6} \frac{1}{3} \frac{1}{2}$	$\frac{1}{6} \frac{2}{9} \frac{1}{3} \frac{1}{9}$	$\frac{1}{18} \frac{4}{9} \frac{1}{6} \frac{1}{3}$	$\frac{1}{6} \frac{3}{4} \frac{1}{2}$	$\frac{1}{3} \frac{4}{3} \frac{1}{6}$	$\frac{1}{4} \frac{2}{2} \frac{1}{4} \frac{1}{2}$
1 2	$\frac{2}{3} \frac{1}{4}$	$\frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{1}{2}$	$\frac{1}{4} \frac{3}{4}$	$\frac{1}{2} \frac{1}{6} \frac{1}{3}$	$\frac{1}{2} \frac{2}{9} \frac{1}{9} \frac{1}{6}$	$\frac{1}{6} \frac{1}{3} \frac{2}{2}$	$\frac{1}{4} \frac{1}{4} \frac{2}{12} \frac{3}{3}$	$\frac{1}{18} \frac{9}{9} \frac{1}{6}$	$\frac{1}{4} \frac{1}{4} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$
1 1	$\frac{1}{6} \frac{1}{3} \frac{2}{2}$	$\frac{1}{3} \frac{1}{6} \frac{3}{6}$	$\frac{1}{2} \frac{1}{6}$	$\frac{1}{2} \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} \frac{1}{9} \frac{1}{9} \frac{1}{6}$	$\frac{1}{6} \frac{1}{3} \frac{2}{2}$	$\frac{1}{2} \frac{1}{6} \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} \frac{4}{3} \frac{1}{6}$	$\frac{1}{4} \frac{2}{2} \frac{1}{4} \frac{1}{2}$
1 0	0	$\frac{1}{2} \frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6} \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} \frac{1}{9} \frac{1}{9} \frac{1}{6}$	$\frac{1}{6} \frac{1}{3} \frac{2}{2}$	$\frac{1}{2} \frac{1}{6} \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} \frac{4}{3} \frac{1}{6}$	$\frac{1}{4} \frac{2}{2} \frac{1}{4} \frac{1}{2}$
0 1				$\frac{1}{3} \frac{1}{6}$	$\frac{1}{3} \frac{1}{9} \frac{1}{9} \frac{1}{6}$	$\frac{1}{6} \frac{1}{3} \frac{2}{2}$	$\frac{1}{2} \frac{1}{6} \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} \frac{4}{3} \frac{1}{6}$	$\frac{1}{4} \frac{2}{2} \frac{1}{4} \frac{1}{2}$

[211]

M_T	1			0			-1		
	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1
M_S	11	12	11	12	13	14	13	23	14
T_S	2	2	2	2	3	2	3	3	3
	3	3	4	4	4	4	4	4	4
2 1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1 0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0 1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

[31]

M_T	2	1	0	-1	-2
	1	0	-1	-2	-1
M_S	1	2	2	2	1
T_S	111	112	122	133	244
	2	2	2	3	4
2 1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1

[22]

M_T	2	1			0			-1			-2
	1	0	-1	2	1	0	-1	1	0	-1	0
M_S	11	12	11	12	11	12	13	11	12	13	23
T_S	22	23	24	24	33	34	34	44	34	44	44
	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
2 0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
0 2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
1 1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
0 0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

1) 态的编号为 $1 = p\alpha$, $2 = p\beta$, $3 = n\alpha$, $4 = n\beta$. 其余说明见文献[4]表1.1附注.

有误,以下四个波函数的展开系数应全部反号(否则不满足 Condon-Shortley 位相约定):

$$\left| [3]_{1/2}^{1/2} \begin{matrix} 1/2 \\ 1/2 \end{matrix} \right\rangle, \left| [3]_{-1/2}^{1/2} \begin{matrix} 1/2 \\ -1/2 \end{matrix} \right\rangle, \left| [21]_{1/2}^{3/2} \begin{matrix} 1/2 \\ -1/2 \end{matrix} \right\rangle, \left| [21]_{-1/2}^{3/2} \begin{matrix} 1/2 \\ 1/2 \end{matrix} \right\rangle.$$

Elliott^[7] 转动模型中的所谓“内禀态” $|(\lambda\mu)K\rangle$ 按角动量的本征态展开,也可以从表 1 得到. 例如利用表 1 纵读可得:

$$\begin{aligned} |(\lambda\mu)K\rangle &= |(22)0\rangle = \left| \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & & \\ \hline \end{array} \right\rangle = - \left| \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & & \\ \hline \end{array} \right\rangle = - \left(\begin{array}{ccc} 4 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & \\ 1 & & \end{array} \right) \rangle \\ &= -\sqrt{\frac{4}{35}} \left| [42]G0 \right\rangle + \sqrt{\frac{5}{42}} \left| [42]D_1 0 \right\rangle - \sqrt{\frac{1}{2}} \left| [42]D_2 0 \right\rangle - \sqrt{\frac{4}{15}} \left| [42]S0 \right\rangle. \end{aligned}$$

我们的结果和 Elliott^[7] 表 3 的区别仅在于: (1) 位相约定不同; (2) 对 $[42]$ 表示. Elliott 没有区分两个 D 态. Elliott 方法也较麻烦, 并且只适用于他所定义的“内禀态”, 我们的方法则是普遍适用的.

参 考 文 献

- [1] I. M. Gelfand and M. L. Zetlin, *Dokl. Akad. Nauk., SSSR* **71**(1950), 825.
- [2] G. E. Baird and L. C. Biedenharn, *J. Math. Phys.*, **4**(1963), 1449.
- [3] M. Moshinsky, *Nucl. Phys.*, **31**(1962), 384.
- [4] 陈金全、王凡、高美娟, 物理学报, **27** (1978), 31.
- [5] J. P. Draayer *et al.*, *Nucl. Phys.*, **A119**(1968), 577.
- [6] 任庚未, 物理学报, **23** (1974), 165.
- [7] J. P. Elliott, *Proc. Roy. Soc.*, **A245**(1958), 562.

PHYSICAL METHOD OF GROUP REPRESENTATION THEORY (V)

THE IRREDUCIBLE BASES OF $SU(3) \supset SO(3)$ AND $SU(4) \supset SU(2) \times SU(2)$

CHEN JIN-CHUAN GAO MEI-JUAN WANG FAN

(Department of Physics, Nanjing University)

ABSTRACT

The expansion coefficients of the $SU(3) \supset SO(3)$ and $SU(4) \supset SU(2) \times SU(2)$ wave functions in the Gelfand bases are given for particle number $f = 1-6$ and $f = 1-4$ respectively.