

关于无限薄平板中圆孔的线性声阻*

赵 松 龄 卢 元 伟
(同 济 大 学)

提 要

本文提出至今尚未圆满解决的无限薄平板中一个圆孔的线性声阻的理论分析方法,得到了线性声阻率的高频(或大孔径)近似式及低频(或小孔径)极限值;理论计算和实测值符合良好;最后给出了在全频率范围适用的声阻率近似公式。

一、问题的提出

如所周知,单个声学空腔共振器或穿孔板吸声结构在声学工程中有广泛应用;由于种种原因,无附加阻尼的微穿孔板吸声结构^[1]或空腔共振器^[2]也日益受到重视并得到发展。这种共振结构的声学性能和穿孔的声阻抗密切相关,精确求出穿孔的声学参数在理论上和实用上均有价值。

通常情况下,穿孔的声质量抗受粘滞性和热传导影响较小,可按理想流体近似求出。孔管内部流体质量抗易求出,而孔端面外流体运动动能所对应的等效质量抗则可折算成管内者,由此引进了末端修正长度的概念;设孔端面处声压匀布或质点速度匀布,则可求出末端修正长度分别为 $\pi a/2$ 及 $16a/3\pi$, 此处 a 表示孔半径。由于两极端情况下数值接近,通常将声质量抗末端修正长度取为 $1.7a$, 这在实用上已足够准确。

至于圆孔的声阻,圆柱管内部分可由有效密度较严格的理论^[3]导出,但孔端面以外损耗所致的末端声阻至今未在理论上获得圆满解决。当孔直径与板厚相比较具有同一数量级甚至更大,则末端声阻对总声阻贡献甚大,其理论计算值得研究。

对高频(或大孔径)情况,Ingard^[4] 根据同一孔径不同板厚穿孔板的驻波管声阻测量数据归纳出总声阻率(两端声压差与孔中平均速度之比的实数部分)经验公式如下:

$$r_t = \frac{1}{a} \sqrt{2\eta\omega\rho_0} (l + 2a), \quad (1)$$

式中 ω 为圆频率, ρ_0 , η 分别表示流体介质的密度和动力粘滞系数, l 为板厚(即孔管长度)。该式第一项指孔管内声阻率的高频(或大孔径)渐近值^[3], 第二项则为末端声阻,可以看出,末端修正长度等于孔直径 $2a$ 。

对于末端声阻的经验值, Ingard^[4] 曾应用声粘性边界层方法作过解释。设孔端面质点振速匀布,可得两末端的总声阻率为

$$r_e = \sqrt{2\eta\omega\rho_0}. \quad (2)$$

* 1977 年 10 月 14 日收到。

与(1)式对比可知,仅为经验值的一半;若设孔端面声压匀布,则可运用无限薄板中圆孔的理想流体绕流速度场作基础,但边界层方法给出了 $r_e = \infty$ 的发散结果,于是 Ingard 便认为实际情况应介于速度匀布与声压匀布之间,而经验规律给出的常数 2 正好介于两种极端情况的数值之间. 发散结果显然不合理. 因为当板厚趋于零,粘性边界层的厚度取代板厚起作用. 后来, Morse 及 Ingard^[5] 按这个想法避免了发散困难,但其理论方法较牵强,虽然也粗略地给出了对数关系,但所得到的在甚高频(或大孔径)情况下适用的理论计算值和实验结果相差很大. 这些情况表明,一般的声粘性边界层方法¹⁾不能给出满意的结论.

本文目的是以孔端面处声压匀布假定为基础,用严格的理论方法计算有限厚穿孔板的声阻末端修正值,由此也得出了与实验相近的结果. 事实上,由于流体在孔边缘的绕流,孔端面处声压匀布的假定比振速匀布更接近真实情况. 由于取声压匀布假定时,有限厚穿孔板声阻的末端修正值相当于无限薄穿孔板的总声阻,所以问题归结为研究无限薄平板中圆孔的线性声阻.

值得指出,较高声强下非线性效应可能使穿孔板声阻大幅度增加,由于介质流动引起的动量输运及湍流影响均能使声阻变大,在设计及应用穿孔板吸声结构时应予注意,对此本文暂不讨论.

二、基本关系

对所研究问题作如下简化:(1)由于孔附近质点速度比其它区域大很多,与速度平方成正比的粘性能耗散占主要地位,热传导影响可予忽略;(2)声强足够低,不计非线性效应;(3)孔径远小于声波波长,推导声阻抗时可将流体视为不可压缩.

线性化的 Navier-Stokes 方程及连续性方程为

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} &= -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{V} + \frac{\eta}{3} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}), \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{V} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

由于所考虑的质点速度矢量 $\mathbf{V}$ 在全空间有限、连续,在无限远处趋于零,恒可引入标势 φ 及矢势 $\mathbf{A}$ 将 $\mathbf{V}$ 表成^[6]

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}^p + \mathbf{V}^s, \quad \mathbf{V}^p = -\nabla \varphi, \quad \mathbf{V}^s = \nabla \times \mathbf{A}; \quad (\nabla \cdot \mathbf{A} = 0) \quad (4)$$

式中 $\mathbf{V}^p$ 指速度的无旋部分, $\mathbf{V}^s$ 则指有旋部分;在不可压缩近似下方程(3)简化成

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} &= -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{V}, \\ \nabla \cdot \mathbf{V} &= 0. \end{aligned} \quad (3')$$

以(4)式代入(3')式,便可得到声压表达式

$$p = \rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = j\omega \rho_0 \varphi \quad (5)$$

1) 必须注意,边界层方法仅适用于高频(或大孔径)情况.

以及

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= 0, \\ \Delta\mathbf{V}^s + \beta^2\mathbf{V}^s &= 0.\end{aligned}\quad (6)$$

这里已引入时间因子 $\exp(j\omega t)$; 方程中的 β^2 为

$$\beta^2 = \frac{-j\omega\rho_0}{\eta} = \left(\frac{1-j}{\delta}\right)^2, \quad (7)$$

其中 δ 表示声粘性边界层厚度:

$$\delta = \sqrt{\frac{2\eta}{\omega\rho_0}}. \quad (8)$$

对于常温条件下的空气介质, 当声频为 1000 赫, δ 约等于 0.007 厘米, 对于水介质运动粘滞系数 η/ρ_0 与空气接近, δ 值相差也不大.

问题显然具有圆柱对称性, 将坐标原点置于圆孔平面中心, z 轴垂直于薄板表面, 在圆柱坐标下 $\mathbf{V}$ 的极角 θ 方向分量应为零, 亦即 $V_\theta^s = V_\theta^s = 0$, 直角坐标下 $\mathbf{V}^s$ 的 x, y 分量与圆柱坐标下 r, θ 分量的关系就简化成

$$V_x^s = V_r^s \cos\theta, \quad V_y^s = V_r^s \sin\theta.$$

如将 $\mathbf{V}^s$ 所满足的(6)式写成

$$\Delta V_x^s + \beta^2 V_x^s = 0, \quad \Delta V_y^s + \beta^2 V_y^s = 0, \quad \Delta V_z^s + \beta^2 V_z^s = 0.$$

拉普拉斯算符采用圆柱坐标表式

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

由于 V_r^s, V_z^s 等皆与 θ 无关, 故可得 V_r^s 及 V_z^s 所满足的方程

$$(\Delta_1 + \beta^2)V_r^s = 0, \quad (\Delta + \beta^2)V_z^s = 0, \quad (9)$$

其中算符 Δ_1 指 Δ 中以 -1 代替 $\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ 后的结果:

$$\Delta_1 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

在所述对称性要求下, $\mathbf{A}$ 的 r, z 分量必为零, 其 θ 方向分量 ϕ 必与 θ 无关, 乃是 r, z 的函数, 且 V_r^s 及 V_z^s 可由 ϕ 函数表出如下:

$$V_r^s = -\frac{\partial\phi}{\partial z}, \quad V_z^s = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\phi). \quad (10)$$

以(10)式代入(9)式, 即得

$$\frac{\partial}{\partial z} [(\Delta_1 + \beta^2)\phi] = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r(\Delta_1 + \beta^2)\phi] = 0.$$

这就要求

$$(\Delta_1 + \beta^2)\phi = \frac{M}{r}. \quad (11)$$

此处 M 为任意常数, 由关系式(10)可知, 令 $M = 0$ 并不影响普遍性, 这样一来(11)式实质上就是

$$(\Delta_1 + \beta^2)\phi = 0. \quad (12)$$

我们的基本问题乃是求解 φ, ϕ 所满足的偏微分方程的边值问题. 边界条件则为:

在薄板表面上处处有 $\mathbf{V} = 0$, 即法向分量及切向分量同时为零. 这样的边值问题很难求解, 但我们并不要求 $\mathbf{V}$ 或 φ, ψ 本身, 只是要求声阻抗率, 理论分析上仍有可能处理.

V^P 的圆柱坐标分量与标势函数 φ 的关系显然是

$$V_r^P = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad V_\theta^P = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0, \quad V_z^P = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (13)$$

为了将偏微分方程的边值问题转化成积分方程求解问题, 我们采取汉克耳积分变换^[7], 并注意有关对称性的要求, 便可将 φ, ψ, V_r, V_z 等写成

$$\varphi = \begin{cases} \frac{p_+}{j\omega\rho_0} + \int_0^\infty f(k)J_0(kr)e^{-kz}dk & (z \geq 0); \\ \frac{p_-}{j\omega\rho_0} - \int_0^\infty f(k)J_0(kr)e^{kz}dk & (z \leq 0). \end{cases} \quad (14)$$

$$\psi = \int_0^\infty g(k)J_1(kr)e^{-k'|z|}dk. \quad (15)$$

$$V_r = \left[\frac{z}{|z|} \right] \int_0^\infty [kf(k)e^{-k'|z|} + k'g(k)e^{-k'|z|}]J_1(kr)dk. \quad (16)$$

$$V_z = \int_0^\infty [f(k)e^{-k'|z|} + g(k)e^{-k'|z|}]J_0(kr)kdk. \quad (17)$$

以上各式中 $p_\pm$ 表正负无限远处声压值, 相当于穿孔板两侧的声压, 在不可压缩流体近似下“两侧”转化为无限远. J_0 及 J_1 为贝塞耳函数, k 为实变数, $f(k)$ 及 $g(k)$ 分别为 φ 及 ψ 对应的象函数. 对各式中出现的 $k' = \sqrt{k^2 - \beta^2}$, 要求其实部恒为正, 以保证在无限远处速度为零. 为简单计, 时间因子 $\exp(j\omega t)$ 一概省略不写.

引入无量纲变量 $\rho = \frac{r}{a}$ 及 $u = ka$, 考虑到孔中声压连续(同时亦为常数), 由(14)式得

$$\int_0^\infty f(u)J_0(\rho u)du = \gamma \quad (\rho < 1), \quad (18)$$

式中 γ 正比于两侧声压差

$$\gamma = \frac{(p_- - p_+)a}{2j\omega\rho_0}. \quad (19)$$

由对称性及板面上切向速度为零的条件可知, 在 $z = 0$ 全平面上 $V_r = 0$, 由(16)式就给出象函数 $g(u)$ 与 $f(u)$ 的关系如下:

$$g(u) = -\varepsilon(u)f(u), \quad \varepsilon(u) = \frac{k}{k'} = \frac{u}{\sqrt{u^2 - \Lambda^2}}, \quad (20)$$

式中 Λ 为一复量

$$\Lambda = \beta a = \frac{(1-j)a}{\delta}, \quad |\Lambda| = \lambda = \frac{\sqrt{2}a}{\delta}. \quad (21)$$

由此可知 λ 是本问题唯一的特征参数, 无限薄穿孔板的声阻抗率必为 λ 的函数.

由(17)式令 $\rho \geq 1$ 及 $z = 0$ 的板面上 $V_z = 0$, 便有

$$\int_0^\infty f(u)J_0(\rho u)[1 - \varepsilon(u)]u du = 0 \quad (\rho \geq 1). \quad (22)$$

此外,对 V_z 在孔平面 ($\rho < 1$ 及 $z = 0$) 范围内积分后得孔中平均速度为

$$\bar{v} = \frac{2}{a^2} \int_0^\infty h(u) J_1(u) du. \quad (23)$$

上式中 $h(u) = f(u) + g(u) = f(u)[1 - \varepsilon(u)]$.

(18)及(22)式可改写成以下形式:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty h(u) J_0(\rho u) du &= \gamma - \int_0^\infty \varepsilon(u) f(u) J_0(\rho u) du & (\rho < 1); \\ \int_0^\infty h(u) J_0(\rho u) u du &= 0 & (\rho \geq 1). \end{aligned} \quad (24)$$

由对偶积分方程求解公式^[8]可导出:

$$h(u) = \frac{2\gamma}{\pi} \frac{\sin u}{u} - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \varepsilon(u') f(u') du' \int_0^1 \cos u' t \cos ut dt. \quad (25)$$

以此代入(23)式可得

$$\bar{v} = \frac{4\gamma}{\pi a^2} \left(1 - \frac{w}{\gamma}\right). \quad (26)$$

而此处 w 系指以下积分:

$$w = \int_0^\infty \varepsilon(u) f(u) \frac{\sin u}{u} du. \quad (27)$$

对某种近似 $f(u)$ 函数, (26) 式要比直接用(23)式计算精度高, 因为导出(26)式时已用过一次(18)及(22)式, 即引进过声压在孔中连续条件及板面上法向速度为零的条件.

由(19)和(26)式可写出无限薄单穿孔板声阻抗率

$$z_e = \frac{p_- - p_+}{\bar{v}} = 2j\omega\rho_0 \left(\frac{\pi a}{4}\right) \left[1 + \frac{\frac{w}{\gamma}}{1 - \frac{w}{\gamma}}\right]. \quad (28)$$

对于无粘性理想流体, $\lambda \rightarrow \infty$, $\frac{w}{\gamma} \rightarrow 0$, (28) 式便给出声压匀布假定下声抗率的末端修正值, 中括号内第二项代表粘性的影响¹⁾.

(25)式又可写成关于函数 $f(u)$ 的积分方程的形式

$$f(u) = \frac{2\gamma}{\pi} \frac{\sin u}{u} + \varepsilon(u) f(u) - \int_0^\infty G(u, u') \varepsilon(u') f(u') du', \quad (29)$$

式中 $G(u, u')$ 为关于变量 u, u' 对称的实函数

$$G(u, u') = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(u' - u)}{u' - u} + \frac{\sin(u' + u)}{u' + u} \right],$$

记

$$Ag = \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) g + \int_0^\infty G(u, u') g(u') du',$$

$$b(u) = -\frac{\sin u}{u}, \quad (Ag, g) = \int_0^\infty (Ag) g du,$$

1) 本文方法同时给出粘性对声抗的影响; 除非 λ 值很小, 该影响并不重要, 故不加讨论.

$$(b, g) = \int_0^\infty b g du,$$

则积分方程(29)式可简写为

$$Ag = \frac{2\gamma}{\pi} b(u). \quad (30)$$

由于函数 G 的对称性, 此积分方程与以下变分问题等价:

$$\delta L_1 = \delta L_2 = 0.$$

此处 L_1 及 L_2 为形式不同的两个泛函

$$L_1 = \frac{(Ag, g)}{(b, g)^2}; \quad (31a)$$

$$L_2 = \left(\frac{\pi}{2\gamma}\right)^2 \left[\left(\frac{2\gamma}{\pi}\right) 2(b, g) - (Ag, g) \right]. \quad (31b)$$

设 $g^0(u)$ 为真解, 则有

$$\frac{w}{\gamma} = \frac{2}{\pi} L_2(g^0) = \frac{2}{\pi L_1(g^0)}. \quad (32)$$

若将一个近似的 $f(u)$ 函数代入(32)式而不是直接代入(27)式求 w/γ , 则所得结果将有高级精度, 若对 $f(u)$ 或 $g(u)$ 函数选取含待定系数的试验函数, 则利用变分法求 w/γ 可以获得很高的精度.

三、低频(或小孔径)近似

当参数 λ 趋于零, (22)式中的 $\varepsilon(u)$ 可展成 Λ/u 的幂级数, 保留头二项, 则(18)和(22)式构成以下对偶积分方程:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty u \left[\frac{f(u)}{u} \right] J_0(\rho u) du &= \gamma \quad (\rho < 1), \\ \int_0^\infty \left[\frac{f(u)}{u} \right] J_0(\rho u) du &= 0 \quad (\rho \geq 1). \end{aligned} \quad (33)$$

按求解公式^[8]导得

$$f(u) = \frac{2\gamma}{\pi} \left(\frac{\sin u}{u} - \cos u \right). \quad (34)$$

由此代回(17)式, 对 ε 按同等近似处理, 求出孔中 V_z 分量为

$$V_z = \frac{j}{\delta} \int_0^\infty \frac{f(u)}{u} J_0(\rho u) du = \frac{2j\gamma}{\pi\delta} \sqrt{1-\rho^2} \quad (\rho < 1).$$

在孔平面上积分后, 可求得孔中平均速度 $\bar{v}$ 表式为

$$\bar{v} = \frac{4j\gamma}{3\pi\delta^2}.$$

当 $\delta \rightarrow \infty$, 即甚低频情形, 其极限为零, 但 z_e 为有限值

$$z_e = \frac{p_- - p_+}{\bar{v}} = \frac{3\pi\eta}{a}, \quad (35)$$

且为一纯阻, 声抗为零; 该式相当于小球在粘性流体中缓慢平动的斯托克斯阻力公式. (35)式也可通过正交曲线坐标系下偏微分方程的近似解得到, 但推导甚繁.

考虑到单位长度圆柱管的声阻率当 $\lambda \rightarrow 0$ 的极限值为 $\frac{8\eta}{a^2}$ ^[3], 与(35)式相比较后可得有限厚板声阻率末端修正长度的低频(或小孔径)极限值为

$$l_e = \frac{3\pi}{8} a = 1.178a \quad (\lambda \rightarrow 0). \quad (36)$$

以(34)式的 $f(u)$ 函数代入(31)式求 w/γ 或 z_e 的变分近似值, 当 λ 不为零但为小值, 其精度应比(35)式提高, 所得 z_e 的表式中 λ 的一阶项不存在, λ 的二阶项以 $j\lambda^2$ 的形式出现. 可以认为, 简单的变分近似已将 λ^2 项的系数定准, 又由于所涉及的是二阶偏微分方程, z_e 关于 λ 的幂展开式中只含偶次项, 所以声阻率 r_e 关于 λ 的幂展开式中除常数项 $3\pi\eta/a$ 外, 至多只含有 λ^4 以及更高阶的项, 这和圆柱管内声阻率的低频(或小管径)近似^[3]类同.

四、高频(或大孔径)近似

实用中大多遇到 $\lambda \gg 1$ 的高频(或大孔径)情形. 由积分方程(29)可以看出, 对 $\lambda \rightarrow \infty$ (理想流体), $f(u) = \frac{\sin u}{u}$; 考虑到流体对固体绕流时, 大量实验表明, 压强分布对粘性并不敏感, 所以当 λ 为大值时, 可将 $f(u)$ 函数(它描述了板平面上的压强分布)的理想流体解代入(27)式, 求出 w/γ 的粗略近似结果为

$$\frac{w}{\gamma} = \frac{c - jd}{\pi\sqrt{2}\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right) \quad (\lambda \gg 1), \quad (37)$$

式中

$$c = E + \frac{\pi}{4} + \ln 4\lambda = 2.749 + \ln \lambda,$$

$$d = E - \frac{\pi}{4} + \ln 4\lambda = 1.178 + \ln \lambda,$$

$$E = 0.5772 \cdots \text{ (欧勒常数)},$$

(37)式与声粘性边界层方法相比, 共同点在于都用理想流体解作为初级近似, 但边界层方法仅当边界面曲率半径远大于 δ 才适用, 而在无限薄穿孔板边缘情况正好相反, 所以 Ingard^[4] 得到了发散结果; 而 Morse 及 Ingard^[5] 后来的做法是将固体边界扩张到以 δ 为厚度特征尺寸的设想边界上, 在这种边界上理想流体绕无限薄穿孔板速度场给出有限速度值, 所以边界层方法能得出收敛的结果, 但这种做法只有定性或半定性的意义, 比较牵强. 将(37)式代入(28)式, 不难求出声阻率 r_e 表达式

$$r_e = Q\sqrt{2\eta\omega\rho_0} = (\sqrt{2}\lambda Q)\frac{\eta}{a}, \quad (38)$$

式中系数 Q 为

$$Q = -\text{Im} \left\{ \frac{\pi\lambda}{2\sqrt{2}} \left(\frac{\frac{w}{\gamma}}{1 - \frac{w}{\gamma}} \right) \right\}. \quad (39)$$

这里 Im 表示取虚部运算. 和(1)式对照可知, Ingard 经验公式相当于 $Q = 2$, 而将(37)式代入(39)式已可看出, 当 λ 趋于无限大, Q 趋于 $\frac{d}{4}$, 即按 $\frac{1}{4} \ln \lambda$ 的规律增长, 并非常数, 因此经验关系有很大局限性.

(37)式给出的 w/γ 值精度不够, Q 计算值和实验值有一段差距, 仅当 $\ln \lambda$ 较大时才较准确. 为此, 我们利用变分法. 泛函 L_1 与 L_2 相比, 对 $g(u)$ 可以差一个常数因子, 应用较方便. 设以理想流体解代入(31a)式并注意关系式(32), 便可得到比(37)式未用变分法的结果具有较高精度的 w/γ 值, 且其误差可通过以下方法作估计. 设 $g(u)$ 已为真解, 则由(27)式看出 $w = (b, g)$, 与(31a), (32)式对照可知, 此时因子

$$\xi = \left(\frac{2\gamma}{\pi} \right) \frac{(b, g)}{(Ag, g)}$$

必为 1, 亦即变分法已无必要对 (b, g) 作任何修正, 使其提高精度; 若 $g(u)$ 为近似解, ξ 不为 1, 变分法必对粗糙的 $w = (b, g)$ 作修正, 使它更准确. ξ 是否接近 1 便可作为 w/γ 或 r_e 精度的估计. 可以认为, 相对误差约为 $(1 - |\xi|)$ 的数量级, 也可能更小. 但以 $f(u) = \frac{\sin u}{u}$ 的近似解代入(31a)式, 得到的 ξ 因子不够令人满意, 例如取 $\lambda = 50$, $|\xi| = 0.87$.

为了进一步提高变分法的计算精度, 注意积分方程(29)的一次迭代近似解, 可以看出选用以下含待定系数 q 的试验函数较为有利:

$$f(u) = \frac{2\gamma}{\pi} \left[\frac{\sin u}{u} + qg(u) \frac{\sin u}{u} \right]. \quad (40)$$

将该式代入(31a)式, 然后求出有关积分值, 对 L_1 含 q 表式关于 q 求导, 令其导数为零 (这一步骤相当于令泛函的一阶变分为零) 定出系数 q , 将求出的 q 代回 L_1 含 q 的表式,

按(32)式得出 w/γ 的近似值. 在计算中要遇到较困难的积分, 如将 $\ln \lambda$ 视作与常数同阶, 则涉及的每个积分首项为 $1/\lambda$ 的项. 对 $\lambda > 5$, 我们近似地舍去 $o(1/\lambda^3)$ 的项, 保留到 $1/\lambda^2$ 的项; 处理积分过程运用了复平面上围道积分法.

由于运用了(40)式那样的试验函数, 计算精度有很大提高, 当 λ 分别取 5, 50 及 500, 相应的 $|\xi|$ 值为 0.91, 0.97 及 0.98, 都比较接近于 1. 诚然, 如果选用更多更“好”的坐标函数组成试验函数运用变分法进行计算, 必能获得更高的精度. 但从说明问题和实际应用的观点看, (40)式的试验函数已能给出相当准确的结果了. 为便于观察 Q 及 r_e 随 λ 变化的趋势, 并了解其具体数值, 表 1 给出变分法计算的一系列数值结果.

观察表 1 中数值可知, 在 $\lambda > 5$ 的高频 (或大孔径) 近似情况下, Q 随 λ 作缓慢变化.

表 1

λ	Q	$\frac{a}{\eta} r_e$
5	1.50	10.6
7	1.49	14.7
10	1.48	21.0
14	1.50	29.8
20	1.54	43.4
30	1.59	67.5
50	1.68	118
100	1.81	256
200	1.96	554
500	2.17	1533
1000	2.33	3300

值得注意的是, λ 为大值时, Q 基本上按对数规律递增; 但在 $\lambda = 10$ 附近出现了极小. 可以预期, λ 值若进一步减小, 准确算出的 Q 值将显著上升. 这一情况并不难理解: 由上节讨论知, 若 $\lambda \rightarrow 0$, 则 Q 必按 $\frac{3\pi}{\sqrt{2}\lambda}$ 的方式趋于无限大.

利用形式如(40)式的试验函数对泛函 L_1 求临界值(不一定是极值)比用 $f(u) = \frac{\sin u}{u}$ 直接代入(31a)式得到的 Q 值为大. 例如当 $\lambda = 50$, Q 的计算值由 1.58 提高至 1.68. 这就表明, 对 Q 而言, 当 $f(u)$ 或 $g(u)$ 为真解时它可能取极大值. 换言之, 利用泛函 L_1 的变分近似求得的 Q 值应为具有较高精度的不足近似值.

由上述变分近似所得 r_e 关于 λ 的函数表式甚繁, 但可近似表成

$$r_e = \left\{ \frac{\left(\lambda - \frac{\sqrt{2}}{\pi} \right) D}{2\sqrt{2} \left[\left(1 - \frac{C}{\pi\sqrt{2}\lambda} \right)^2 + \left(\frac{D}{\pi\sqrt{2}\lambda} \right)^2 \right]} \right\} \frac{\eta}{a} \quad (\lambda > 5), \quad (41)$$

式中 C, D 为(37)式中 c, d 加上 $\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{8-\pi} \right)$ 者, 或写成

$$\begin{aligned} C &= 3.946 + \ln \lambda; \\ D &= 2.375 + \ln \lambda. \end{aligned} \quad (42)$$

与原来变分近似计算值相比, 当 $\lambda=5$, (41)式偏高 1.6%, λ 增大则偏差迅速减小; 当 $\lambda \rightarrow \infty$, 二者完全一致, 都给出 $Q \rightarrow \frac{D}{4}$, $r_e \rightarrow \left(\frac{\lambda D}{2\sqrt{2}} \right) \frac{\eta}{a}$ 的渐近结果.

五、讨 论

我们忽略了热传导影响和非线性效应, 从不可压缩粘性流体基本方程出发, 运用汉克耳积分变换、对偶积分方程、变分法等, 获得了无限薄穿孔板板面上声压分布对应的象函数 $f(u)$ 的积分方程(29), 给出了一阶变分为零的两个泛函表达式, 为进一步深入研究无限薄板中圆孔的声阻抗率提供了理论基础. 对低频(或小孔径)情况, 得到了声阻率的极限值(35)式; 而在高频(或大孔径)情况则由变分近似计算给出(41)式, 其极限情形亦已明确. 由于 r_e 是能量耗散的一种度量, 它随频率应作单调递增变化. 但 λ 正比于 $\sqrt{\omega}$, 所以 r_e 必随参数 λ 作单调递增变化. 图 1 中给出无量纲声阻率 ar_e/η 相对于 λ (取值自 0 至 50) 变化的曲线关系.

即使对于微穿孔板吸声结构, 实用上遇

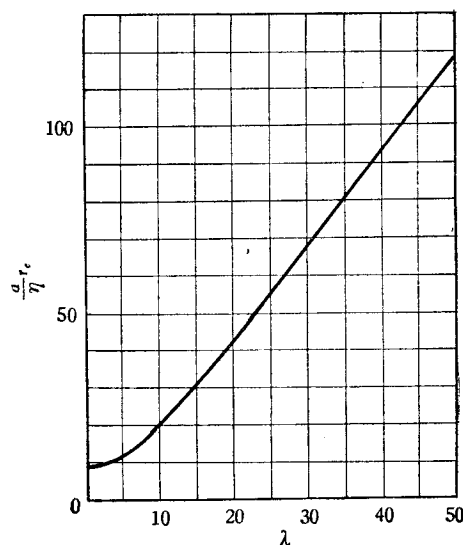


图 1

到者大多为 λ 比 1 大很多的情形。理论计算表明, (38) 式中的系数 Q 虽然随 λ 增大上升缓慢, 但并非 Ingard 经验关系所认为的常数 2。当 λ 趋于无限大, Q 值没有极限, 而接近于 $\frac{D}{4} = 0.594 + \frac{1}{4} \ln \lambda$ 。由此可知, 经验关系仅在一定条件下有效。

本文第一部分已提及, Ingard 是对实测数据用外推法求得末端声阻的经验关系的。后来 Ingard 和 Ising^[9] 又用了断面为尖锐楔形接近于“无限薄”条件的穿孔板进行测量, 还有人综合过许多实验数据^[10], 这都说明在线性范围内 Ingard 经验关系近似正确。注意到以下事实: (1) Ingard 早期实验报道^[4]中 Q 值并非常数, 它随 λ 增大而有增加趋势, 其数值也有小到 1.7 的; (2) 有关实验报道(它们证实 $Q = 2$ 大致正确)大都涉及 λ 为数十至一百的数量级范围; (3) 测量系统的附加阻尼将使声阻率测定值偏大; 再对照表 1 中所列 Q 的计算值, 可认为理论和实验符合良好。我们用驻波管也对微穿孔板声阻率进行过测量, 由于孔径甚小(不超过 1 毫米), 穿孔率也很低, 孔中质点速度较高, 非线性效应明显, 必须降低声强以接近线性近似适用的条件, 当 λ 低达 5, 实测 Q 值虽偏高些, 仍与理论计算接近。

至于有限厚穿孔板的声阻率末端修正长度 l_e , 当 λ 很大时等于 Qa , 若 $\lambda \gg 1$ 但在数十以内, 则由于圆孔内部单位长度声阻率已非准确等于 $\frac{1}{a} \sqrt{2\eta\omega\rho_0}$, 其末端修正长度小于 Qa ; $\lambda \rightarrow 0$ 的 l_e 极限值已由(36)式给出。

(41)式只适用于 $\lambda > 5$ 的情形, 不适用于 $\lambda < 1$ 的情形, 考虑到前述 r_e 应随 λ 作单调增加变化, 根据两极端情形的变化规律, 注意(35)式及表中 ar_e/η 的数值, 可以得出在整个频率范围内都适用的声阻率近似公式如下:

$$r_e = \left\{ \frac{\left(\lambda^* - \frac{\sqrt{2}}{\pi} \right) D^*}{2\sqrt{2} \left[\left(1 - \frac{C^*}{\pi\sqrt{2}\lambda^*} \right)^2 + \left(\frac{D^*}{\pi\sqrt{2}\lambda^*} \right)^2 \right]} \right\} \frac{\eta}{a}, \quad (43)$$

式中

$$\lambda^* = \sqrt[4]{\lambda^4 + 344},$$

而 C^* 、 D^* 系指(42)式中以 λ^* 换 λ 者。事实上, 当 $\lambda = 0$, (43) 式给出 $r_e = \frac{3\pi\eta}{a}$ 的准确值, 且关于 λ 的幂级数展式中除常数外第一项就属于 λ^4 的项, 这和第三节末的讨论是协调的; 当 λ 大于 5, 由于(43)式中 λ^* 迅速向 λ 接近, 它也就很快向(41)式接近, 而 λ 从零增至 5, r_e 的增加是不大的。综上所述, 近似式(43)在全频率范围均有效。

参 考 文 献

- [1] 马大猷, 中国科学, 1975, 1, 38.
- [2] E. Hirschwehr, *Acustica*, **30**(1974), 241.
- [3] C. 席根, C. W. 柯斯汀, 吸声材料(中译本), 第二章, 科学出版社(1960).
- [4] U. Ingard, *J. Acoust. Soc. Am.*, **25**(1953), 1037.
- [5] P. M. Morse, U. Ingard, *Theoretical Acoustics*, 481, McGraw-Hill (1968).
- [6] P. M. Morse, H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, § 1.5, p. 53, McGraw-Hill (1953).
- [7] I. N. 史奈登, 富里叶变换(中译本), 科学出版社(1958).

- [8] A. 爱尔台里主编, 高级超越函数(中译本), 第二册 88 页, 科学技术出版社 (1958).
[9] U. Ingard, H. Ising, *J. Acoust. Soc. Am.*, 42(1967), 6.
[10] R. L. Panton, A. L. Goldman, *Ibid*, 60(1976), 1390.

ON THE LINEAR ACOUSTIC RESISTANCE OF AN ORIFICE IN AN INFINITE THIN PLATE

ZHAO SONG-LING LU YUAN-WEI
(Tongji University, Shanghai)

ABSTRACT

In this paper, a theory is presented for the linear acoustic resistance of an orifice in an infinite thin plate. For high frequency and/or great orifice, an approximating formula is derived, while the limiting value is obtained in opposite case. Theoretical calculations are in consistency with experimental data. Finally, an approximating formula which is applicable for the whole frequency range is given.