

# 非平衡态相变的两例—— 光学参量振荡和激光\*

冯 克 安

(中国科学院物理研究所)

## 提 要

本文就光学参量振荡和激光两个物理问题,讨论了非平衡态相变过程的动力特点。相变点是由稳定结点状态突变到鞍点时的转变点。说明了涨落和耗散在相变中所起的作用,得到第二类相变的临界指数 ( $\beta = 1/2, \gamma = 1$ )。

## 一、引 言

在平衡态统计物理的相变理论中,朗道<sup>[1]</sup>首先引入有序参量的概念,在相变点附近,把热力学势按有序参量的偶次项展开,讨论了第二类相变,即所谓的朗道相变理论。后来, Wilson 不着眼于热力学量的形式,而是把配分函数做重整化群变换<sup>[3]</sup>,由变换中得出方程,更好的计算了临界指数<sup>[2]</sup>。

另一方面,在研究非平衡态统计物理问题中得出,当体系由彼此按一定规则相互作用的子系组成时,其控制参量达到某一定阈值时,整个系统的定态行为可以用一个从无序到有序的相变概念来描述。为此, Haken 等人做了不少的非平衡态统计问题,最后都归入为 Fokker-Planck 方程的静止解有  $e^{-\Phi}$  的形式,且势函数  $\Phi$  都有朗道相变理论的形式<sup>[4]</sup>。由于把非平衡态相变问题都归入平衡态的朗道相变理论来统一描述,故有些非平衡态相变的动力特点就看不清楚了。

非平衡态统计问题与平衡态统计问题不同之处就在于它的宏观量随时间而动力变化。本文试图不引入朗道的热力学势形式,对光学参量振荡和激光两个物理问题,讨论其相变的动力性质及计算临界指数。(由于计算得  $\beta = 1/2, \gamma = 1$ , 才能把这种动力转变作为相变看待)这样可能有助于进一步理解相变点的动力性质。

为简单起见,本文以光学中的参量振荡为主说明这一问题。

当把激光器获得的相干强光,入射到具有非对称中心的电介质上,由于入射光很强,其正比于入射光电场强度的二次项的介质极化场也可以产生观测效应,其中参量振荡是泵激光在通过介质中产生  $\omega_1$  和  $\omega_2$  的两束光,有

$$\omega_p = \omega_1 + \omega_2.$$

\* 1977 年 6 月 17 日收到。

其中  $\omega_p, \omega_1, \omega_2$  分别为泵频率、信息频率、闲置频率。光的参量振荡的产生, 必须要求外部泵功率达到一定的阈值才有可能。

在把光的参量振荡作为相变问题讨论的文章中<sup>[5]</sup>, 从所给出的势函数是不能了解非平衡态问题在相变点上的动力特点的。

## 二、有序参量的状态

在光学参量振荡的实验中, 把没有反转对称中心的电介质作为一个谐振腔看待, 它的两端镜面对于泵光束是透明的, 但对于信息波和闲置波是近于理想反射的。由于光波在谐振腔内运动总要与镜面及原子的散射中心等等产生相互作用, 所以必然产生损耗。这种损耗可以在半经典理论中, 唯象地引入阻尼项表示之。

此物理问题的哈密顿量  $H$  显然要包括三个部分: 三个无阻尼的光束的能量  $H_F$  及泵光束与另外两束光的转换相互作用  $H_I$  ( $k$  为转换因子), 再有一项是外部场源与泵光束的相互作用  $H_e$ , 即

$$H = H_F + H_I + H_e,$$

其中

$$\begin{aligned} H_F &= \sum_{\lambda=1}^3 \hbar \omega_{\lambda} a_{\lambda}^{\dagger} a_{\lambda}^{-}, \\ H_I &= i\hbar(k a_3^{\dagger} a_2^{\dagger} a_1^{\dagger} - k a_3^{\dagger} a_2^{-} a_1^{-}), \\ H_e &= \frac{\hbar}{i} (F_{p(i)}^{\dagger} a_3^{-} + F_{p(i)}^{-} a_3^{\dagger}). \end{aligned} \quad (1)$$

这里,  $F_{p(i)}^{\pm} = F_p^{\pm} \exp(\pm i\omega_p t)$ ,  $F_p^{\pm}$  为外光场。

若把此哈密顿量  $H$  代入算符所满足的海森堡运动方程

$$i\hbar \frac{dO}{dt} = [O, H], \quad (2)$$

再唯象地引入阻尼项  $\gamma$ , 则可得一组  $a_i^{\pm}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 的方程组。这组方程包括了频率的快变部分, 若只考虑算符的慢变部分, 可令  $a_i^{\pm} = A_i^{\pm} \exp(\pm i\omega_i t)$ 。这时方程组可以化为

$$\begin{aligned} \frac{dA_1^{\pm}}{dt} &= -\frac{\gamma_1}{2} A_1^{\pm} + k A_3^{\pm} A_2^{\mp}, \\ \frac{dA_2^{\pm}}{dt} &= -\frac{\gamma_2}{2} A_2^{\pm} + k A_3^{\pm} A_1^{\mp}, \\ \frac{dA_3^{\pm}}{dt} &= -\frac{\gamma_3}{2} A_3^{\pm} - k A_2^{\mp} A_1^{\mp} \pm F_p^{\pm}. \end{aligned} \quad (3)$$

由这组方程, 可以求得  $\beta = 1/2$  的临界指数。这样, 就可以把光学参量振荡的转变作为相变问题来看待。

为了方便起见, 再把上面的场方程中的振幅和相角分开讨论。为此引入  $A_i^{\pm} = A_i e^{\pm i\varphi_i}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 及  $F_p^{\pm} = F_p e^{\pm i\varphi_p}$ 。则有

振幅方程:

$$\begin{aligned}
 \frac{dA_1}{dt} &= -\frac{\gamma_1}{2} A_1 + k A_2 A_3 \cos \theta, \\
 \frac{dA_2}{dt} &= -\frac{\gamma_2}{2} A_2 + k A_1 A_3 \cos \theta, \\
 \frac{dA_3}{dt} &= -\frac{\gamma_3}{2} A_3 - k A_1 A_2 \cos \theta + F_p,
 \end{aligned} \quad (4)$$

相角方程:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{k \sin \theta}{A_1 A_2 A_3} (A_1^2 A_2^2 - A_1^2 A_3^2 - A_2^2 A_3^2), \quad \text{其中 } \theta = \varphi_3 - \varphi_1 - \varphi_2.$$

由上面方程组可求得两组平衡点值,在平衡点上满足相角匹配条件  $\theta=0$ , 其两组值为第一组:

$$A_3 = \frac{2F_p}{\gamma_3}, \quad A_1 = 0, \quad A_2 = 0;$$

第二组:

$$A_3 = \frac{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2}}{2k}, \quad A_1^2 = \frac{4k - \sqrt{\gamma_1 \gamma_2}}{4k^2 \sqrt{\gamma_1 \gamma_2}} \gamma_2 \gamma_3, \quad A_2^2 = \frac{4k - \sqrt{\gamma_1 \gamma_2}}{4k^2 \sqrt{\gamma_1 \gamma_2}} \gamma_1 \gamma_3.$$

下面将(4)式在平衡点附近线性化,求其稳定性,也可给出控制参量  $F_p$  的阈值条件.

若引入小量  $a_i = A_i - \langle A_i \rangle_j$ , 其中  $i = 1, 2, 3$ , 而  $j = 1, 2$  代表上面两组值, 则有方程

$$\begin{aligned}
 \dot{a}_1 &= -\frac{\gamma_1}{2} a_1 + k a_2 a_3 + k \langle A_2 \rangle_j a_3 + k \langle A_3 \rangle_j a_2, \\
 \dot{a}_2 &= -\frac{\gamma_2}{2} a_2 + k a_1 a_3 + k \langle A_1 \rangle_j a_3 + k \langle A_3 \rangle_j a_1, \\
 \dot{a}_3 &= -\frac{\gamma_3}{2} a_3 - k a_1 a_2 - k \langle A_1 \rangle_j a_2 - k \langle A_2 \rangle_j a_1.
 \end{aligned} \quad (5)$$

其线性化后的特征方程为

$$\lambda^3 + M\lambda^2 + N\lambda + Q = 0.$$

而  $M, N, Q$  为  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  和  $\langle A_i \rangle_j$  ( $i = 1, 2, 3; j = 1, 2$ ) 的组合.

稳定的平衡点,且具有渐近稳定性时,要求其特征行列式的所有解  $\lambda$  的实部为负.

即要求:  $M > 0, MN - Q > 0, Q > 0$ .

可以得到,对于第一组平衡点,稳定要求是

$$\frac{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3}}{4k} > F_p;$$

对于第二组平衡点稳定要求是

$$\frac{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3}}{4k} < F_p.$$

由此可得出,要想产生信息波和闲置波,要有阈值条件  $F_p > \frac{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3}}{4k}$ .

这完全可以与磁学类比, 给出有序参量在相变点附近随温度的变化规律.

对于磁学上的朗道相变理论有

$$M = 0, \quad T > T_c; \quad M = \pm \sqrt{\frac{a'}{2b'}} (T_c - T), \quad T < T_c.$$

当我们把外场振幅  $F_p$  的变化与负温度 ( $-T$ ) 类比, 而定值  $\frac{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3}}{4k}$  相当于相变温度负值  $-T_c$  时,  $A_1, A_2$  作为宏观有序参量, 则有

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \quad \text{当 } T > T_c.$$

$$A_1 = \pm \sqrt{\frac{\gamma_2}{2k^2 A_3}} (T_c - T), \quad A_2 = \pm \sqrt{\frac{\gamma_1}{2k^2 A_3}} (T_c - T), \quad \text{当 } T < T_c.$$

且在相变点附近, 有序参量随温度的变化规律为

$$A_1 \sim A_2 \sim (T_c - T)^\beta, \quad (T < T_c)$$

其临界指数  $\beta = 1/2$ .

因上面的条件给出的平衡点还具有渐近稳定性, 即如果偏离了平衡状态, 则由于阻尼效应使之以  $e^{-t}$  的速度回到平衡状态.

同样, 对于激光的方程组<sup>[6]</sup>, 可变换为

振幅部分

$$\begin{aligned} \dot{b} &= -kb - \sin \theta \omega g, \\ \dot{\omega} &= -\gamma \omega - bS \sin \theta \cdot g, \\ \dot{S} &= \frac{1}{T_{II}} (S_0 - S) + 4\omega b \sin \theta \cdot g, \end{aligned} \quad (6)$$

相角部分

$$\dot{\theta} = -\left(\frac{b}{\omega} S - \frac{\omega}{b}\right) \cos \theta \cdot g,$$

其中  $B^\pm = be^{\pm i\varphi}$ ,  $S^\pm = we^{\pm i\psi}$ ,  $\theta = \psi - \varphi$ .

由方程 (6), 可得

$$\text{平衡点 } b = 0 \text{ 和 } b = \pm \sqrt{\frac{1}{4kT_{II}}} \left(S_0 - \frac{k\gamma}{g^2}\right), \quad \text{及其阈值条件为 } S_0 > \frac{k\gamma}{g^2}.$$

故在相变点附近, 光场 (有序参量  $b$ ) 随温度 ( $-T = S_0$ ) 的变化也有上面的规律, 且  $\beta = 1/2$ .

### 三、相变点的性质

也可以把 (4) 式的振幅部分拆成  $A_1, A_3$  和  $A_2, A_3$  两组方程讨论, 同样有上节的结论, 且可清楚的看出在相变点上, 其状态的转变规律.

为了讨论平衡点, (4) 式拆为两组方程

$$\begin{aligned} \gamma_1 \gamma_2 A_1 + 4k^2 A_1 A_3^2 \cos^2 \theta &= 0, \\ -\gamma_2 \gamma_3 A_3 - 4k^2 A_1^2 A_3 \cos^2 \theta + 2\gamma_2 F_p &= 0; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \gamma_1 \gamma_2 A_2 + 4k^2 A_2 A_3^2 \cos^2 \theta, \\ & -\gamma_1 \gamma_3 A_3 - 4k^2 A_2^2 A_3 \cos^2 \theta + 2\gamma_1 F_p = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

由于两组方程类似,只讨论(8)式. 由相角方程所要求的平衡条件,(8)式的解为

第一组:

$$A_3 = \frac{2F_p}{\gamma_3}, \quad A_2 = 0;$$

第二组:

$$A_3 = \frac{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2}}{2k}, \quad A_2^2 = \frac{4k - \sqrt{\gamma_1 \gamma_2}}{4k^2 \sqrt{\gamma_1 \gamma_2}} \gamma_1 \gamma_3.$$

由(8)式在平衡点附近线性化后的特征方程

$$\lambda^2 + p\lambda + Q = 0,$$

可得,当代入第一组解时,只要  $\frac{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3}}{4k} > F_p$ , 则有  $p > 0$ ,  $p^2 \geq 4Q > 0$ , 显然这时

$A_2$  为稳定结点状态; 而当  $\frac{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3}}{4k} < F_p$ , 因有  $Q < 0$ , 这时  $A_2$  的状态为不稳定的鞍点状态.

对(7)式的讨论,结果相同. 即是说,相变前,系统的状态是稳定的结点状态. 当控制参量超过阈值以后,状态成为不稳定的鞍点,两个有序参量沿着鞍点的下降方向突变到另外的稳定状态上.

而对于激光问题,同样在平衡点附近将振幅方程(6)线性化,把相变前的稳态  $b_1 = 0$ ,  $\omega_1 = 0$ ,  $S_1 = 0$  代入其特征方程得

$$f(\lambda) = \left( \lambda + \frac{1}{T_{11}} \right) (\lambda^2 + \sigma\lambda + \Delta) = 0.$$

显见其一个根  $\lambda_3 = -\frac{1}{T_{11}} < 0$ , 因  $\sigma = \kappa + \gamma$ ,  $\Delta = \kappa\gamma - S_0 g^2$ , 故当  $\frac{\kappa\gamma}{g^2} > S_0$  时,  $\lambda_1, \lambda_2$

都小于零,为稳定的结点状态;当  $\frac{\kappa\gamma}{g^2} = S_0$ ,  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = -(\kappa + \gamma)$  恰在相变点上;当

$\frac{\kappa\gamma}{g^2} < S_0$  时,  $\lambda_1, \lambda_2$  为异号实根,状态为不稳定的鞍点.

由此也可得出,激光的相变点也是由  $\lambda_i$  全部为负的稳定结点状态突变到(按一个方向下降,由变为正值的一个  $\lambda_i$  决定)鞍点时的转变点.

在磁学和激光的相变讨论中,是由一个有序参量的状态分支到有序参量的两个可能状态上,而光学参量振荡是,由两个有序参量的一种状态分支到两个有序参量分别有两种可能的状态上.

上面用线性近似讨论了相变的存在和性质. 下面再用含非线性小量的方程(5),进一步讨论系统处于边缘状态(marginal state)的性质.

边缘状态就是相变前的稳态在相变点上的状态. 这时  $A_3 = \frac{2F_p}{\gamma_3}$ ,  $A_1 = A_2 = 0$ , 及

$F_p = \frac{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3}}{4k}$ . 对于本文,就是线性化的特征方程具有一个根  $\lambda = 0$  的状态.

把这组值代入(5)式后得

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= -\frac{\gamma_1}{2} a_1 + k a_2 a_3 + \frac{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2}}{2} a_2, \\ \dot{a}_2 &= -\frac{\gamma_2}{2} a_2 + k a_1 a_3 + \frac{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2}}{2} a_1, \\ \dot{a}_3 &= -\frac{\gamma_3}{2} a_3 - k a_1 a_2. \end{aligned} \quad (9)$$

显见, (9) 式线性化后的系数矩阵  $A$ , 有三个线性独立的特征矢量, 故可引入非奇异的演化方阵  $V$ ,

$$V = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\gamma_2}{\gamma_1}} & 0 & -\sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

使  $V^{-1}AV$  对角化, 做线性变换

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = V^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

把(9)式化为

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 &= \frac{2\sqrt{\gamma_1 \gamma_2}}{\gamma_1 + \gamma_2} k A_1 A_2 + \frac{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2}}{\gamma_1 + \gamma_2} k \left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right) A_2 A_3, \\ \dot{A}_2 &= -\frac{\gamma_3}{2} A_2 - \sqrt{\frac{\gamma_2}{\gamma_1}} k A_1^2 + \sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}} k A_3^2 - \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2}} k A_1 A_3, \\ \dot{A}_3 &= -\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} A_3 + \frac{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2}}{\gamma_1 + \gamma_2} k \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} - 1\right) A_1 A_2 - \frac{2\sqrt{\gamma_1 \gamma_2}}{\gamma_1 + \gamma_2} k A_2 A_3. \end{aligned} \quad (10)$$

这时  $A_1$  的方程右端不含线性项了. 由  $\dot{A}_2 = \dot{A}_3 = 0$  的两方程消去  $A_2$ , 得含有  $A_3$  和  $A_1$  的方程  $U_{(A_1, A_3)} = 0$ .

令  $A_3 = \sum_{i=1}^N m_i A_1^i$ , 且代入  $U_{(A_1, A_3)} = 0$ , 对比  $A_1$  的同次幂, 可得

$$\begin{aligned} m_1 &= m_2 = 0, \quad m_3 = \frac{-4\gamma_2 k^2 (\gamma_2 - \gamma_1)}{\gamma_1 \gamma_3 (\gamma_1 + \gamma_2)^2}, \\ m_4 &= 0, \quad m_5 = \frac{4k^2 [(\gamma_2 - \gamma_1)^2 - 2\gamma_1 \gamma_2]}{\gamma_1 \gamma_3 (\gamma_1 + \gamma_2)^2} m_3. \end{aligned}$$

故

$$A_3 = m_3 A_1^3 + m_5 A_1^5 + m_7 A_1^7 + \cdots.$$

再可得  $A_2$ , 把  $A_2, A_3$  代入(10)式的第一式有

$$A_1(0) = \frac{-4k^2 \gamma_2}{\gamma_3 (\gamma_1 + \gamma_2)} A_1^3 - \frac{6k^2 (\gamma_2 - \gamma_1)}{\gamma_3 (\gamma_1 + \gamma_2)} m_3 A_1^5 + \cdots = g A_1^N + \cdots.$$

由微分方程理论知, 因  $N$  为奇数且  $g < 0$ , 故在边缘状态上, 状态仍具有渐近稳定性.

$$\text{由 } \dot{A}_1 = \frac{-4k^2 \gamma_2}{\gamma_3 (\gamma_1 + \gamma_2)} A_1^3, \text{ 得 } A_1 = \left[ \frac{8k^2 \gamma_2}{\gamma_3 (\gamma_1 + \gamma_2)} \right]^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}}.$$

把由  $A_1, A_2, A_3$  随时间的变化关系代入(9)式, 得到

$$d_i = M_{i1}t^{-\frac{3}{2}} + M_{i2}t^{-\frac{5}{2}} + \cdots, i = 1, 2, M_{i1}, M_{i2} \text{ 等为系数.}$$

故

$$a_1 \sim t^{-\frac{1}{2}}, a_2 \sim t^{-\frac{1}{2}}.$$

这时有序参量偏离稳态的渐近稳定程度是由非线性小量起作用, 不再是  $e^{-t}$  的量级变化, 而是变为一种新的函数形式  $t^{-\frac{1}{2}}$ , 临界状态上的这种慢变速度的存在, 仍是由于损耗对于系统的阻尼效应所产生的, 这使得我们在相变点上必须要考虑矛盾的另一面, 出现的大的涨落.

在讨论激光的方程时, 也可得同样的结论.

#### 四、临界波动

前面几节是由算符的运动方程(引入阻尼项)来讨论相变的. 而若从郎之万观点来理解阻尼的量子理论<sup>[7,8]</sup>. 那末, 量子系统与热池的相互作用将引起耗散和涨落, 而由热池所引起的频移和耗散效应可以合并到算符的平均量的运动方程中, 即是在我们的方程中引入阻尼项, 这种方程

$$\frac{d\langle a_\mu \rangle}{dt} = \langle A_\mu(\alpha) \rangle \quad (11)$$

就是前面几节讨论所用到的方程. 而如果要完整的考虑一切损耗机制所构成的热池效应, 则(11)式中就要加上一个噪源项  $F_{\mu}(\alpha, t)$ , 它相当于一种随机力, 作用在系统上, 使之产生波动. 这时, 方程为

$$\frac{da_\mu}{dt} = A_\mu(\alpha) + F_{\mu}(\alpha, t). \quad (12)$$

下面, 由(12)式类型的方程, 讨论在相变点上所引起的波动, 比较涨落和耗散哪一项起主要作用. 由随机过程知道, 若随机力满足马尔柯夫过程的要求, 则有下列性质:

$$\langle F_{\mu}(\alpha(t), t) F_{\nu}(\alpha(t'), t') \rangle = 2\langle D_{\mu\nu}(\alpha, t) \rangle \delta(t-t'),$$

$\langle D_{\mu\nu}(\alpha, t) \rangle$  称为扩散系数. 再引入波动力具有上面性质, 即

$$\langle F_i^+(t_1) F_i^-(t_2) \rangle = \gamma_i (\bar{n}_i + 1) \delta(t_1 - t_2),$$

$$\langle F_i^-(t_1) F_i^+(t_2) \rangle = \gamma_i \bar{n}_i \delta(t_1 - t_2),$$

则加入波动力后, 型如(12)式的算符运动方程为

$$\begin{aligned} \frac{dA_1^\pm}{dt} &= -\frac{\gamma_1}{2} A_1^\pm + \kappa A_2^\mp A_3^\pm + F_1^\pm, \\ \frac{dA_2^\pm}{dt} &= -\frac{\gamma_2}{2} A_2^\pm + \kappa A_1^\mp A_3^\pm + F_2^\pm, \\ \frac{dA_3^\pm}{dt} &= -\frac{\gamma_3}{2} A_3^\pm - \kappa A_1^\mp A_2^\mp \pm F_3^\pm + F_3^\pm. \end{aligned} \quad (13)$$

为求有序参量  $A_1, A_2$  在相变点上的涨落, 把方程(13)在第二组稳态解附近做线性化.

引入  $A_i^\pm = \langle A_i^\pm \rangle (1 + \delta A_i^\pm)$ , 因有  $\langle A_i^\pm \rangle = A_i e^{\pm i\varphi_i}$ , 可得

$$\delta A_i^\pm = \delta A_i \pm i\delta\varphi_i = \frac{\rho_i}{A_i} \pm i\delta\varphi_i \quad (i = 1, 2).$$

把此代入(13)式可得

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_1 &= \frac{-kA_2A_3}{A_1}\rho_1 + kA_3\rho_2 + \frac{1}{2}[F_1^+e^{-i\varphi_1} + F_1^-e^{i\varphi_1}], \\ \dot{\rho}_2 &= kA_3\rho_1 - \frac{kA_1A_3}{A_2}\rho_2 + \frac{1}{2}[F_2^+e^{-i\varphi_2} + F_2^-e^{i\varphi_2}];\end{aligned}\quad (14)$$

$$\begin{aligned}\delta\dot{\varphi}_1 &= \frac{-kA_2A_3}{A_1}\delta\varphi_1 - \frac{kA_2A_3}{A_1}\delta\varphi_2 - \frac{i}{2A_1}[F_1^+e^{-i\varphi_1} - F_1^-e^{i\varphi_1}], \\ \delta\dot{\varphi}_2 &= \frac{-kA_1A_3}{A_2}\delta\varphi_1 - \frac{kA_1A_3}{A_2}\delta\varphi_2 - \frac{i}{2A_2}[F_2^+e^{-i\varphi_2} - F_2^-e^{i\varphi_2}].\end{aligned}\quad (15)$$

求解方程(14)得

$$\begin{aligned}\rho_{1(t_1)} &= \frac{\exp\left(-kA_3\left(\frac{A_1}{A_2} + \frac{A_2}{A_1}\right)t\right)}{2\left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)} \int_{-\infty}^t \exp\left(kA_3\left(\frac{A_1}{A_2} + \frac{A_2}{A_1}\right)t\right) [F_1^+e^{-i\varphi_1} \\ &\quad + F_1^-e^{i\varphi_1} + F_2^+e^{-i\varphi_2} + F_2^-e^{i\varphi_2}] dt, \\ \rho_{2(t_1)} &= -\frac{A_1}{A_2}\rho_{1(t_1)}.\end{aligned}$$

由于波动力的性质,对于第二组稳态解,其有序参量  $A_1$  的涨落为

$$\langle\delta A_{1(t_1)}\delta A_{1(t_2)}\rangle = \sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}} \frac{\gamma_1 k [(\gamma_1 + \gamma_2) + 2(\gamma_1 \bar{n}_1 + \gamma_2 \bar{n}_2)]}{4(\sqrt{\gamma_1} - \sqrt{\gamma_2})^2(\gamma_1 + \gamma_2)(T_c - T)} \exp\left(\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}(t_1 - t_2)\right)$$

故在相变点附近有:  $\langle(\delta A_1)^2\rangle \sim |T_c - T|^{-1}$ ,  $T \rightarrow T_c - 0$  时可得其临界指数  $\gamma = 1$ , 显然  $A_2$  有同样性质.

解方程(15)后,得相角的涨落为

$$\langle(\delta\varphi_1)^2\rangle = \sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}} \frac{k\gamma_1[\gamma_1(\gamma_1 + 2\gamma_1\bar{n}_1) + \gamma_2(\gamma_2 + 2\gamma_2\bar{n}_2)]}{4(\gamma_1 + \gamma_2)^2(T_c - T)} \sim |T_c - T|^{-1}.$$

相角涨落也有同样的性质.

在相变点上必然出现的很大的涨落,足以克服耗散所引起的状态的渐近稳定性( $t^{-\frac{1}{2}}$ 速度),使状态发生突变.故从动力观点来看,耗散对相变前后形成稳态起主要作用,而在相变点上,涨落起主要作用.

对于加上波动力后的激光方程组,也可得同样的结果.

## 五、讨 论

1) 非平衡态统计物理的相变问题,完全可从宏观有序参量随时间的变化过程去理解,而不一定非要得出一个相仿平衡态相变的朗道型热力学势形式.

2) 激光和光学参量振荡是两个不同的物理问题,由不同的哈密顿量,给出不同形式的包括有序参量的非线性方程组,但它们在相变的动力性质上确有着共同的特点(见下表).

| 物理问题   | 相 变 前 |                   |       | 相 变 点 上 |                     | 临界指数          |          |
|--------|-------|-------------------|-------|---------|---------------------|---------------|----------|
|        | 稳态性质  | 渐近速度              | 有序参量数 | 转变类型    | 渐 近 速 度             | $\beta$       | $\gamma$ |
| 光学参量振荡 | 稳定结点  | 以 $e^{-t}$ 速度趋于稳态 | 2     | 鞍点型转变   | 以 $e^{-1/2}$ 速度趋于稳态 | $\frac{1}{2}$ | 1        |
| 激 光    | 同 上   | 同 上               | 1     | 同 上     | 同 上                 | 同上            | 同上       |

3) 分析这两个不同的非线性方程组其线性化后的特征方程, 可知都有同样的性质: 相变前系统是高维的稳定结点状态, 所有特征根  $\lambda_i$  都小于零, 随外力逐渐增大到阈值和超过阈值, 使有一个  $\lambda$  逐渐变为零和变为正值, 状态成为鞍点型的不稳定, 出现对称破坏, 产生相变。

工作中得到郝柏林同志、于渌同志的关心, 及霍裕平同志对本工作的讨论, 帮助澄清一些问题, 特此表示感谢。

### 参 考 文 献

- [1] 朗道等著, 统计物理学.
- [2] M. E. Fisher, *Rep. Prog. Phys.*, **30**(1967), 615.
- [3] K. G. Wilson *et al.*, *Phys. Rev.*, **B4**(1971), 3174; 3184; *Phys. Rev. Lett.*, **28**(1972), 240; 548.
- [4] H. Haken 编, *Cooperatives Effect* (1974).
- [5] R. Graham, *Phys. Lett.*, **32A**(1970), 373; H. Haken, *Opt. Elect.*, **2**(1970), 161.
- [6] F. T. Arecchi 编, “*Laser Handbook*” 一书, 其中 A. 3 H. Haken 一文.
- [7] M. Lax, *Phys. Rev.*, **145**(1966), 110.
- [8] W. H. Louisell, *Quantum Statistical Properties of Radiation* (1973).

## TWO EXAMPLES OF NON-EQUILIBRIUM PHASE TRANSITION

### ——OPTICAL PARAMETRIC OSCILLATION AND LASER

FENG KE-AN

(*Institute of Physics, Academia Sinica*)

#### ABSTRACT

In this article, dynamical features of non — equilibrium phase transitions are discussed, taking the physical problems of *OPO* and laser processes as two examples. The phase transition point is found to be the point of sudden change from a stable nodal point to a saddle point. The role of fluctuations and dissipations in such phase transitions is elucidated, and critical exponents analogous to those in the second order phase transition are found ( $\beta = 1/2$ ,  $\gamma = 1$ ).