

部分偏振的斑纹图样与均匀 相干背景之和的统计性质*

詹 达 三

(中国科学院物理研究所)

提 要

本文讨论了部分偏振的斑纹图样与一个处在任意偏振态的均匀背景相干迭加的统计性质。

一

在一些实际的应用领域中,诸如干涉量度术^[1]和全息术^[2-4]等,人们需要了解斑纹图样与一个均匀背景相干迭加的统计性质。对斑纹图样与相干背景的偏振态是相同的简单情形,已有人作过讨论^[5,6]。在讨论中,假定斑纹图样的场的复振幅遵从高斯统计。但是,相干光在某一些表面上漫反射时会引起部分退偏振。因此,需要讨论部分偏振的斑纹图样与一个任意偏振态下的均匀背景相干迭加的统计性质。为此,我们仍然假定部分偏振的斑纹图的复振幅服从高斯统计。为了不失普遍性,假定均匀的相干背景是椭圆偏振场。椭圆偏振场在一定条件下可以退化为圆偏振场或线偏振场^[7]。

二

我们用 α_s 来代表强度恒定的椭圆偏振场^[7]。在 x - y 直角坐标系中 α_s 可表示为

$$\alpha_s = a_1 l_x + a_2 l_y, \quad (1)$$

其中 $a_1 = |a_1| e^{i\alpha_1}$, $a_2 = |a_2| e^{i\alpha_2}$, $|a_1|$, $|a_2|$, α_1 , α_2 都是实常量; l_x 和 l_y 分别代表 x 和 y 方向上的单位矢量。于是,椭圆偏振场的强度 I_s 可写成

$$I_s = |\alpha_s|^2 = |a_1|^2 + |a_2|^2, \quad (2)$$

其中已假定 I_s 是常量。同理,在此坐标系中, (x, y) 点上的斑纹图样的复振幅 $A_N(x, y)$ 可写成

$$A_N(x, y) = A_{Nx}(x, y) l_x + A_{Ny}(x, y) l_y. \quad (3)$$

由于 A_N 是一个复高斯随机变量,其平均值 $\langle I_N \rangle$ 定义为

$$\langle I_N \rangle = \langle |A_N|^2 \rangle = \langle |A_{Nx}|^2 \rangle + \langle |A_{Ny}|^2 \rangle, \quad (4)$$

* 1977年4月18日收到。

其中 $\langle \dots \rangle$ 代表对系综平均.

因此,总场强 $\mathbf{A}$ 可写成

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{l}_x + A_y \mathbf{l}_y, \quad (5)$$

其中 $A_x = A_{Nx} + a_1$, $A_y = A_{Ny} + a_2$.

为了讨论部分偏振的斑纹图样的统计性质,引入相干矩阵 $[\mathcal{J}]$ ^[8],其定义如下:

$$[\mathcal{J}] = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} \\ J_{yx} & J_{yy} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

其中 $J_{ii} = \langle A_{Ni} A_{Ni}^* \rangle$, $i, j = x, y$. 于是(4)式可写成

$$\langle I_N \rangle = J_{xx} + J_{yy}. \quad (7)$$

从相干矩阵(6)式可以得到部分偏振场的偏振度 $\mathcal{P}$ 为

$$\mathcal{P} = \left\{ 1 - \frac{4 \det([\mathcal{J}])}{\{T([\mathcal{J}])\}^2} \right\}^{1/2}. \quad (8)$$

由于,(6)式定义的相干矩阵是厄米的,总可以找到一个么正变换 $[\mathcal{S}]$,使相干矩阵在新的坐标系中是对角化的.在这一新的坐标系中,两个场分量之间就变为互不关联的独立高斯随机变量.一般说来,这类么正矩阵相当于两个变换的联合作用.一个变换 $[\mathcal{C}]$ 相应于原坐标系中两个场分量之间有一个相对的相移;另一个变换 $[\mathcal{R}]$ 相应于坐标系的转动^[9].么正矩阵的具体形式如下

$$[\mathcal{S}] = [\mathcal{R}][\mathcal{C}] = \begin{bmatrix} \cos \theta e^{i\delta/2} & \sin \theta e^{-i\delta/2} \\ -\sin \theta e^{i\delta/2} & \cos \theta e^{-i\delta/2} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

其中 $[\mathcal{R}]$, $[\mathcal{C}]$ 分别为

$$[\mathcal{R}] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad [\mathcal{C}] = \begin{bmatrix} e^{i\delta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\delta/2} \end{bmatrix},$$

其中 θ 代表坐标系转动的角度, δ 代表相对相移的大小.在新的 ξ - η 坐标系中,相干矩阵为

$$[\mathcal{J}'] = [\mathcal{S}][\mathcal{J}][\mathcal{S}^+] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

其中 λ_1, λ_2 (设 $\lambda_1 \geq \lambda_2$)分别为

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \langle I_N \rangle (1 + \mathcal{P}), \quad (11)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \langle I_N \rangle (1 - \mathcal{P}).$$

由(9)式可解得 θ, δ 分别为

$$\tan 2\theta = \frac{2|J_{12}|}{J_{11} - J_{22}}, \quad (12)$$

$$\delta = \varphi_{12} + 2\pi m \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (13)$$

其中 $J_{12} = |J_{12}| e^{-i\varphi_{12}}$, φ_{12} 是 J_{12} 的幅角.

在 ξ - η 坐标系中,总场量的两个分量为

$$\begin{aligned} \mathcal{A}'_{\xi} &= \mathcal{A}_{N\xi} + a'_1 e^{i\beta_1}, \\ \mathcal{A}'_{\eta} &= \mathcal{A}_{N\eta} + a'_2 e^{i\beta_2}, \end{aligned} \quad (14)$$

其中 $\mathcal{A}_{N\xi}, \mathcal{A}_{N\eta}$ 是高斯随机场的两个分量, 而 a'_1, a'_2 分别是变换后的完全偏振相干场的两个分量¹⁾. a'_1 和 a'_2 的表达式分别为

$$\begin{aligned} a'_1 &= [|a_1|^2 \cos^2 \theta + |a_2|^2 \sin^2 \theta + 2|a_1||a_2| \sin \theta \cos \theta \cos(\alpha_2 - \alpha_1 - \delta)]^{1/2}, \\ a'_2 &= [|a_1|^2 \sin^2 \theta + |a_2|^2 \cos^2 \theta - 2|a_1||a_2| \sin \theta \cos \theta \cos(\alpha_2 - \alpha_1 - \delta)]^{1/2}. \end{aligned} \quad (15)$$

由(15)式可知 $I_s = a_1'^2 + a_2'^2$.

由于我们假定 $\mathcal{A}_N$ 遵从高斯统计, 么正变换是线性变换, 所以 $\mathcal{A}'_N$ 也遵从高斯统计, 而两个分量又是彼此独立的, 因此可以分别作计算.

由假定知道, $\mathcal{A}_{N\xi}$ 的实部 $\mathcal{A}_{N\xi}^{(r)}$ 和虚部的联合概率密度函数^[10]为

$$P_{r,i}(\mathcal{A}_{N\xi}^{(r)}, \mathcal{A}_{N\xi}^{(i)}) = \frac{1}{2\pi\sigma_1^2} \exp \left\{ -\frac{[\mathcal{A}_{N\xi}^{(r)}]^2 + [\mathcal{A}_{N\xi}^{(i)}]^2}{2\sigma_1^2} \right\}, \quad (16)$$

其中 $\sigma_1^2 = \langle |\mathcal{A}_{N\xi}^{(r)}|^2 \rangle = \langle |\mathcal{A}_{N\xi}^{(i)}|^2 \rangle = \frac{\lambda_1}{2}$.

那么, 总场振幅的 ξ 分量 $\mathcal{A}'_\xi$ 的实部 $\mathcal{A}_1^{(r)}$ 和虚部 $\mathcal{A}_1^{(i)}$ 遵从的联合概率密度函数为^[11]

$$P_{r,i}(\mathcal{A}_1^{(r)}, \mathcal{A}_1^{(i)}) = \frac{1}{2\pi\sigma_1^2} \exp \left\{ -\frac{|\mathcal{A}'_\xi - a'_1 e^{i\beta_1}|^2}{2\sigma_1^2} \right\}, \quad (17)$$

其中 $\sigma_1^2 = \frac{\lambda_1}{2}$.

由 $\mathcal{A}'_\xi = \mathcal{A}_1^{(r)} + i\mathcal{A}_1^{(i)}$, 作随机变量变换

$$\mathcal{A}_1^{(r)} = \sqrt{I_1} \cos \theta_1, \quad \mathcal{A}_1^{(i)} = \sqrt{I_1} \sin \theta_1, \quad (18)$$

其中 $I_1 = [\mathcal{A}_1^{(r)}]^2 + [\mathcal{A}_1^{(i)}]^2$, $\theta = \tan^{-1} \frac{\mathcal{A}_1^{(i)}}{\mathcal{A}_1^{(r)}}$. 那么对于 I_1, θ_1 的联合概率密度为^[12]

$$P_{I_1, \theta_1}(I_1, \theta_1) = \frac{1}{2} P_{r,i}(\sqrt{I_1} \cos \theta_1, \sqrt{I_1} \sin \theta_1), \quad (19)$$

其中系数 $1/2$ 是变量变换的雅可比行列式的模. 将(18)式代入(19)式并完成对 θ_1 的积分得到 I_1 的边缘概率密度函数 $P_{I_1}(I_1)$ 为

$$P_{I_1}(I_1) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_1} \exp \left\{ -\frac{I_1 + a_1'^2}{\lambda_1} \right\} I_0 \left(2 \sqrt{\frac{I_1 a_1'}{\lambda_1}} \right) & (I_1 \geq 0); \\ 0 & \text{其他,} \end{cases} \quad (20)$$

其中 $I_0(z)$ 是零阶第一类修正贝塞耳函数.

同理, 对于 $\mathcal{A}'_\eta$ 也可得到类似的结果,

$$P_{I_2}(I_2) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_2} \exp \left\{ -\frac{I_2 + a_2'^2}{\lambda_2} \right\} I_0 \left(2 \sqrt{\frac{I_2 a_2'}{\lambda_2}} \right) & (I_2 \geq 0); \\ 0 & \text{其他,} \end{cases} \quad (21)$$

其中 $I_2 = |\mathcal{A}'_\eta|^2 = |\mathcal{A}_2^{(r)}|^2 + |\mathcal{A}_2^{(i)}|^2$, $\lambda_2 = \langle I_2 \rangle$.

由(20)和(21)式可求得总强度 $I(I = I_1 + I_2)$ 的概率密度函数 $P_I(I)$ 为

1) 当然, 这两个分量不一定是代表两个线偏振分量, 亦可能是两个椭圆偏振分量.

$$P_I(I) = \begin{cases} \int_0^I P_{I_1}(I_2) P_{I_1}(I - I_2) dI_2 & (I \geq 0), \\ 0 & \text{其他}. \end{cases} \quad (22)$$

将(20)和(21)式代入(22)式,并用 $I_0(z) = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2K}}{(K!)^2}$ 完成对 I_2 的积分^[13], 求得 $P_I(I)$ 为

$$P_I(I) = \begin{cases} \frac{4I}{\langle I_N \rangle^2 (1 - \mathcal{D}^2)} \exp \left\{ -\frac{2I(1 - \mathcal{D}) + 2I_s + 2\mathcal{D}(I_{s2} - I_{s1})}{\langle I_N \rangle (1 - \mathcal{D}^2)} \right\} \cdot \\ \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{i! j! \Gamma(i+j+2)} \left[\frac{I_{s2} I}{\frac{1}{4} \langle I_N \rangle^2 (1 - \mathcal{D}^2)} \right]^i \left[\frac{I_{s1} I}{\frac{1}{4} \langle I_N \rangle^2 (1 + \mathcal{D}^2)} \right]^j \\ \cdot {}_1F_1(i+1, i+j+2; -\frac{4PI}{\langle I_N \rangle (1 - \mathcal{D}^2)}) & I \geq 0; \\ 0 & \text{其他}, \end{cases} \quad (23)$$

其中 ${}_1F_1(a; c; z)$ 是汇合超比函数.

(22)式就是部分偏振的斑纹图样与一个任意完全偏振的均匀背景相干迭加时的总强度的概率密度函数.

由(22)式求出 n 阶矩 $\langle I^n \rangle$ 的表示式为^[14]

$$\langle I^n \rangle = n! \sum_{r=0}^n \lambda_1^{n-r} \lambda_2^r {}_1F_1(-n+r; 1; -\frac{I_{s1}}{\lambda_1}) {}_1F_1(-r; 1; -\frac{I_{s2}}{\lambda_2}). \quad (24)$$

当 $n=1$ 和 $n=2$ 时,从(24)式得到

$$\langle I \rangle = \langle I_N \rangle + I_s, \quad (25)$$

$$\langle I^2 \rangle = \frac{3}{2} \langle I_N \rangle^2 + I_s^2 + 3 \langle I_N \rangle I_s + \frac{1}{2} \mathcal{D}^2 \langle I_N \rangle^2 + \mathcal{D} \langle I_{s1} - I_{s2} \rangle \langle I_N \rangle. \quad (26)$$

总强度的方差 σ_I^2 为

$$\sigma_I^2 = \langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2 = \frac{1}{2} (1 + \mathcal{D}) \langle I_N \rangle^2 + \langle I_N \rangle I_s + \mathcal{D} \langle I_N \rangle (I_{s1} - I_{s2}). \quad (27)$$

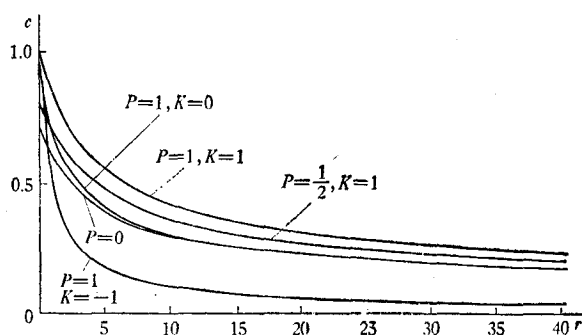


图1 当 P 和 K 取不同数值时, c 对 r 的依赖关系

如果引入 $r = \frac{I_s}{\langle I_N \rangle}$, $K = \frac{\Delta I_s}{\langle I_N \rangle}$, $\Delta I_s = I_{s1} - I_{s2}$. 则可以定义“反差” $c = \frac{\sigma_I}{\langle I \rangle}$, 得到

$$c = \frac{\left[\frac{1}{2} (1 + P^2) + r(1 + PK) \right]^{1/2}}{1 + r}. \quad (28)$$

当 P, K 取不同数值时, c 对 r 的依赖关系见图 1.

三

现在计算当 $P = 0$ 时, 总强度 I 的概率密度函数 $P'_I(I)$. 当 $P = 0$ 时, 由(6)式定义的相干矩阵 $[\mathcal{J}]$, 已经是对角化了的, 取下述形式

$$[\mathcal{J}] = \frac{1}{2} \langle I_N \rangle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (29)$$

此时相干矩阵 $[\mathcal{J}]$ 是一个常量乘单位矩阵, 因此它在任意么正变换下是不变的. 因此, 可以找到一个么正变换使得椭圆偏振场在新的坐标系中变成线偏振场, 而(29)式仍取同一形式. 并取偏振方向与一个坐标轴方向一致, 然后做计算. 设 $I'_1 = I$, $I'_2 = 0$, 由(29)式可得 $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2} \langle I_N \rangle = \lambda_0$, 由(20)式得到 $P'_I(I_1)$ 为

$$P'_I(I_1) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_0} \exp \left\{ -\frac{I_1 + I_2}{\lambda_0} \right\} I_0 \left(2 \frac{\sqrt{I_1 I_2}}{\lambda_0} \right) & I_1 \geq 0; \\ 0 & \text{其他.} \end{cases} \quad (30)$$

由(21)式令 $I_2 = 0$ 得到 $P'_{I_2}(I_2)$ 为

$$P'_{I_2}(I_2) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_0} \exp \left(-\frac{I_2}{\lambda_0} \right) & I_2 \geq 0; \\ 0 & \text{其他.} \end{cases} \quad (31)$$

则由(22)式得到总强度 I 的概率密度函数 $P'_I(I)$ 为^[15].

$$P'_I(I) = \begin{cases} 2 \sqrt{\frac{I}{I_0 \langle I_N \rangle^2}} I_1 \left(4 \frac{\sqrt{I_1 I_2}}{\langle I_N \rangle} \right) \exp \left\{ -\frac{2I + 2I_2}{\langle I_N \rangle} \right\} & I \geq 0; \\ 0 & \text{其他.} \end{cases} \quad (32)$$

由(32)式可知, 在斑纹图样是完全不偏振的情况下, 总强度的概率密度函数 $P'_I(I)$ 只与偏振场的强度有关, 而与完全偏振场是线偏振的还是椭圆偏振的无关. 其实, 从 $P'_I(I)$ 的表达式(23)中令 $P = 0$, 经过适当运算, 也可以得出(32)式.

若在(32)式中取 $I_2 = 0$, 即不存在均匀的相干背景, 可以得出完全不偏振的斑纹图样的强度的概率密度函数为

$$P'_I(I) = \begin{cases} \frac{4I}{\langle I_N \rangle^2} \exp \left\{ -\frac{2I}{\langle I_N \rangle} \right\} & I \geq 0; \\ 0 & \text{其他.} \end{cases} \quad (33)$$

这个结果是大家熟知的^[16]. 图 2 给出了当 r 取不同数值时, $\langle I_N \rangle P'_I(I)$ 对 $I/\langle I_N \rangle$ 的依赖关系.

由(32)式可以求得 n 阶矩 $\langle I^n \rangle$ 的表达式为

$$\langle I^n \rangle = (n+1)! \left(\frac{\langle I_N \rangle}{2} \right)^n {}_1F_1 \left(-n; 2; -\frac{2I_s}{\langle I_N \rangle} \right). \quad (34)$$

但从一般公式(24), 只要令 $P = 0$, 也可以得到 $\langle I^n \rangle$ 的表示式

$$\langle I^n \rangle = n! \left(\frac{\langle I_N \rangle}{2} \right)^n \sum_{r=0}^n {}_1F_1 \left(-n+r; 1; -\frac{2I_{s1}}{\langle I_N \rangle} \right) {}_1F_1 \left(-r; 1; -\frac{2I_{s2}}{\langle I_N \rangle} \right). \quad (35)$$

从物理的角度来看, (34)式和(35)式是等价的, 因为计算结果与坐标系的选择无关. 为此, 要求下述等式成立:

$$(n+1) {}_1F_1 \left(-n; 2; -\frac{2I_s}{\langle I_N \rangle} \right) = \sum_{r=0}^n {}_1F_1 \left(-n+r; 1; -\frac{2I_{s1}}{\langle I_N \rangle} \right) {}_1F_1 \left(-r; 1; -\frac{2I_{s2}}{\langle I_N \rangle} \right), \quad (36)$$

其中 $I_s = I_{s1} + I_{s2}$. 关于等式成立的证明见附录.

当 $P = 0$ 时, “反差” c 对 r 的依赖关系参见图 1 中相应的曲线.

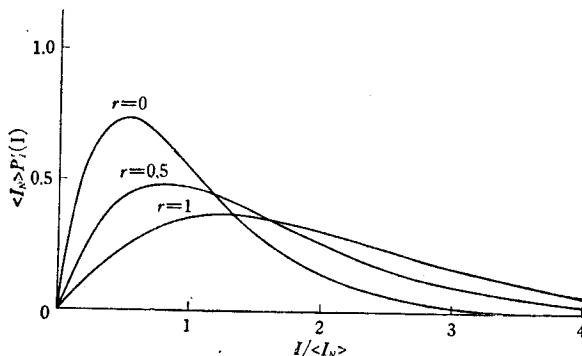


图 2 当 r 取不同数值时, $\langle I_N \rangle P'(I)$ 对 $I/\langle I_N \rangle$ 的依赖关系

四

在假定部分偏振的斑纹图样的场遵从高斯统计的条件下, 我们讨论了部分偏振的斑纹图样与恒定的均匀背景相干迭加时的统计性质, 给出了总强度的概率密度函数和 n 阶矩的表达式. 计算结果表明, 在一般情况下概率密度函数也依赖于相干背景的两个分强 I_{s1} 和 I_{s2} . 只有当斑纹图样是完全不偏振的, 概率密度函数才只依赖于相干背景的强度, 而与分强 I_{s1} 和 I_{s2} 无关. 它的物理意义是明确的.

附 录

现在来证明(36)式. 为了简洁起见, 将(36)式改写为

$$(n+1) {}_1F_1(-n; 2; -z) = \sum_{r=0}^n {}_1F_1(-n+r; 1; -z_1) {}_1F_1(-r; 1; -z_2), \quad (A1)$$

其中 $z = z_1 + z_2$, n 为正整数. 分别对 (A1) 式左边和右边用 ${}_1F_1(a; 1; z)$ 的具体表达式写成

$$(n+1) {}_1F_1(-n; 2; -z) = (n+1) \sum_{p=0}^n \frac{n!}{(n-p)! p! (p+1)!} z^p$$

$$= (n+1) \sum_{p=0}^n \sum_{r_1=0}^p \frac{n!}{(n-p)!p!(p+1)!} \cdot \frac{p!}{r_1!(p-r_1)!} z_1^{r_1} z_2^{p-r_1}, \quad (\text{A2})$$

$$\sum_{r=0}^n {}_1F_1(-n+r; 1; -z_1) {}_1F_1(-r; 1; -z_2) = \sum_{r=0}^n \sum_{r_1=0}^{n-r} \sum_{r_2=0}^r \frac{(n-r)!}{(r_1!)^2(n-r-r_1)!} \cdot \frac{r!}{(r_2!)^2(r-r_2)!} z_1^{r_1} z_2^{r_2}, \quad (\text{A3})$$

为了比较(A2)和(A3)式,对(A3)式中各项做同类项归并。为此,令 $p = r_1 + r_2$, 将(A3)式改写成

$$\begin{aligned} & \sum_{r=0}^n {}_1F_1(-n+r; 1; -z_1) {}_1F_1(-r; 1; -z_2) \\ &= \sum_{p=0}^n \sum_{r_1=0}^p \sum_{r_2=p-r_1}^{n-r_1} \frac{(n-r)!}{(r_1!)^2(n-r-r_1)!} \cdot \frac{r!}{(p-r_1)!(r-p+r_1)!} z_1^{r_1} z_2^{p-r_1}. \end{aligned} \quad (\text{A4})$$

由(A2)和(A4)式知道,要(A1)式成立,只须证明下式成立:

$$\sum_{r=p-r_1}^{n-r_1} \binom{n-r}{r_1} \binom{r}{p-r_1} = \frac{(n+1)!}{(n-p)!(p+1)!} = \binom{n+1}{p+1}, \quad (\text{A5})$$

其中 $n-p \geq 0$, $p-r_1 \geq 0$, $n-r \geq r_1$.

在普遍证明(A5)式成立前,利用下面的公式

$$\sum_{k=0}^m \binom{n+k}{n} = \binom{n+m+1}{n+1}, \quad (\text{A6})$$

可以验证 $r_1 = 0$ 和 $r_1 = p$ 时, (A5) 式成立。

下面用归纳法, 证明对满足 $r_1 \leq p$ 的任何 r_1 值都成立。假定对 $r_1 (0 < r_1 < p)$ (A5) 式成立, 证明(A5)式对 $r_1 + 1$ 也成立。为了证明的方便, 改写(A5)式为

$$\sum_{r=p-r_1}^{n-r_1} \frac{(n-r)!r!}{(n-r-r_1)!(r-p+r_1)!} = r_1!(p-r_1)! \binom{n+1}{p+1}. \quad (\text{A7})$$

把 $r_1 + 1$ 代入(A7)式左边得

$$\begin{aligned} & \sum_{r=p-r_1-1}^{n-r_1-1} \frac{(n-r)!r!}{(n-r-r_1-1)!(r-p+r_1+1)!} = (n+1) \sum_{r=p-r_1-1}^{n-r_1-1} \frac{(n-r-1)!r!}{(n-1-r-r_1)!(r-p+1+r_1)!} \\ &= \sum_{r=p-r_1-1}^{n-r_1-1} \frac{(n-r-1)!(r+1)}{(n-1-r-r_1)!(r-p+1+r_1)!} = (n+1)r_1!(p-1-r_1)! \binom{n}{p} \\ &= r_1!(p-r_1)! \binom{n+1}{p+1} = (r_1+1)!(p-r_1-1)! \binom{n+1}{p+1}. \end{aligned} \quad (\text{A8})$$

再把 $r_1 + 1$ 代入(A7)式右端取代 r_1 得

$$\text{右端} = (r_1+1)!(p-r_1-1)! \binom{n+1}{p+1}. \quad (\text{A9})$$

因此, 当(A5)式对 r_1 成立, 则当 $r_1 \rightarrow r_1 + 1$ 时也成立, 证毕。在计算(A8)式时, 我们用了公式

$$\sum_{r=p-r_1-1}^{n-r_1-1} \binom{n-r-1}{r_1} \binom{r+1}{p-r_1} = \sum_{r=p-r_1}^{n-r_1} \binom{n-r}{r_1} \binom{r}{p-r_1}. \quad (\text{A10})$$

要证明(A10)式成立, 只要对左端做变量变换 $r = r' + 1$, 代入后就可以得到右边的结果。

作者对北京大学郭敦仁同志热情的帮助表示谢意。

参 考 文 献

- [1] J. M. Burch, Optical Instruments and Technique, ed. by J. Home-Dickson (Oriel Press, Newcastle-Upon-Tyne, (1970)).
- [2] J. W. Goodman, *J. Opt. Soc. Am.*, **57**(1967), 493.
- [3] D. Vilkomerson, *J. Opt. Soc. Am.*, **61**(1971), 929.

- [4] W. H. Lee, *J. Opt. Soc. Am.*, **62**(1972), 797.
- [5] J. C. Dainty, *J. Opt. Soc. Am.*, **62**(1972), 595.
- [6] J. W. Goodman, *Laser Speckle and Related Phenomena*, ed. by J. C. Dainty (Springer-Verlag, Berlin (1975)), p. 30.
- [7] M. Born & E. Wolf, *Principle of Optics* 2nd ed. (Pergamon Press, London, (1964)), p. 24.
- [8] E. Wolf, *Nuovo Cimento*, **13**(1956), 1165.
- [9] J. Perina, *Coherence of Light*, (Van Nostrand Reinhold Company Ltd., London, (1971)), p. 81.
- [10] 见文献 [6], p. 15.
- [11] 见文献 [6], p. 30.
- [12] 见文献 [6], p. 16.
- [13] И. С. Градштейн и И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений* (Изд-во «Наука» Москва (1971)), p. 332 (3.383).
- [14] 见文献[13], p. 734 (6.643); p. 1072 (9.212); p. 1073 (9.220).
- [15] 见文献[13], p. 697 (6.561).
- [16] 见文献[13], p. 28.

THE STATISTICAL PROPERTIES OF THE SUPERPOSITION OF A SPECKLE PATTERN AND A COHERENT BACKGROUND

ZHAN DA-SAN

(*Institute of Physics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

In this article we consider the statistical properties of the superposition of a partially polarized speckle pattern and a coherent background in an arbitrary polarization state.