

用光学方法实现么正变换及 一般线性变换(III)*

优化方法及有关问题

霍 裕 平

(中国科学院)

提 要

本文着重讨论了在为实现一般线性变换而进行的光学系统设计中采用优化方法的可能性。此外,还分析了如何做分立谱特征展开以及具体计算中的有关问题。

一

图形处理是自动控制和计算技术发展中非常关键的问题。

一般估计,动物从周围取得信息的90%以上是通过眼接受光(也可以是红外或紫外波段)送入的图形。一个图形中包含大量的信息,其中大部分可能是不需要的。因此动物处理信息有两种本质上很不相同的过程。一种是对图形上大量信息平行地加工处理,抽取特征信息(少量所需的知识);另一种是对特征信息进行单通道的处理(可以是准确的)或逻辑判断。两种过程相互结合,交替进行。以人进行数字计算为例。首先需要将在视网膜上成像的,包含数字符号在内的图形处理成数字信息,再对数字进行运算(单通道的),也可能还需要再处理图形,再进行运算……。

电子计算机基本上是模仿人类处理信息的第二类过程,即对信息串进行单通道的运算。将计算机用于处理图形(或大量数据)方面,只能是将图形化为数字串(通过扫描图形),再对之进行复杂的计算。因此即使用目前最大的计算机,或者能够设想的更大的计算机,所能处理的问题也是很有限的,或者即便能处理,但很浪费。已经开始发展一些平行处理机,通道数目都是很有限的(几十或几百道)。从这种意义上讲,用计算机控制的自动设备,就像是一个瞎眼人,只能靠用手去摸物体来认识它。

目前,比较有希望的处理图形的途径是用光学方法。一个光学仪器(指由全息透镜构成的光学系统)是对整个图形进行变换,其处理速度远非计算机所能比拟。举一个例子:应用光学空间滤波装置一秒钟内能够将数十幅图片进行像增强。若从数字计算角度,单就要对几十幅图形作两次二维傅里叶变换这点,就不是现在所能想像的。问题的关键在

* 1977年5月9日收到。

于光学系统作为处理运算系统的功能是否完备。也就是说,光学系统能在什么范围内(能处理的信息集合)完成什么样的变换。

我们在文献[2]中试图回答这个问题,从光束总强度有限这一事实出发,指出,所有的光场分布(即光学仪器所能处理的对象),构成泛函分析中的希伯特空间 $L_2(R_2, F_2, \mu_2)^{[3]}$, 其中 R_2 是一般二维欧氏空间(平面), F_2 是 R_2 上 σ 代数, μ_2 是勒贝格测度。如前所述,一个光学系统就可以看成 $L_2(R_2, F_2, \mu_2)$ 上的线性变换,其中无损耗的光学系统对应于特殊的一类变换——么正变换(正交变换)。但更为重要的是证明了下述重要结论: $L_2(R_2, F_2, \mu_2)$ 上任一么正变换,都可以用无损耗的光学系统来充分逼近,从而可以用光学方法实现任意一般的线性变换。上述关系可以简括如下:

所有可能的光场分布 $\Leftrightarrow L_2(R_2, F_2, \mu_2)$;

无损耗的光学系统 $\Leftrightarrow L_2$ 上的么正变换;

光学系统 $\Leftrightarrow L_2$ 上的线性变换。

我们希望强调:应该开始逐渐从这种更一般的角度来考虑发展光学信息处理与光学仪器。

二

长期以来,在光学系统中,用来调制光场相位的主要手段是透镜,因此只能对相位分布进行某些类的改变。自从发展了全息透镜(最早是空间滤波片)制作技术后,人们至少在原则上可以任意改变和控制光场的相位,从而大大扩展了调制光束的能力。一个光学系统,就是由多个全息透镜按一定位置排列而成。光学设计的基本问题是,在给了一个特定的变换后,确定为实现它所需的全息透镜及排列顺序。这也是目前在实际中迫切要求解决的问题。例如:克服光学系统的慧差;光学编码;多重特征识别;图形辨认等等。

问题的困难在于,以往设计光学系统,所用的每个透镜都只用有限个(一般不大于4)参数来描述,即使是一个复杂的体系,可变的参数也不会太多,采用优化方法,至少在原则上总是可以取得较好结果的。全息透镜调制光场能力的扩大,是与它必须用一个实的二元函数来描述相联系的。因此求透镜组的问题就成为对几个函数求变分以及对一些参数求极值的混合问题。从数学上看,就是将原来有限维的极值问题扩展为无限维的极值问题。目前在光学信息处理的研究中,只能根据以往经验,拼凑实现某些特殊类型的变换(主要是满足空间平移不变的变换)。

在文献[4]中,利用泛函分析的一些基本技术,我们发展了一种求解全息透镜的叠代方法。为了逐步逼近给定的变换,每次依次调整一个全息透镜的距离和相位函数;当所有透镜都调整一遍后,再从头开始。在适当地定义“逼近”之后,在每次调整中只要给定距离,最合适的相位函数就可以直接求出,因此优化只对距离这一个参数进行。理论分析和简单例子的计算都说明这种叠代是收敛的。这样就在原则上确立了设计全息透镜组的可能性。

但是,在实际计算中,上述叠代方法是很难使用的,甚至由于对计算机内存及速度要求过高使设计成为不可能。在本文中,我们将对采用优化方法中的一些问题作初步分析,

并指出发展有实用意义的计算方法的可能途径或方向。当然,为了达到实际应用的目的,还需要做大量的工作。

为了节约篇幅,我们将不加说明地引用文献[2]和[4]中的符号、概念和结果。

三

进行数值计算,首先需要将连续变量离散化,并进而近似化为有限维(即使维数很高)问题。离散化的方法合适与否,不仅会大大影响计算工作量,而且可能会决定使计算成为是否可能。在文献[4]中,我们直接在 R_2 的有限维区域中取网格。这样做简单、直观,问题本质容易显示出来,是开始引出结果所必须的。但是,为了设计比较好的光学系统,格点就要取得比较稠密,从而使矩阵维数很大。例如,系统孔径 10cm,即使分辨率为 1 对线/1mm,变换矩阵约为 10^5 维,这差不多已经超出目前计算技术的水平了。在文献[4]中,最后还讨论了采用光学中“取样定理”的可能性,但由于通常所用的函数组 $S_n(x)$ 性质不好,计算也很繁杂。

泛函分析理论指出,在勒贝格测度空间 (R_n, F_n, μ_n) 上的 L_m 函数空间是可分的,在我们情况下, $n = m = 2$,按照定义,在可分的希伯特空间 L_2 中,存在可列的正交完备组。以此正交完备组为基,任一平方可积函数都可表示为一可列数组,而 L_2 上的线性变换,就表示为可列的无限维矩阵。如果正交基(表示)选择合适,我们所讨论的问题可以近似局限于前有限个基所张的子空间中,从而化为有限维矩阵的计算。以前的讨论,可以认为是在“坐标表象”中进行的,其优点是全息透镜对应的变换矩阵(H)在此表象中是对角的。

显然,对于不同的问题,应该选择不同的较优的表象。但由于光场函数都局限于 R_2 中的有限区域内,一般可以取抛物线柱函数^[5]组成正交基,

$$D_n(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} H_n\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) / (n! \sqrt{2\pi})^{1/2} \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

其中

$$H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2}$$

为厄米多项式, $t = \frac{\sqrt{2}}{a} x$ 或 $\frac{\sqrt{2}}{a} y$, a 为 x 或 y 方向孔径大小。为了书写简单,以下将以一维情况为例,并取 $a = \sqrt{2}$ 。任何 L_2 中的复函数都可以展开,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n D_n(x),$$

$$a_n = \int_{-\infty}^{\infty} D_n(x) f_n(x) dx.$$

而线性变换 G 在此表象中的矩阵元为

$$G_{n,m} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' D_n(x) G(x, x') D_m(x').$$

在求解全息透镜组的计算中,基本的步骤是用 $H \cdot G_0(l)$ 去逼近某一么正矩阵 $\bar{G}$, $G_0(l)$ 是在自由空间光的传播矩阵。在给定 l 以后,确定 H 的变分方程为

$$\delta_H \|\bar{G} - H \cdot G_0(l)\| = 0,$$

或

$$\delta_H \text{Tr}(H^+ \cdot \bar{G} \cdot G_0(l)) = 0. \quad (1)$$

在我们所取的表象中,

$$\begin{aligned} \text{Tr}(H^+ \cdot \bar{G} \cdot G_0(l)) &= \sum_{n,m} H_{m,n}^* (\bar{G} \cdot G_0(l))_{n,m} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx H^*(x) \left(\sum_{n,m} D_n(x) D_m(x) (\bar{G} \cdot G_0(l))_{n,m} \right) \end{aligned}$$

(具体计算中, $\bar{G}_{n,l}$ 预先给出, $G_0(l)_{l,m}$ 在每步计算中形成). 满足(1)式的解为

$$H(x) = \frac{h(x)}{|h(x)|}, \quad h(x) = \sum_{n,m,l} D_n(x) D_m(x) \bar{G}_{m,l} G_0(l)_{l,n};$$

或者

$$H_{n,m} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(x)}{|h(x)|} D_m(x) D_n(x) dx.$$

但是, $H(x)$ 完全由数组

$$H_n = \int_{-\infty}^{\infty} H(x) D_n(x) dx \quad n = 0, 1, \dots$$

给出. 则

$$H_{n,m} = \sum_s H_s g_{n,m}^s, \quad (2)$$

其中

$$g_{n,m}^s = \int_{-\infty}^{\infty} D_n(x) D_m(x) D_s(x) dx. \quad (3)$$

利用 s, m, n 的对称性及递推公式

$$\sqrt{n+1} D_{n+1} + 2D'_n - \sqrt{n} D_{n-1} = 0,$$

得到

$$\begin{aligned} \sqrt{s+1} g_{n,m}^{s+1} - \sqrt{s} g_{n,m}^{s-1} + \sqrt{n+1} g_{n+1,m}^s - \sqrt{n} g_{n-1,m}^s \\ + \sqrt{m+1} g_{n,m+1}^s - \sqrt{m} g_{n,m-1}^s = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

因此, 只需要计算和存放 H_n , 在需要时, 根据事先算好的 $g_{n,m}^0$ 及 $g_{n,m}^1$ 形成 $g_{n,m}^s$, 从而求得矩阵元 $H_{n,m}$.

四

在文献[4]提出的叠代方法中, 每次调整一个全息透镜的过程, 实际只对距离参数 l 求极小. 这就使整个过程很像多元函数求极值的张弛法. 我们知道, 张弛法是一种比较原始而收敛性又很不好的方法, 特别在变量稍多时, 尤为不利. 要能采用近年来所发展的强有力的优化方法, 首先必须确定, 在什么意义下, 逼近的标志距离

$$D^2 = \|G - G_0(l_0) \cdot H_1 \cdot G_0(l_1) \cdot H_2 \cdots H_n G_0(l_n)\|^2$$

可以看成是 $l_0, \dots, l_n$ 的函数. 我们看到, 在文献[4]中的叠代方法, 每一步在给定距离

l_i 后,透镜的相位还取决于以前确定的其它透镜相位和距离.

根据(1)式,在给定了一组 $l_0, l_1 \cdots l_n$ 后,使得 D^2 极小的每一个 $H_s (s = 1, \cdots, n)$ 都应满足下列泛函方程组:

$$\begin{aligned} & H_s^*(x) (G_0^+(l_{s-1}) \cdot H_{s-1}^+ \cdots \cdots H_1^+ \cdot G_0^+(l_0) \cdot G \cdot G_0(l_n) \\ & \quad \cdot H_n^+ \cdots \cdots G_0^+(l_s))(x, x) \\ & = |(G_0^+(l_{s-1}) \cdot H_{s-1}^+ \cdots \cdots G_0^+(l_0) \cdot G \cdot G_0^+(l_n) \cdots \cdots G_0^+(l_s))(x, x)|, \quad (5) \end{aligned}$$

D^2 与 $l_0, \cdots, l_n$ 的关系除显含于 $G_0(l_s)$ 中外,还通过 $H_1(x), \cdots, H_n(x)$ 满足泛函方程组(5)而表现.

可以用叠代法求解(5)式.从一组初始的 $\{H_s^{(0)}(x)\}$ 出发,求 $\{H_s^{(1)}(x)\}$, $H_s^{(1)}(x) = e^{i\Phi_s^{(1)}(x)}$,

$$\begin{aligned} \Phi_1^{(1)}(x) &= \arg\{(G_0^+(l_0) \cdot G \cdot G_0^+(l_n) \cdot H_n^{(0)+} \cdots \cdots H_2^{(0)+} \cdot G_0^+(l_1))(x, x)\}, \\ \Phi_2^{(1)}(x) &= \arg\{(G_0^+(l_1) \cdot H_1^{(1)+} \cdot G_0^+(l_0) \cdot G \cdot G_0^+(l_n) \cdot H_n^{(0)+} \cdots \cdots G_0^+(l_2))(x, x)\}, \\ &\cdots \cdots \cdots \end{aligned}$$

$$\Phi_n^{(1)}(x) = \arg\{(G_0^+(l_{n-1}) \cdot H_{n-1}^{(1)+} \cdots \cdots H_1^{(1)+} \cdot G_0^+(l_0) \cdot G \cdot G_0^+(l_n))(x, x)\}, \quad (5')$$

$\arg\{K\}$ 表示 K 的相位. 同样,由 $\{H_s^{(1)}(x)\}$ 出发,类似(5')式得到 $\{H_s^{(2)}(x)\}, \cdots$. 如果令 $\{H_s^{(m)}(x)\} = \mathcal{H}^{(m)}$, 则

(5')式的叠代过程可简写成

$$T(\mathcal{H}^{(m-1)}) = \mathcal{H}^{(m)}, \quad (6)$$

T 算子作用到 n 个相位函数 Φ 上. 显然,方程(5)的解就是 T 算子的不动点.

要证明叠代(6)式是收敛的,引入

$$\begin{aligned} d_s^{(m+1)} &= \int_{\Sigma} H_s^{(m-1)*}(x) (G_0^+(l_{s-1}) \cdot H_{s-1}^{(m+1)+} \cdots \cdots G_0^+(l_0) \cdot G \\ & \quad \cdot G_0^+(l_n) \cdot H_n^{(m)} \cdots \cdots G_0^+(l_s))(x, x) dx, \end{aligned}$$

其中 Σ 是光场范围(或光强度主要分布的区域). 已经知道,(5')式叠代中每一步都使 d 不减,

$$d_s^{(m+1)} \geq d_{s-1}^{(m+1)} \quad \text{及} \quad d_1^{(m+1)} \geq d_n^{(m)}. \quad (7)$$

由于 $H_s(x)$ 只取相位型函数,(7)式等号只在 $H_s^{(m+1)}(x) = H_s^{(m)}(x)$ 时成立(或 Φ 差 -2π 相位. 若对所有 $s = 1$ 到 n 等式都成立,

$$d_s^{(m+1)} = d_{s-1}^{(m+1)} \quad s = 2, \cdots, n, \quad d_1^{(m+1)} = d_n^{(m)},$$

则 $d_n^{(m)} = d_n^{(m+1)}$, 而所有 $H_s^{(m)}(x)$ 都在(5')式叠代过程中不变,即 $\mathcal{H}^{(m)}$ 是方程(5)

$$T(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$$

的解. 如果至少对某一 s , $H_s^{(m)}$ 改变,即

$$d_s^{(m+1)} > d_{s-1}^{(m+1)},$$

则

$$d_n^{(m+1)} > d_n^{(m)}.$$

所以,叠代(6)式是否收敛只需要研究数列 $d_n^{(1)}, d_n^{(2)} \cdots d_n^{(m)} \cdots$ 的收敛性.

如果方程组(5)的解 $H_1(x), \cdots, H_n(x)$, 令

$$d^\infty = \int_{\Sigma} |(G_0^+(l_0) \cdot G \cdot G_0^+(l_n) \cdot H_n^+ \cdots \cdots H_1^+ \cdot G_0^+(l_1))(x, x)| dx,$$

有 $d_i^{(m+1)} \leq d^\infty < +\infty$. 根据 $\mathbf{R}^1$ 空间的局部紧致性, $d_n^{(1)}, d_n^{(2)}, \dots$ 必定以 d^∞ 为其极限. 所以(7)式叠代收敛到解 $\mathcal{H}$.

总括如下: 若我们打算用 n 个全息透镜构成光学系统来近似实现某一变换 G . 引入“距离”

$$D^2 = \|G - G_0(l_0) \cdot H_1 \cdot \dots \cdot H_n \cdot G_0(l_n)\|^2$$

作为 $\{l_0, \dots, l_n\}$ 的函数. 在给定一组 $\{l_0, \dots, l_n\}$ 后, 先用叠代法(6)式求出方程组(5)的近似解, 即确定 n 个位相型函数 $H_i = e^{i\phi_i}$, 再代入表达式直接求 D^2 . 这样, 就可以用各种有效的优化方法来确定最佳(使 D^2 最小)的参数组 $\{l_0, \dots, l_n\}$ 及与之对应的全息透镜 $H_1, \dots, H_n$. 当 n 很小时, 一般用直接方法(例如松动单纯形法或座标轮换加速法), 但当 n 较大时, 更常用的是梯度法(共轭方向法等). 具体的计算问题将不在此讨论. 过去, 很多优化问题都有类似情况, 即给了一组变量后, 要通过解一组方程再计算判断函数. 这些计算的经验和将有助于今后的光学设计.

五

如果要实现的变换具有一定的对称性.

例如, 平移变换 ($x \rightarrow x + a$) 不变性要求

$$G(x, x') = G(x + a, x' + a) = G(x - x').$$

同样, 轴对称要求

$$G(r, r', \theta, \theta') = G(r, r', \theta - \theta'),$$

其中 (r, θ) 为平面上的极坐标.

已经知道, $\mathbf{R}^2$ 空间上的任一对称操作 T (μ_2 保测), 对应于 L_2 空间上的么正变换

$$f(x) \rightarrow f(T^{-1}x) = U_T \cdot f,$$

如平移变换 $U = e^{-i \frac{\partial}{\partial x} \cdot a}$. 在 T 操作下, 线性变换

$$G \rightarrow G'_T = U_T \cdot G \cdot U_T^\dagger,$$

对称性要求

$$G = G'_T.$$

用一组全息透镜实现 G , 则由于自由空间在 T 操作下不变, $G_0(l) = G'_{0T}(l)$, 有

$$\begin{aligned} G &\cong G_0(l_0) \cdot H_1 \cdot \dots \cdot H_n \cdot G_0(l_n) \\ &= G_0(l_0) \cdot H'_{1T} \cdot \dots \cdot H'_{nT} \cdot G_0(l_n) \\ H'_T &= U_T \cdot H \cdot U_T^\dagger. \end{aligned} \quad (8)$$

使(8)式成立的最直接和最简单的方法是令

$$H'_T(x) = H(T^{-1}x) = H(x),$$

即用具有 T 不变的全息透镜来构造 G , 这样当然可以大大节约计算量. 但实际上往往不能如此. 我们分析两个例子.

1) 平移不变的么正变换 $G(x - x')$ 如果要求全息透镜也满足平移不变的要求, 则 $H(x)$ 只能是常数. 显然, 仅仅用 $G_0(l)$ 是不能构造任一 $G(x - x')$ 的. 问题在于, 所

有 $H(x)$ 都满足平移不变的要求是太强了. 可以求出一些光学系统, 虽然其中每一个透镜 H 都不满足平移不变, 但组合起来总是满足的. 常用的光学空间滤波系统即为一例 (图 1). 不论做傅氏变换的薄透镜 L_1 , 或做逆傅氏变换的透镜 L_2 , 以及空间滤波片 K , 都不满足平移不变的要求. 但平移了的光束, 在通过 L_1 及 K 所产生的变化, 通过 L_2 到达 B 面时被抵消了. 特别值得注意的是, K 可以任意改变.

2) 轴对称变换 $G(r, r', \theta - \theta')$

由于 $G_0(l)$ 是轴对称的 (矩阵元可写成 $G_0(l, r, r', \theta - \theta')$), 若取全息透镜也

满足旋转不变: $H(r, \theta) = H(r)$, 则可将整个问题对 θ 作傅氏展开

$$G(r, r', \theta - \theta') = \sum_n G_n(r, r') e^{in(\theta - \theta')}.$$

完成对角度积分后,

$$G_m(r, r') = \int_0^\infty r_1 dr_1 \cdots \int_0^\infty r_n dr_n G_{0m}(l_0, r, r_1) H_1(r_1) \cdots H_m(r_n) \cdot G_0(l_m, r_n, r').$$

对固定一个 m , 可以求出一组最佳的 $l_0^{(m)} \cdots l_n^{(m)}$ 以及相应的 $H_1^{(m)}(r) \cdots H_n^{(m)}(r)$. 不同的 m 结果是不一样的. 所以, 只有当光场也是轴对称时, 系统才可以设计 ($m=0$). 一般的轴对称么正变换是不能用轴对称光学系统实现的.

因此, 对于具有一定对称性的么正变换, 在设计开始时, 必须放弃对称性要求, 而通过逼近所要实现的变换, 自动使整个系统满足对称要求.

六

由于 $L_2(R_2, F_2, \mu_2)$ 空间的可分性, 如何用光学方法从一般座标表象 ($f(x)$), 变换到由分立基所构成的表象 (f_n) 就非常重要. 在文献 [2] 中我们提出采用有限区域傅里叶级数近似地将分立指标变为连续指标, 再采用全息透镜列实现连续指标到连续指标变换的方法. 在实际应用中, 这样做存在很多问题. 这里, 我们将提出更为直接有效的方法.

可列正交完备组 $\{G_n(x)\}$. 将 n 看成变换矩阵元的另一指标: $G(x, n)$. 由正交完备性, G 是么正矩阵, 即

$$\begin{aligned} \int G^+(x, n) G(x, n') dx &= \delta_{n, n'}, \\ \sum_n G^+(x, n) \cdot G(x', n) &= \delta(x - x'). \end{aligned} \quad (9)$$

将函数 $f(x) \in L_2$ 在此表象中写出

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_n f_n G(x, n), \\ f_n &= \int G^+(x, n) f(x) dx, \end{aligned} \quad (10)$$

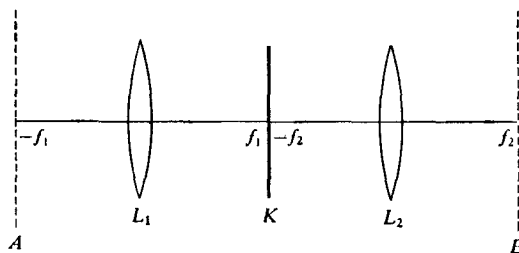


图 1

并有 $\sum_n |f_n|^2 < \infty$.

对固定 x , 将 $G(x, n)$ 作为 n 的函数台阶式地展扩到全实轴上. 为此选择一合适的实数序列(按大小排列) $\{x_n\}$, 并定义函数

$$\hat{G}(x, x') = \begin{cases} G(x, n) & \text{当 } \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_n) < x' < \frac{1}{2}(x_n + x_{n+1}), \\ \frac{1}{2}(G(x, n) + G(x, n+1)) & \text{当 } x' = \frac{1}{2}(x_n + x_{n+1}); \end{cases} \quad (11)$$

以及 $\rho(x') = \sum_n \rho_n(x', \gamma)$, 其中 $\rho_n(x', \gamma)$ 依赖于参数 γ ,

$$\int \rho_n(x', \gamma) dx' = 1, \\ \lim_{\gamma \rightarrow 0} \rho_n(x', \gamma) = \delta(x - x_n).$$

例如

$$\rho_n(x', \gamma) = \frac{\gamma}{(x' - x_n)^2 + \gamma^2} \cdot \frac{1}{\pi}$$

则正交归一关系(9)式中第二式, 在 γ 充分小时, 可写成

$$\int \hat{G}^+(x, x') \hat{G}(x'', x') \rho(x') dx' = \delta(x - x''),$$

而(10)式则为

$$f(x) = \int dx' \int dx'' \hat{G}^+(x', x'') f(x') \hat{G}(x, x'') \rho(x'').$$

由此得到

$$\int \rho(x) \hat{G}^+(x', x) \hat{G}(x', x'') dx = \delta(x - x'').$$

因此, 我们就将分立本征展开化为带权重 $\rho(x)$ 的连续本征展开.

根据文献[2], 引入 $\rho^{1/2}$ 矩阵: $\rho^{1/2}(x, x') = \rho^{1/2}(x) \delta(x - x')$, 则 $\hat{G} \cdot \rho^{1/2}$ 是么正矩阵. 如果入射光场 f :

$$((\hat{G} \cdot \rho^{1/2})^+ \cdot f)(x') = \rho^{1/2}(x') \int \hat{G}^*(x', x) f(x) dx,$$

再令通过一 $\rho^{1/2}$ 光阑(即透光强度正比于 $\rho^{1/2}(x)$ 的光栅),

$$\begin{aligned} \rho^{1/2} \cdot \rho^{1/2} \cdot \hat{G}^+ \cdot f(x') &= \rho(x') \int \hat{G}^*(x', x) f(x) dx \\ &= \sum_n \rho_n(x', \gamma) f_n, \end{aligned} \quad (12)$$

只要 γ 足够小, 使不同 $\rho_n(x, \gamma)$ 基本上不重叠, 则每个狭缝通过的总光强即 f_n .

作为应用, 我们讨论多重特征识别的光学方法. 以往, 用傅里叶光学方法识别一个特征是通过相关积分手段. 若要识别的特征用 $S(x)$ 描述, 入射光还包含其它信息(或杂散背景) $n(x)$, $f(x) = \alpha S(x) + n(x)$. 利用 $S^*(x) \otimes n(x)$ 在原点值很小或等于零(其中 $\otimes$ 表示相关积分), 则将入射光与 $S^*(x)$ 作相关积分后, 在原点的强度就是 α . 从泛函的角度看, 两个函数相关积分在原点的值就是它们的内积(在 L_2 上), 要求 $n(x)$ 不再含有 $S(x)$

的特征即 $n(x)$ 与 $S(x)$ 正交. 用傅里叶变换只能识别一个特征, 要同时识别 n 个特征: 用归一的函数 $S_1(x) \cdots S_n(x)$ 描述(属于 L_2), 独立性要求即要求相互正交(否则用施米特正交化手续), 所以 $\int S_i^*(x) S_j(x) dx = \delta_{ij}$. 根据所要求的准确度, 在以抛物线柱函数为基的表象中, 取前 K 个所张的子空间 $\mathcal{L}_0$, 将 $S_1(x) \cdots S_n(x)$ 投影到 $\mathcal{L}_0$ 上:

$$\bar{S}_i(x) = \sum_{j=1}^K D_j(x) \int D_j(x') S_i(x') dx',$$

并在 $\mathcal{L}_0$ 中取 $K - n$ 个与 $\bar{S}_1 \cdots \bar{S}_n$ 正交并彼此正交归一的函数 $\bar{S}_{n+1} \cdots \bar{S}_K$. 构造么正变换

$$G(x, n) = \bar{S}_n(x),$$

并用光学方法实现. 则前 n 个 x_i 处的光强就是入射光所包含相应的特征分量.

参 考 文 献

- [1] Francis T. S. Yu, Introduction to Diffraction, Information Processing and Holography (1973).
- [2] 霍裕平、杨国桢、顾本源, 物理学报, **24** (1975), 433.
- [3] Carl E. Pearson, Handbook of Applied Mathematics, VNR (1974).
- [4] 霍裕平、杨国桢、顾本源, 物理学报, **25**(1976), 31.
- [5] 王竹溪、郭敦仁, 特殊函数概论, 科学出版社(1965).

UNITARY TRANSFORMATION AND GENERAL LINEAR TRANSFORMATION BY AN OPTICAL METHOD(III)

—THE OPTIMIZATION METHOD AND RELATED PROBLEMS

HUO YU-PING

(Academia Sinica)

ABSTRACT

The possibility of using the optimization methods in realizing a given linear transformation of patterns by optical system is discussed. Furthermore, we have developed a method for characteristic expansion with discrete spectrum and also analyzed some problems related to concrete calculations.