

非均匀铁磁体自发磁化的平均场理论*

蒲富恪 王鼎盛

(中国科学院物理研究所)

提 要

从描写非均匀铁磁体的平均场近似的非线性微分方程出发,本文用分支点理论处理相变现象.指出:(1)系统的居里点由线性化方程的最大本征值决定;(2)略低于居里点时系统磁化的空间分布可用相应的本征函数描写;(3)磁化的温度关系由参数 $a(T) \sim (1 - T/T_c)^{1/4}$ 表示.本文最后用薄膜和一个简单的模型为例指出方法的利用.

研究有交换作用的自旋系统的热力学性质时,平均场近似是一种常用的方法,因它只用简单的数学工具,而又还能反映系统相互作用的一些特征^[1].不过以往大多局限于讨论均匀的系统.近来,由于实验与应用的不断发展,涉及了许多非均匀的材料,很有必要讨论它们的性质.

对均匀的自旋系统,自旋 $\bar{S}$ 在平衡态时的统计平均值 $\langle \bar{S} \rangle$ 是均匀的,可以用它作为描写系统磁化的参数.然而对非均匀系统 $\langle \bar{S} \rangle$ 是与位置有关的,必须考虑选择什么参数来描写系统的磁化.

非均匀系统可以按对非均匀性的描写方式分成这样两种.一类是系统的非均匀性可以用某些物理量的空间变化明显地表达出来.例如表面问题,非均匀性反映在自旋的空间分布上.又如由亚稳分解 (spinodal decomposition) 形成的调幅结构相,它的组分浓度和原子间距等物理量随空间位置近乎周期地变化^[2],因而原子间的相互作用也应呈周期性变化.讨论这种材料的磁性时,可以用相互作用呈周期性变化的模型来描写它的非均匀性.

另一类材料的非均匀性质很难用上述方式描写,例如非晶态 (amorphous) 材料,它的原子排列带有随机性.这类材料的非均匀性只能给予统计描写.

本文的方法只适用于前一类材料.前两节给出方法的普遍论述.后两节是说明应用的两个例子.

一、基 本 方 程

由自旋为 $\bar{S}$, 因而磁矩为 $g\beta\bar{S}$ 的自旋 (g ——Lande 因子, β ——玻尔磁子) 构成的系统,考虑了交换作用后能量为

$$\mathcal{H} = -2 \sum_{i,j}' J_{ij} \bar{S}_i \cdot \bar{S}_j - g\beta \sum_i \bar{S}_i \cdot \bar{H}, \quad (1)$$

* 1977年8月15日收到.

其中 J_{ij} 是自旋 i, j 间交换作用常数, Σ' 表示只对 $i \neq j$ 求和, $\bar{H}$ 是外场.

平均场近似下, 考虑 $\bar{S}_i$ 的状态和的时候, 用平均值 $\langle \bar{S}_i \rangle$ 代替 $\bar{S}_i$, 容易求得自由能

$$F = -kT \sum_i \left\{ \ln \sinh \left[\left(1 + \frac{1}{2S} \right) \left(\frac{g\beta S}{kT} H + \frac{2S}{kT} \sum_i' J_{ij} \langle S_j^z \rangle \right) \right] \right. \\ \left. - \ln \sinh \left[\frac{1}{2S} \left(\frac{g\beta S}{kT} H + \frac{2S}{kT} \sum_i' J_{ij} \langle S_j^z \rangle \right) \right] \right\} \quad (2)$$

$$\text{和} \quad \langle S_i^z \rangle = SB_s \left(\frac{g\beta S}{kT} H + \frac{2S}{kT} \sum_i' J_{ij} \langle S_j^z \rangle \right), \quad (3)$$

其中 k 是玻耳兹曼常数, T 是温度, z 表示外场 $\bar{H}$ 的方向, $B_s(x)$ 是布里渊函数, 定义为

$$B_s(x) = \left(1 + \frac{1}{2S} \right) \coth \left(1 + \frac{1}{2S} \right) x - \frac{1}{2S} \coth \frac{1}{2S} x. \quad (4)$$

用约化值 $\eta = \langle S^z \rangle / S$ 表示磁化, 并用布里渊函数的逆函数 B_s^{-1} 表示, 方程 (3) 改写成

$$\sum_i' J_{ij} \eta_i - \frac{kT}{2S^2} B_s^{-1}(\eta_i) = -\frac{g\beta}{2S} H. \quad (5)$$

这个非线性方程组曾经被一些作者^[3,4]用来讨论非均匀系统的自发磁化. 然而这样作即使对很简单的问题, 如厚度不超过 20—30 原子层的薄膜也只能靠数值计算获得一些结果, 很难应用到更复杂的情况. 我们的作法是把方程 (5) 化成微分方程, 这样便于用有关的数学理论作较深入的讨论.

假定 η 的变化不太快, 即磁化的空间变化的“波长”远大于交换相互作用的距离 (对短程的交换作用, 这个距离大约等于自旋间距). 这时邻近 i 的自旋的磁化可以用展开式

$$\eta_i = \eta_i + \sum_{\mu} y_{\mu} \frac{d}{dx_{\mu}} \eta_i + \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu} y_{\mu} y_{\nu} \frac{d}{dx_{\mu}} \frac{d}{dx_{\nu}} \eta_i + \cdots \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3)$$

代替. 这里, x_{μ} 是空间坐标, y_{μ} 是 i, j 自旋间距的分量, 因而 (5) 式左端的求和可以展开

$$\sum_i' J_{ij} \eta_i = \eta_i \sum_i' J_{ij} + \sum_{\mu} \left(\sum_i' J_{ij} y_{\mu} \right) \frac{d}{dx_{\mu}} \eta_i \\ + \sum_{\mu, \nu} \left(\frac{1}{2} \sum_i' J_{ij} y_{\mu} y_{\nu} \right) \frac{d}{dx_{\mu}} \frac{d}{dx_{\nu}} \eta_i + \cdots. \quad (6)$$

过渡到连续分布时, 用 $\bar{x}$ 表示 i 坐标, 用 $\bar{y}$ 表示 i, j 距离, $f(\bar{y}, \bar{x})$ 表示与 $\bar{x}$ 位置相距 $\bar{y}$ 处的自旋密度, 因而

$$\sum_i' J_{ij} = \int d\bar{y} J(\bar{y}) f(\bar{y}, \bar{x}) = J_0(\bar{x}), \\ \sum_i' J_{ij} y_{\mu} = \int d\bar{y} J(\bar{y}) y_{\mu} f(\bar{y}, \bar{x}) = J_{1\mu}(\bar{x}), \quad (7)$$

$$\frac{1}{2} \sum_i' J_{ij} y_{\mu} y_{\nu} = \frac{1}{2} \int d\bar{y} J(\bar{y}) y_{\mu} y_{\nu} f(\bar{y}, \bar{x}) = J_{2\mu\nu}(\bar{x}).$$

把展开 (6) 式代入 (5) 式, 准确到二次微商项, 得到关于磁化分布的二次微分方程

$$\sum_{\mu, \nu} J_{2\mu\nu}(\bar{x}) \frac{d}{dx_{\mu}} \frac{d}{dx_{\nu}} \eta(\bar{x}) + \sum_{\mu} J_{1\mu}(\bar{x}) \frac{d}{dx_{\mu}} \eta(\bar{x}) \\ + J_0(\bar{x}) \eta(\bar{x}) - \frac{kT}{2S^2} B_s^{-1}(\eta(\bar{x})) = -\frac{g\beta}{2S} H. \quad (8)$$

(8) 式是我们讨论非均匀系统磁化的基本方程. 其中的函数 J_0, J_1, J_2 只与系统的结构和相互作用有关. 不难证明, 方程 (8) 的微分算符是线性自伴的. 非线性部分只出现在 $B_s^{-1}(\eta)$ 项. 这个非线性微分方程, 一般情况下不易求解, 但它可以作为一个出发点, 在处理特定问题时再针对具体情况加以简化.

如上所述, 由方程组 (5) 到微分方程 (8) 是有条件的, 就是要求 $\eta(\bar{x})$ 的空间变化不太快. 这个条件当结构与相互作用改变不太快时自然容易满足. 此外即使结构或相互作用变化甚快, 例如表面, 这个条件往往也可以满足. 因为我们讨论的只是对平均来说是铁磁相互作用的非均匀偏离, 交换作用本身使磁化倾向于均匀分布, 因而磁化的变化比结构或相互作用的变化慢得多. 因此用微分方程讨论的问题仍然可以是相当广泛的.

二、非线性微分方程的分支理论的应用

自发磁化是这样一个现象: 当温度高于临界温度(居里点)时, 系统处于顺磁状态; 当温度低于居里点时, 系统处于磁有序状态, 这时即使不加外场, 系统也有不等于零的磁化分布. 而且因为居里点的相变是二类相变, 当温度升高接近居里点时, 磁化是连续地趋于消失的.

从磁化分布的微分方程 (8) 不难看出(显然 $B_s^{-1}(0) = 0$), 当 $H = 0$ 时分布

$$\eta(\bar{x}) = \eta^0(\bar{x}) \equiv 0 \quad (9)$$

的确是一个解, 这个解相应于顺磁态. 现在的问题是可否存在一个临界温度 T_c , 使得当 $T < T_c$ 时方程 (8) 存在一个不恒等于零的解 $\eta_T(\bar{x})$, 但它应该满足

$$\lim_{T \rightarrow T_c} \eta_T(\bar{x}) = \eta^0(\bar{x}) \equiv 0. \quad (10)$$

用数学的语言讲, T_c 是方程 (8) 的最大的分支点, $\eta_T(\bar{x})$ 是 $\eta^0(\bar{x})$ 在 $T = T_c$ 处的一个分支解.

关于非线性微分方程的分支理论, 如分支点的存在, 分支点近旁分支解的行为等有严格的数学理论^[5]. 本文只用容易理解(但不严格)的语言说明需用的结论.

讨论自发磁化时, 外场为零, (8) 式变成齐次方程, 可略写为

$$L\eta(\bar{x}) + f(\eta(\bar{x}), \bar{x}, T) = 0, \quad (11)$$

其中 L 是线性自伴算符

$$L = \sum_{\mu, \nu} J_{2\mu\nu}(\bar{x}) \frac{d}{dx_\mu} \frac{d}{dx_\nu} + \sum_{\mu} J_{1\mu}(\bar{x}) \frac{d}{dx_\mu}, \quad (12)$$

f 是一个非线性函数

$$f(\eta(\bar{x}), \bar{x}, T) = J_0(\bar{x})\eta(\bar{x}) - \frac{kT}{2S^2} B_s^{-1}(\eta(\bar{x})). \quad (13)$$

既然 $\eta_T(\bar{x})$ 满足条件 (10) 式, 可以把它写作

$$\eta_T(\bar{x}) = a(T)v(\bar{x}, T), \quad (14)$$

而 $a(T), v(\bar{x}, T)$ 分别满足

$$\lim_{T \rightarrow T_c} a(T) = 0, \quad \lim_{T \rightarrow T_c} v(\bar{x}, T) \neq 0. \quad (15)$$

因为 $\eta_T(\bar{x})$ 是 (11) 式的解, 把 (14) 式代入 (11) 式, 对 η 展开, 保留 $a(T)$ 的一次项

(因在居里点近旁 $a(T)$ 很小), 得到线性化的微分方程

$$Lv(\bar{x}, T) + f_\eta(0, \bar{x}, T)v(\bar{x}, T) = 0, \quad (16)$$

其中 f_η 表示对 η 的偏微商. 显然只对线性微分方程 (16) 的本征值才有非零解存在(条件 (15) 式). 因而居里点 T_c 应该是 (16) 式的最大本征值. 如果用 $v(\bar{x}, T_c)$ 表示相应的本征解, 则有

$$Lv(\bar{x}, T_c) + f_\eta(0, \bar{x}, T_c)v(\bar{x}, T_c) = 0. \quad (17)$$

为了求 $v(\bar{x}, T)$, 可以在 T_c 附近对 T 展开,

$$v(\bar{x}, T) = v(\bar{x}, T_c) + (T - T_c)v_T(\bar{x}, T_c) + \dots,$$

于是得

$$\eta_T(\bar{x}) = a(T)[v(\bar{x}, T_c) + (T - T_c)v_T(\bar{x}, T_c) + \dots]. \quad (18)$$

把此式代入 (11) 式, 并对 $\eta \approx 0$ 和 $T \approx T_c$ 展开, 得

$$\begin{aligned} L\eta_T(\bar{x}) + [f_\eta(0, \bar{x}, T_c) + (T - T_c)f_{\eta T}(0, \bar{x}, T_c) + \dots]\eta_T(\bar{x}) \\ + \frac{1}{6} [f_{\eta\eta\eta}(0, \bar{x}, T_c) + \dots]\eta_T^3(\bar{x}) + \dots = 0. \end{aligned}$$

因 f 是 (13) 式定义的函数, 故展开式中没有 $\eta_T(\bar{x})$ 的平方项. 把 (18) 式代入此式后, $a(T)$ 的一次项因 $v(\bar{x}, T_c)$ 满足 (17) 式而消去, 保留最低次的项是 $a(T)(T - T_c)$ 和 $a^3(T)$, 得

$$\begin{aligned} Lv_T(\bar{x}, T_c) + f_\eta(0, \bar{x}, T_c)v_T(\bar{x}, T_c) \\ = - \left[f_{\eta T}(0, \bar{x}, T_c)v(\bar{x}, T_c) + \frac{1}{6} f_{\eta\eta\eta}(0, \bar{x}, T_c) \frac{a^2(T)}{T - T_c} v^3(\bar{x}, T_c) \right]. \end{aligned}$$

这是一个关于 $v_T(\bar{x}, T_c)$ 的非齐次线性微分方程, 由于 L 自伴, 因此只当非齐次项与齐次方程的解正交时才有解. 于是有

$$\int d\bar{x} \left[f_{\eta T}(0, \bar{x}, T_c)v(\bar{x}, T_c) + \frac{1}{6} f_{\eta\eta\eta}(0, \bar{x}, T_c) \frac{a^2(T)}{T - T_c} v^3(\bar{x}, T_c) \right] v(\bar{x}, T_c) = 0,$$

由此可得

$$a(T) = \pm (T_c - T)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{6 \int d\bar{x} f_{\eta T}(0, \bar{x}, T_c) v^2(\bar{x}, T_c)}{\int d\bar{x} f_{\eta\eta\eta}(0, \bar{x}, T_c) v^4(\bar{x}, T_c)} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

把它代回 (18) 式, 可以得到居里点近旁的磁化及其温度关系为

$$\eta_T(\bar{x}) = \pm A \left(1 - \frac{T}{T_c} \right)^{\frac{1}{2}} v(\bar{x}, T_c) \left[\frac{\int d\bar{x} v^2(\bar{x}, T_c)}{\int d\bar{x} v^4(\bar{x}, T_c)} \right]^{\frac{1}{2}} + \dots, \quad (19)$$

其中 A 是一个常数, 由 (13) 式定义的 f 求出 $f_{\eta T}$ 和 $f_{\eta\eta\eta}$ 后可得

$$A = \left[\frac{5}{3} \frac{(S+1)^2}{S(S+1) + 1/2} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

(19) 式中略去了相当于 $(1 - T/T_c)^{\frac{3}{2}}$ 的高次项.

总结以上结果, 可以归纳为如下结论: 1) 由基本微分方程 (8) 描写的非均匀系统, 其居里点是线性化(对 $\eta \approx 0$) 的齐次方程 (16) 的最大本征值 T_c ; 2) 在居里点近旁, 磁化的空间分布由相应的本征函数 $v(\bar{x}, T_c)$ 决定; 3) 磁化随温度改变, $a(T)$ 可以看作描

写磁化程度的有序参数, 在居里点近旁 $a(T) \sim (1 - T/T_c)^{\frac{1}{2}}$.

三、薄 膜

薄膜是最简单的非均匀系统之一, 可以认为其内部的结构与相互作用是均匀的, 非均匀性只存在于上下两个表面. 关于薄膜的自发磁化已有不少工作^[3], 我们以它为例阐明分支点理论方法的应用, 以便使本文的结果可与前人的工作有所比较.

设自旋按简单立方排列, 间距为 a . 薄膜表面方向 x 与主晶轴平行, 膜厚 $2d$ ($-d \leq x \leq d$). 设自旋间只有近邻交换作用, 交换常数 $J > 0$. 根据 (7) 式, 对于内部自旋容易得到

$$J_0(\bar{x}) = 6J, \quad J_{1\mu}(\bar{x}) = 0, \quad J_{2\mu\nu}(\bar{x}) = a^2 J \delta_{\mu\nu}.$$

因为非均匀性是由表面引起的, 因此磁化分布只与距表面的距离有关, 即 $\eta(\bar{x}) = \eta(x)$, 故内部自旋满足的方程是

$$a^2 J \frac{d^2}{dx^2} \eta(x) + 6J\eta(x) - \frac{kT}{2S^2} B_S^{-1}(\eta(x)) = -\frac{g\beta}{2S} H. \quad (20)$$

表面自旋与内部不同, 设表面自旋与内部自旋的交换作用仍为 J , 表面自旋之间的交换作用为 J' , 则对表面自旋

$$J_0(\pm d) = J + 4J', \quad J_{1x}(\pm d) = \mp aJ, \quad J_{2xx}(\pm d) = \frac{1}{2} a^2 J.$$

因此表面自旋满足的方程是

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} a^2 J \frac{d^2}{dx^2} \eta(\pm d) \mp aJ \frac{d}{dx} \eta(\pm d) + (J + 4J')\eta(\pm d) \\ - \frac{kT}{2S^2} B_S^{-1}(\eta(\pm d)) = -\frac{g\beta}{2S} H. \end{aligned}$$

这个方程可以用另外的办法代替, 即认为表面自旋同样满足方程 (20) 与边条件

$$\frac{1}{2} a^2 J \frac{d^2}{dx^2} \eta(\pm d) \pm aJ \frac{d}{dx} \eta(\pm d) + [J + 4(J - J')]\eta(\pm d) = 0. \quad (21)$$

略去边条件的二次微商项, 归并一下系数, 最后把薄膜问题归结为如下的边值问题, 即方程为

$$\frac{d^2}{dx^2} \eta + \frac{6}{a^2} \left(\eta - \frac{kT}{12S^2 J} B_S^{-1}(\eta) \right) = \frac{g\beta}{2Sa^2 J} H, \quad (22)$$

边条件为

$$\frac{d}{dx} \eta(d) + q\eta(d) = 0, \quad \frac{d}{dx} \eta(-d) - q\eta(-d) = 0, \quad (23)$$

其中系数

$$q = [1 + 4(J - J')/J]/a.$$

(1) 居里点 如上节所述, 居里点是由基本方程线性化后的齐次方程的最大本征值. 方程 (22) 线性化后, 取 $H = 0$ 时变成

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \lambda \right) \eta(x) = 0,$$

其中 $\lambda = 6(1 - T/T_B)/a^2$, $T_B = 4S(S + 1)J/k$.

不难求出边条件 (23) 式下的本征值是

$$\operatorname{tg} \sqrt{\lambda} d = q/\sqrt{\lambda} \quad \text{或} \quad \operatorname{tg} \sqrt{\lambda} d = -\sqrt{\lambda}/q$$

的解. T_c 相应最小的 λ_c 应是前一式的最小的根. 容易证明: 当 $q > 0$ 时, $\lambda_c > 0$; 而当 $q < 0$ 时, $\lambda_c < 0$; 且当 $d \rightarrow \infty$ 时, $\lambda_c = 0$. 这相当于当 $q > 0$ 时, $T_c < T_B$; 而当 $q < 0$ 时, $T_c > T_B$; 当 $d \rightarrow \infty$ 时, $T_c = T_B$.

对两种极限情况, 当膜很薄以至 $qd \ll 1$, 且 $q > 0$ 时,

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda_c} d &= \sqrt{qd} \left(1 - \frac{1}{6} qd + \cdots \right), \\ T_c &= T_B \left[1 - \frac{1}{6} a^2 q/d \left(1 - \frac{1}{3} qd + \cdots \right) \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

而当膜很厚以至 $qd \gg 1$, 且 $q > 0$ 时,

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda_c} d &= \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{qd} + \cdots \right), \\ T_c &= T_B \left[1 - \frac{\pi^2}{24} \left(\frac{a}{d} \right)^2 \left(1 - \frac{2}{qd} + \cdots \right) \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

(2) 磁化分布 居里点近旁的磁化分布由相应最大本征值的本征函数决定, 它是常数 $\cdot \cos \sqrt{\lambda_c} x$.

因此, 按 (19) 式得磁化分布

$$\eta_T(x) = \pm A(1 - T/T_c)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\int dx \cos^2 \sqrt{\lambda_c} x}{\int dx \cos^4 \sqrt{\lambda_c} x} \right]^{\frac{1}{2}} \cos \sqrt{\lambda_c} x, \quad (26)$$

其中积分区间为 $[-d, d]$, 当 $\lambda_c < 0$ 时余弦函数变成相应的双曲余弦.

(3) 磁化率 当 H 很小, $T > T_c$ 时, 可令 $\eta(x) = \chi(x)H$. 代入方程 (22) 取 H 的一次项, 得 $\chi(x)$ 满足的方程与边条件为

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \chi(x) + \lambda \chi(x) &= -\frac{g\beta}{2SJ a^2}, \\ \frac{d}{dx} \chi(d) + q\chi(d) &= 0, \quad \frac{d}{dx} \chi(d) - q\chi(d) = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

由此得磁化率

$$\chi(x) = -\frac{g\beta}{2SJ a^2 \lambda} \left[1 + \frac{q \cos \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} d - q \cos \sqrt{\lambda} d} \right],$$

平均磁化率

$$\chi = \frac{1}{2d} \int_{-d}^d \chi(x) dx = -\frac{g\beta}{2SJ a^2} \frac{1}{\lambda} \left[1 + \frac{q/\sqrt{\lambda}}{d\sqrt{\lambda}} \left/ \left(1 - \frac{q}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{tg} \sqrt{\lambda} d \right) \right. \right]. \quad (28)$$

当 $T \rightarrow T_c$ 时, $\lambda \rightarrow \lambda_c$, $\chi \sim (T - T_c)^{-1} \rightarrow \infty$.

当 $T < T_c$ 时, 磁化率方程是一个马丢方程, 解比较复杂.

以上的结果中关于居里点与厚度的关系, 大致与以前的结果^[3]一致. 不过这里用微分方程时比用代数方程组 (5) 简单得多. Mills 曾经用方程 (22) 讨论过表面磁化. Каганов 和 Омелянчук 从唯象描写出发, 同样得到描写薄膜磁化的方程^[6]. 本文的讨论使用了更

系统的方法,包含了一些新的结果.

四、余弦模型^[7]

对于体系内部自旋之间的相互作用不均匀的系统的某些特点,我们近似地用一个假想的模型来讨论,它用以下基本方程作为出发点,

$$J_2 \frac{d^2}{dx^2} \eta(x) + \left(J - J' \cos \frac{2\pi}{L} x \right) \eta(x) - \frac{kT}{2S^2} B_S^{-1}(\eta(x)) = -\frac{g\beta}{2S} H. \quad (29)$$

即用一个周期性的余弦变化 $J' \cos \frac{2\pi}{L} x$ 来描写交换作用的空间变化, J' 是变化的大小, L 是变化的波长. 这个模型对一些特殊的情况可能是很好的描写. 例如调幅结构相中原子间距的余弦变化可能导致交换作用的余弦变化. 对一般的情况,可能提供一些参考.

(1) 居里点 (29) 式的线性化齐次方程为

$$\frac{d^2}{dz^2} \eta(z) + (\lambda - 2q \cos 2z) \eta(z) = 0, \quad (30)$$

其中 $z = 2\pi x/L$, $\lambda = (L/2\pi)^2 (J/J_2) (1 - T/T_0)$, $T_0 = 2S(S+1)J/3k$, $q = (L/2\pi)^2 (J'/J_2)/2$. 此式为马丢方程, T 最大的本征值 T_c 相应于 λ 最小的本征值且与 q 有关. 在极限情况下^[8],

$$\lambda_c = \begin{cases} -\frac{1}{2} q^2 + \frac{7}{128} q^4 + \dots & q \ll 1; \\ -2q + 2\sqrt{q} + \dots & q \gg 1, \end{cases}$$

因此

$$T_c = \begin{cases} T_0 \left(1 + \frac{1}{4} \left(\frac{L}{2\pi} \right)^2 \frac{J'}{J_2 J} + \dots \right) & \left(\frac{L}{2\pi} \right)^2 \frac{J'}{2J_2} \ll 1; \\ T_0 \left(1 + \frac{J'}{J} + \dots \right) & \left(\frac{L}{2\pi} \right)^2 \frac{J'}{2J_2} \gg 1. \end{cases}$$

这表明交换作用有变化时,居里点较由平均交换作用常数决定的值 (T_0) 有所提高. 这是很自然的. 因为自发磁化开始出现主要是由那些交换作用偏大的区域决定.

$$\left(\frac{L}{2\pi} \right)^2 \left(\frac{J'}{2J_2} \right) \gg 1$$

意味着 L 很大或者 J' 很大, 这时交换作用偏小的部分对偏大的部分的影响减小 (或者由于距离太远, 或者由于强度差得太多), 自发磁化的出现完全由交换作用最大的区域 (交换常数为 $J + J'$) 决定, 因而 $T_c \approx T_0(1 + J'/J)$. 当 $\left(\frac{L}{2\pi} \right)^2 \left(\frac{J'}{2J_2} \right) \ll 1$ 时, 由于交换作用弱的部分的影响, 居里点虽然比平均交换作用决定的高, 但又比最大的交换作用决定的低.

(2) 磁化分布 方程 (29) 相应 T_c 的本征函数是零阶马丢函数 $Ce_0\left(\frac{\pi}{L} x\right)$, 它描写了 $T \lesssim T_c$ 时磁化强度的空间分布:

$$\eta_T(x) = \pm A \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\int_0^L C e_0^2 \left(\frac{\pi}{L} x\right) dx}{\int_0^L C e_0^4 \left(\frac{\pi}{L} x\right) dx} \right]^{\frac{1}{2}} C e_0 \left(\frac{\pi}{L} x\right),$$

平均磁化强度

$$\eta_T = \frac{1}{L} \int_0^L \eta_T(x) dx$$

$$= \begin{cases} \pm A \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{\frac{1}{2}} \left[1 - \frac{5}{32} \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{J'}{2J_2}\right) + \dots \right] & \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{J'}{2J_2}\right) \ll 1; \\ \pm A \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{1}{2}} \pi^{-\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{J'}{2J_2}\right) \right]^{-\frac{1}{4}} & \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{J'}{2J_2}\right) \gg 1. \end{cases}$$

可见,非均匀性显著时居里点虽然升高较多,但因开始出现自发磁化时磁化的区域较小,所以平均磁化强度减小。

参 考 文 献

- [1] 郭貽诚, 铁磁学, 高等教育出版社, 1965, p. 54.
J. S. Smart, *Effective Field Theories of Magnetism* (1966).
- [2] J. E. Hilliard, "Spinodal Decomposition", 收于 "Phase Transformation" (ASM 论文集, 1968), p. 497.
- [3] A. Corciovei 等, "Ferromagnetic Thin Films", 收于 "Solid State Physics", H. Ehrenreich 等编 Vol. 27 (1972).
- [4] T. Wolfram 等, *Surface Sci.*, 28(1971), 45.
- [5] J. B. Keller, S. Antman, *Bifurcation Theory and Nonlinear Eigenvalue Problems* (1969).
- [6] D. L. Mills, *Phys. Rev.*, B3 (1971), 3887.
М. И. Казанов, А. Н. Омелянчук, *ЖЭТФ*, 61 (1971), 1678.
- [7] 王鼎盛、蒲富恪, 物理学报, 25 (1976), 340.
- [8] 王竹溪、郭敦仁, 特殊函数概论 (1965).

THE MEAN FIELD THEORY FOR SPONTANEOUS MAGNETIZATION OF A NON-UNIFORM FERROMAGNET

PU FU-CHO

WANG DING-SHENG

(Institute of Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT

Starting from the nonlinear differential equation for a non-uniform ferromagnet in mean field approximation, we apply the bifurcation theory to discuss the phenomena of magnetic phase transition. It is shown that (1) the Curie point of the system is determined by the maximum eigenvalue of linearized equation; (2) the space variation of magnetization just below the Curie point is described by the corresponding eigenfunction; (3) the temperature dependence of magnetization is represented by the parameter $a(T) \sim (1 - T/T_c)^{1/2}$. In the later parts of our paper, the application of this method is illustrated by examples of thin films and a simple model proposed for describing non-uniform ferromagnet.