

激光横模相位补偿的远场分布*

谢 培 良

(中国科学院上海光学精密机械研究所)

提 要

本文分析了激光 TEM_{m0} 和 TEM_{0l} 模相位补偿的远场分布。结果表明,其远场分布特性均有本质的改进。

一、引 言

众所周知,高次模激光器的方向性比单横模差,然而最近 Casperson 在激光器输出端放置一块相位板,计算了高次模 TEM_{0l} 相位补偿后的特性^[1],得到衍射角 $\theta = \frac{2.405}{(2l)^{1/2}} \frac{\lambda}{\pi W}$, 远场峰值强度增加了 $\frac{8}{\pi^2} \left(\frac{2e}{l}\right)^l \left[\left(\frac{l}{2}\right)!\right]^2$ 倍。这表明,远场分布特性有显著改进。下面用傅里叶变换和汉格尔变换,进一步计算平行平面腔、矩形球面腔 TEM_{m0} 模及圆形球面腔 TEM_{0l} 模相位补偿的远场分布,并简要阐述相位板补偿原理。文中还指出,文献[1]的结果是本文第三节 l 为偶数的情况。

设沿 z 轴传播的光束,如果孔径上的场型分布为 $f(x, y)$,那么远场分布由夫琅和费衍射方程得到^[2]

$$E(x_1, y_1) = \frac{e^{ik[z + \frac{1}{2z}(x_1^2 + y_1^2)]}}{j\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i\frac{2\pi}{\lambda z}(xx_1 + yy_1)} dx dy. \quad (1)$$

即远场分布是 $f(x, y)$ 的傅里叶变换式 $F(u, v)$ 与 C 的乘积。

$$C = \frac{e^{ik[z + \frac{1}{2z}(x_1^2 + y_1^2)]}}{j\lambda z},$$

$$F(u, v) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux + vy)} dx dy, \quad (1a)$$

式中 $u = \frac{x_1}{\lambda z}$, $v = \frac{y_1}{\lambda z}$, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, λ 为波长。

如果考虑狭缝宽 $2a$ 上的场分布,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < a, \\ e^{i\pi} & -a < x < 0, \\ 0 & |x| > a, \end{cases}$$

*1977 年 10 月 31 日收到。

即场分布为在 $x = 0$ 两边狭缝上有 π 相位跃变的单位振幅平面波, 由 (1a) 式的傅里叶变换, 得到远场 x_1 方向上的振幅分布为

$$E(x_1) = 2jCa \sin Cua \sin \pi ua, \quad (2)$$

式中 $\sin Cx = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$, 光强分布 $I = |E|^2$, 远场强度分布

$$I = \frac{4a^2}{\lambda^2 x^2} \sin^2 C^2 ua \sin^2 \pi ua. \quad (2a)$$

强度分布见图 1, 其中心强度为零, 具有对称的旁瓣, 它的衍射全角 $\theta = 4 \left(\frac{\lambda}{2a} \right)$, 每一旁瓣的衍射全角 $\theta = 2 \left(\frac{\lambda}{2a} \right)$.

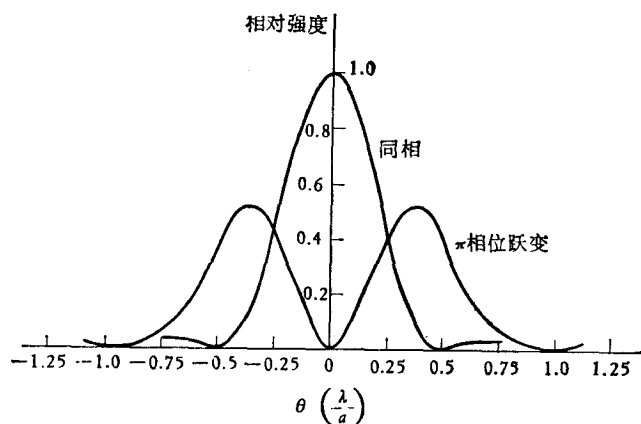


图 1 狭缝远场强度分布

如果在狭缝上放置一个 π 相位跃变的补偿板, 经过相位板后的场分布为

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < a, \\ 0 & |x| > a. \end{cases}$$

这就是在狭缝 $2a$ 上的单位振幅单色平面波, 其远场分布为

$$I_c = \frac{4a^2}{\lambda^2 x^2} \sin^2 C^2 2ua. \quad (3)$$

其远场中心强度最大, 峰值强度是未补偿时的 1.81 倍, 衍射全角 $\theta = 2 \left(\frac{\lambda}{2a} \right)$, 即得到衍射极限光束。

我们知道, 激光高次模场型分布有若干峰, 邻峰间相位差 π , 故其远场分布出现旁瓣, 使衍射角增加 (方向性变差), 中心强度减弱。如果在激光输出端放一个与场型分布相匹配的相位板 (图 2 (c)), 将高次模邻峰间相位差补偿至同相输出 (图 2 (a) 和 (b)), 那么同相位的光束将得到衍射极限的远场分布, 这就是相位板补偿改善激光高次模远场特性的简单原理。

相位板可以用光刻或真空镀膜得到 (图 2 (c)), 图中高出部分表示与周围有 $\lambda/2$ 奇数倍的光程差。

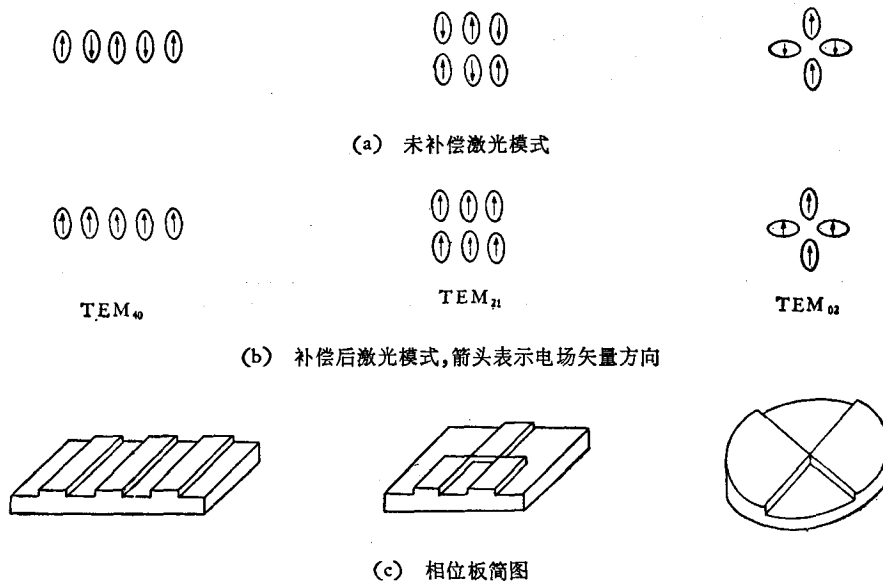


图2 激光模式及补偿相位板

二、平行平面腔

腔长 L , 宽度 $2a$ 的平行平面腔, TEM_{m0} 模的场型分布近似为

$$f(x) = \frac{\cos}{\sin} \left[\frac{(m+1)\pi x}{2a} \frac{1}{1 + \frac{\beta}{M} + j\frac{\beta}{M}} \right] \quad \begin{matrix} m = 0, 2, 4 \dots, \\ m = 1, 3, 5 \dots, \end{matrix} \quad (4)$$

式中

$$\beta = \frac{\xi\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} = 0.824, \quad M = \sqrt{8\pi N} \quad N = \frac{a^2}{\lambda L},$$

由(1), (4)式得到远场振幅分布为

$$E = C \int_{-a}^a \frac{\cos}{\sin} [2\pi u_0 x] e^{-j2\pi u x} dx,$$

式中

$$u = \frac{x_1}{\lambda z}, \quad u_0 = \frac{m+1}{4a \left(1 + \frac{\beta}{M} + j\frac{\beta}{M}\right)}.$$

对于费涅尔数 N 足够大时 $u_0 = \frac{m+1}{4a}$, 由傅里叶变换得到远场强度分布为

$$I = \frac{a^2}{\lambda^2 z^2} [\sin C2a(u + u_0) \pm \sin C2a(u - u_0)]^2 \quad \begin{matrix} m = 0, 2, 4 \dots, \\ m = 1, 3, 5 \dots. \end{matrix} \quad (5)$$

对于 $m \gg 1$ 的高次模,

$$I = \frac{a^2}{\lambda^2 z^2} [\sin C^2 2a(u + u_0) + \sin C^2 2a(u - u_0)]. \quad (5a)$$

基模 TEM_{00} 模远场有一个主瓣, 所有其他模均有对称的两个主旁瓣^[3], $m \gg 1$ 高次模峰值为 $\frac{a^2}{\lambda^2 z^2}$, 峰值位于 $\theta = \pm \frac{(m+1)\lambda}{4a}$ 处, 中心强度趋于零, 如图 3 所示。

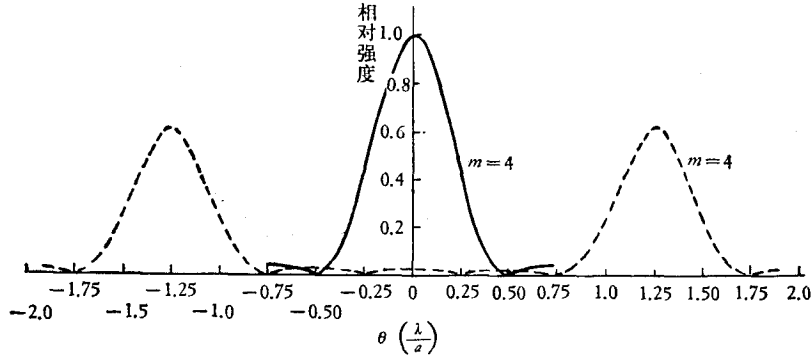


图3 平行平面腔 TEM_{m0} 模的远场分布(虚线为未补偿;实线为补偿)

当 N 足够大时, 相位补偿后的 TEM_{m0} 场型分布为

$$f_c(x) = \begin{cases} \cos(2\pi u_0 x) & m = 0, 2, 4 \dots, \\ \sin(2\pi u_0 x) & m = 1, 3, 5 \dots. \end{cases} \quad (6)$$

用傅里叶展开:

$$f_c(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1} \cos 4\pi n u_0 x \right] & m = 0, 2, 4 \dots, \\ \frac{2}{\pi} \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 1}{n^2 - 1} \cos 2\pi n u_0 x \right] & m = 1, 3, 5 \dots. \end{cases} \quad (6a)$$

由 (1), (6a) 式用傅里叶变换, 得到 TEM_{m0} 模相位补偿的远场强度分布为

$$I_c = \begin{cases} \frac{16a^2}{\pi^2 \lambda^2 z^2} \left\{ \sin C^2 2ua + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1} [\sin C^2 2a(u + 2nu_0) + \sin C^2 2a(u - 2nu_0)] \right\}^2 & m = 0, 2, 4 \dots, \\ \frac{16a^2}{\pi^2 \lambda^2 z^2} \left\{ \sin C^2 2ua - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 1}{n^2 - 1} [\sin C^2 2a(u + nu_0) + \sin C^2 2a(u - nu_0)] \right\}^2 & m = 1, 3, 5 \dots. \end{cases} \quad (7)$$

上式括号内第一项是相位补偿后场型分布 $f_c(x)$ 傅里叶展开式中零级分量(即同相分量)产生的。容易证明, 零级分量功率占总功率的 $\frac{8}{\pi^2} = 81\%$, 它在远场造成主瓣分布, $f_c(x)$ 傅里叶展开式中的高次分量在远场产生一系列对称的强度逐渐递减的旁瓣, 旁瓣峰值位于 $\theta = \pm \frac{n(m+1)\lambda}{2a}$ 处, 故它的衍射角较大。因此我们仅需计算零级分量引起的主瓣分布 $\frac{16a^2}{\pi^2 \lambda^2 z^2} \sin^2 C^2 2ua$ 。 TEM_{m0} 的远场分布见图 3。可以求得补偿光束峰值强度为未补偿时 $\frac{16}{\pi^2} = 1.62$ 倍, 衍射角 $\theta = 2 \left(\frac{\lambda}{2a} \right)$, 得到衍射极限光束。

可以注意到, 激光模式相位补偿作用与电子学中交变电压的全波整流作用是相似的.

三、球 面 腔

1. 矩形球面腔

矩形球面腔 TEM_{mn} 模场型为厄米高斯分布, 对功率归一化后表达式为^[4]

$$f(x, y) = \left(\frac{2}{\pi} \frac{1}{W^2 2^{m+n} m! n!} \right)^{\frac{1}{2}} H_m \left(\sqrt{2} \frac{x}{W} \right) H_n \left(\sqrt{2} \frac{y}{W} \right) e^{-\frac{x^2+y^2}{W^2} (1+j\phi)}, \quad (8)$$

式中 W 为基模光斑半径, $H_m(x)$ 为厄米多项式, $\phi = \frac{KW^2}{2R}$ 为相位因子, R 是球面波曲率半径.

1) 无相位补偿 TEM_{m0} 模远场分布

(8)式取变量

$$\xi = \frac{x}{W} (1+j\phi)^{\frac{1}{2}}, \quad \eta = \frac{y}{W} (1+j\phi)^{\frac{1}{2}}, \quad \rho = \frac{\omega_x W}{(1+j\phi)^{\frac{1}{2}}},$$

$$v = \frac{\omega_y W}{(1+j\phi)^{\frac{1}{2}}}, \quad P = \frac{\sqrt{2}}{(1+j\phi)^{\frac{1}{2}}}, \quad \text{而 } \omega_x = \frac{2\pi x_1}{\lambda z}, \quad \omega_y = \frac{2\pi y_1}{\lambda z}.$$

由(1)和(8)式得远场振幅分布为

$$E(x_1, y_1) = C \left[\frac{2}{\pi} \frac{W^2}{2^m m!} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(1+j\phi)} \iint_{-\infty}^{\infty} H_m(P\xi) e^{-(\xi^2+\eta^2)} e^{-j(\rho\xi+v\eta)} d\xi d\eta. \quad (9)$$

因为厄米多项式

$$H_m(x) = m! \sum_{n=0}^{[m/2]} \frac{(-1)^n (2x)^{m-2n}}{n! (m-2n)!},$$

$\left[\frac{m}{2} \right] = \frac{m}{2}$ 或 $\frac{m-1}{2}$ 由 m 为偶数或奇数而定, 于是(9)式傅氏变换得到远场沿 x_1 轴 (即 $y_1 = 0$) 上的强度分布

$$I = I_0 \frac{m!}{2^m} \left| \sum_{n=0}^{[m/2]} \left[\frac{(-1)^n (j2P)^{m-2n}}{n! (m-2n)!} \frac{d^{m-2n}}{d\rho^{m-2n}} e^{-\frac{\rho^2}{4}} \right] \right|^2, \quad (10)$$

式中 $I_0 = \frac{2\pi W^2}{\lambda^2 x^2 (1+\phi^2)}$, 从(10)式可以求得所有 TEM_{m0} 的远场强度分布, 例如,

$$TEM_{00} \text{ 模} \quad I = I_0 e^{-\frac{\omega_x^2 W^2}{2(1+\phi^2)}}, \quad (10a)$$

$$TEM_{10} \text{ 模} \quad I = I_0 \frac{\omega_x^2 W^2}{(1+\phi^2)} e^{-\frac{\omega_x^2 W^2}{2(1+\phi^2)}}. \quad (10b)$$

基模常以远场光强下降到最大值 e^{-1} 时光斑半径对应角度来定义发散角(半角), 从(10a)式得到 $\theta = (1+\phi^2)^{1/2} \frac{\lambda}{\pi W}$, 对于共焦腔 $\phi = 1$, 于是 $\theta = \sqrt{\frac{2\lambda}{\pi R}}$. 这与光束传播的渐近

线所得的值是一致的。从(10b)式中知道, TEM_{10} 模远场中心强度为零, 有两个对称的旁瓣(图4), 旁瓣峰值位于 $\theta = \left(\frac{1+\phi^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\lambda}{\pi W}$ 处, 高次模发散角随模数 m 增大^[5], 远场强度减小。

2) 相位补偿 TEM_{m0} 模远场分布

(1) TEM_{10} 模

(8) 式用极坐标表示, 取 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, 经过相位补偿后的场型分布, 用傅里叶级数展开后的表达式为

$$f_c(r, \theta) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{4r}{\pi W^2} \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} \cos 2m\theta}{4m^2 - 1}\right] e^{-\frac{r^2}{W^2}(1+j\phi)}. \quad (11)$$

第二节中已经指出, 仅需取贡献最大的零级分量求远场分布, 这样可得远场振幅分布为

$$E_c(r_1, \theta_1) = C \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{4}{\pi W^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} r^2 e^{-\frac{r^2}{W^2}(1+j\phi)} e^{-j\frac{K}{z} r r_1 \cos(\theta - \theta_1)} dr d\theta, \quad (12)$$

取变量

$$Y = \frac{r(1+j\phi)^{\frac{1}{2}}}{W}, \quad \beta = \frac{\omega W}{(1+j\phi)^{\frac{1}{2}}}, \quad \omega = \frac{K r_1}{z},$$

(12)式则为

$$E_c = C \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{8}{W^2} \int_0^{\infty} Y^2 e^{-Y^2} J_0(\beta Y) dY, \quad (12a)$$

式中 $J_0(x)$ 为零阶贝塞尔函数。上式由汉格尔变换^[6]得到

$$E_c = C \frac{2\sqrt{2}W}{(1+j\phi)^{3/2}} {}_1F_1\left(\frac{3}{2}, 1, -\frac{\beta^2}{4}\right), \quad (12b)$$

式中 ${}_1F_1(a, b, z)$ 为合流超几何函数^[7]:

$${}_1F_1(a, b, z) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k) z^k}{\Gamma(b+k) k!},$$

式中 $\Gamma(a)$ 为伽马函数。于是可以得到 TEM_{10} 模相位补偿的远场强度分布为

$$I_c = \frac{4I_0}{\pi(1+\phi^2)^{\frac{1}{2}}} \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+1)!!}{2^k (k!)^2} \left[\frac{\omega^2 W^2}{4(1+j\phi)} \right]^k \right|^2. \quad (13)$$

上式 I_0 同(10)式中的值, 即 I_0 为基模峰值强度。

因为函数 ${}_1F_1(a, b, z)$ 第 r 个正零点的一级近似式为^[8]

$$Z_0 = \frac{\pi^2 \left(r + \frac{1}{2}b - \frac{3}{4}\right)^2}{2b - 4a}.$$

由此得到 TEM_{10} 模补偿的远场分布第一零点定义的衍射全角

$$\theta = 2.36(1+\phi^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\lambda}{\pi W}, \quad (14)$$

第二零点的衍射角

$$\theta_2 = 2.75(1 + \phi^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\lambda}{\pi W}.$$

(13), (14)式表明, 相位补偿 TEM_{10} 模远场中心强度最大值 $I_{cm} = \frac{4I_0}{\pi(1+\phi^2)^{\frac{1}{2}}}$, I_{cm} 与球面波相因子 ϕ 有关, ϕ 越小(即球面波前曲率半径 R 越大), 补偿效果越好. 所以在相位板补偿前, 将球面波前进行修正是有意义的. 图 4 表示 $R \rightarrow \infty$ 时 TEM_{10} 模远场强度分布, 补偿 TEM_{10} 模的峰值强度是基模的 1.27 倍, 是未补偿时的 1.74 倍, 衍射全角 $\theta = 2.36 \frac{\lambda}{\pi W}$, 这表明, 相位补偿使 TEM_{10} 模远场分布产生本质的改进.

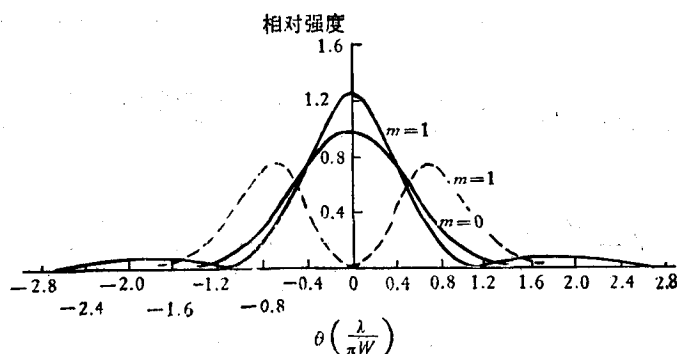


图 4 矩形球面腔 TEM_{10} 模远场分布
虚线为未补偿; 实线为补偿

(2) 高次模 $m \gg 1$

高次模 TEM_{m0} 用渐近式表示厄米多项式^[9]:

$$H_{2n}(x) = (-1)^n 2^n (2n-1)!! e^{-\frac{1}{2}x^2} \left[\cos \sqrt{4n+1}x + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right] \quad m = 2n,$$

$$H_{2n+1}(x) = (-1)^n 2^{n+\frac{1}{2}} (2n+1)^{\frac{1}{2}} (2n-1)!! e^{-\frac{1}{2}x^2} \left[\sin \sqrt{4n+3}x + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right]$$

$$m = 2n + 1.$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{\sqrt{n}} o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 为有限, 故略去该项, 将上式代入(8)式, 得到补偿 TEM_{m0}

一维分布

$$f_c(x) = \begin{cases} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{W 2^m m!} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{(-1)^n 2^{n+1} (2n-1)!!}{\pi} \left[1 + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu+1} \cos 2\nu l_{2n} X}{4\nu^2 - 1} \right] e^{-j \frac{KW^2 X^2}{4R}} & m = 2n, \\ \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{W 2^m m!} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{(-1)^n 2^{n+\frac{1}{2}} (2n+1)^{\frac{1}{2}} (2n-1)!!}{\pi} \\ \times \left[1 - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} + 1}{\nu^2 - 1} \cos \nu l_{2n+1} X \right] e^{-j \frac{KW^2 X^2}{4R}} & m = 2n + 1. \end{cases} \quad (15)$$

(15)式中 $X = \frac{\sqrt{2}}{W} x$, $l_{2n} = (4n+1)^{\frac{1}{2}}$, $l_{2n+1} = (4n+3)^{\frac{1}{2}}$. 同理取零级分量, 当 $R \rightarrow \infty$

时, 由(1), (15)式傅里叶变换后得到远场强度分布为

$$I_c = \begin{cases} \frac{4[(2n+1)!!]^2 W}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}(4n+1)\lambda^2 z^2 m!} \sin C^2 \frac{(2n+1)X_1}{\sqrt{2(4n+1)z}} \frac{\pi W}{\lambda} & m = 2n, \\ \frac{2^4(2n+1)(n+1)^2[(2n-1)!!]^2 W}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}(4n+3)\lambda^2 z^2 m!} \sin C^2 \frac{\sqrt{2(n+1)X_1}}{\sqrt{4n+3z}} \frac{\pi W}{\lambda} & m = 2n+1. \end{cases} \quad (16)$$

得到补偿 TEM_{m0} 模衍射全角 θ 为

$$\theta = \frac{2.82(2m+1)^{\frac{1}{2}}}{m+1}. \quad (17)$$

上式表明, 模数 m 增加, 补偿模的衍射角减小(见图 5), 峰值强度增大. 其物理意义是, 对于厄米高斯分布的光束, 模数越高, 光斑半径越大^[5]. 经过相位补偿后, 由衍射理论知道, 孔径大的同相输出光束衍射角小.

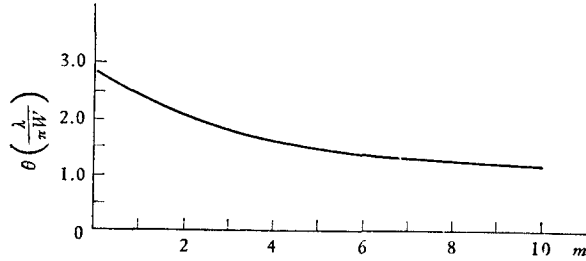


图 5 矩形球面腔补偿 TEM_{m0} 模衍射角 θ 与模数 m 的关系

2. 圆形球面腔

圆形球面腔 TEM_{pl} 模场型分布为拉盖尔-高斯函数, 对功率归一化后表达式^[4]为

$$f(r, \theta) = \frac{2}{W[\pi(1+\delta_{0l})]^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{p!}{(p+l)!} \right]^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2r}{W} \right)^{l/2} L_p^l \left(\frac{2r^2}{W^2} \right) e^{-\frac{r^2}{W^2}(1+j\phi)} \cos l\phi, \quad (18)$$

式中 δ_{0l} 在 $l=0$ 时, $\delta_{0l}=1$, 在 $l \neq 0$ 时, $\delta_{0l}=0$, $L_p^l(x)$ 为拉盖尔多项式

$$L_p^l(x) = \sum_{n=0}^p \frac{(p+l)!(-x)^n}{(n+l)!n!(p-n)!}.$$

1) 无补偿 TEM_{0l} 模远场分布

因为 $L_0^l(x) = 1$, 由(1), (18)式得 TEM_{0l} 模远场振幅分布

$$E(r_1, \theta_1) = \frac{2C}{W[\pi(1+\delta_{0l})l!]^{\frac{1}{2}}} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r \left(\frac{2r^2}{W^2} \right)^{l/2} \cos l\theta e^{-\frac{r^2}{W^2}(1+j\phi)} e^{-j\frac{k}{z}rr_1 \cos(\theta-\theta_1)} dr d\theta. \quad (19)$$

对于 $\theta_1 = 0$ 方位上的分布, 上式得到

$$E(r_1, 0) = \frac{4\pi C i^l}{W [\pi(1 + \delta_{0l}) l!]^{\frac{1}{2}}} \int_0^\infty r \left(\frac{\sqrt{2} r}{W} \right)^l e^{-\frac{r^2}{W^2}(1+j\phi)} J_l \left(\frac{K r r_1}{z} \right) dr, \quad (19a)$$

式中 $J_l(x)$ 为 l 价贝塞耳函数, 取与(12)式同样变量, 由汉格尔变换^[6]得到远场强度分布为

$$I = I_0 \frac{2(\omega W)^{2l}}{2^l(1 + \delta_{0l})(1 + \phi^2)^l l!} \left| {}_1F_1 \left(1 + l, 1 + l, -\frac{\beta^2}{4} \right) \right|^2. \quad (20)$$

因为 ${}_1F_1(a, a, z) = e^z$, 上式简化为

$$I = I_0 \frac{2(\omega W)^{2l}}{2^l(1 + \delta_{0l})(1 + \phi^2)^l l!} e^{-\frac{\omega^2 W^2}{2(1+\phi^2)}}, \quad (20a)$$

得到基模 TEM_{00}

$$I = I_0 e^{-\frac{\omega^2 W^2}{2(1+\phi^2)}},$$

$$TEM_{0l} (l > 0) \quad I = I_0 \frac{(\omega W)^{2l}}{2^{l-1}(1 + \phi^2)^l l!} e^{-\frac{\omega^2 W^2}{2(1+\phi^2)}}, \quad (20b)$$

式中 I_0 值同(10)式。(20b)式表明, 矩形球面腔 TEM_{10} 模与圆形球面腔 TEM_{01} 模远场

分布相同。 TEM_{0l} 模远场中心强度为零, 峰值强度 I_m 位于 $\theta = \left[\frac{l(1 + \phi^2)}{2} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{\lambda}{\pi W}$ 处,

$I_m = I_0 \frac{2}{l!} \left(\frac{l}{e} \right)^l$, 模数 l 越大, I_m 越远离中心, 强度也越小(见图 6)。

2) 相位补偿 TEM_{0l} 远场分布

TEM_{0l} 模经补偿后, 由(18)式得到场型分布为

$$f_c(r, \theta) = \frac{2}{W (\pi l!)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\sqrt{2} r}{W} \right)^l e^{-\frac{r^2}{W^2}(1+j\phi)} |\cos l\theta|. \quad (21)$$

只需计算 $|\cos l\theta|$ 傅里叶展开式中的零级分量, 可以得到远场振幅分布为

$$E_c(r_1, \theta_1) = \frac{C 2^{\frac{l+3}{2}} W}{(1 + j\phi)^{\frac{l+1}{2}} (\pi l!)^{\frac{1}{2}}} \int_0^\infty Y^{l+1} e^{-Y^2} J_0(\beta Y) dY. \quad (22)$$

取(12)式中同样变量, 上式由汉格尔变换得到

$$E_c(r_1, \theta_1) = \frac{C 2^{\frac{l+2}{2}} W \Gamma \left(1 + \frac{l}{2} \right)}{(1 + j\phi)^{\frac{l+1}{2}} (\pi l!)^{\frac{1}{2}}} {}_1F_1 \left(1 + \frac{l}{2}, 1, -\frac{\beta^2}{4} \right). \quad (22a)$$

于是补偿 TEM_{0l} 模远场强度分布为

$$I_c = I_0 \frac{2^{l+3}}{\pi^2(1 + \phi^2)^{l/2} l!} \left| \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k \Gamma \left(1 + \frac{l}{2} + k \right)}{(k!)^2} \left[\frac{\omega^2 W^2}{4(1 + j\phi)} \right]^k \right|^2, \quad (23)$$

式中 I_0 值同前。上式比文献[1]的公式更普遍, 可以求所有相位补偿 TEM_{0l} 模的远场分布。若将(22a)式中 ${}_1F_1(a, b, z)$ 进行库米^[8]变换: ${}_1F_1(a, b, z) = e^z {}_1F_1(b-a, b, -z)$ 。对于 l 为偶数, 用拉盖尔多项式的表达式,

$$L_n(z) = \frac{\Gamma(1+n)}{n!} {}_1F_1(-n, 1, z), \text{ 也就可以导出文献[1]的结果,}$$

$$E_c(r_1, \theta_1) = \frac{C 2^{\frac{l+2}{2}} W \left(\frac{l}{2} \right)!}{(1 + j\phi)^{\frac{l+1}{2}} (\pi l!)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{\beta^2}{4}} L_{\frac{l}{2}} \left(\frac{\beta^2}{4} \right).$$

从(23)式容易得到, 圆形腔补偿 TEM_{0l} 模与矩形腔补偿 TEM_{l0} 模远场分布也是相同的。

补偿模远场中心强度与基模峰值比为

$$\frac{I_{cm}}{I_0} = \frac{2^{l+3} \left[\Gamma \left(1 + \frac{l}{2} \right) \right]^2}{\pi^2 (1 + \phi^2)^{l/2} l!} \quad (24)$$

补偿模与未补偿模远场峰值强度比为

$$\frac{I_{cm}}{I_m} = \frac{4}{\pi^2 (1 + \phi^2)^{l/2}} \left(\frac{2e}{l} \right)^l \left[\Gamma \left(1 + \frac{l}{2} \right) \right]^2 \quad (25)$$

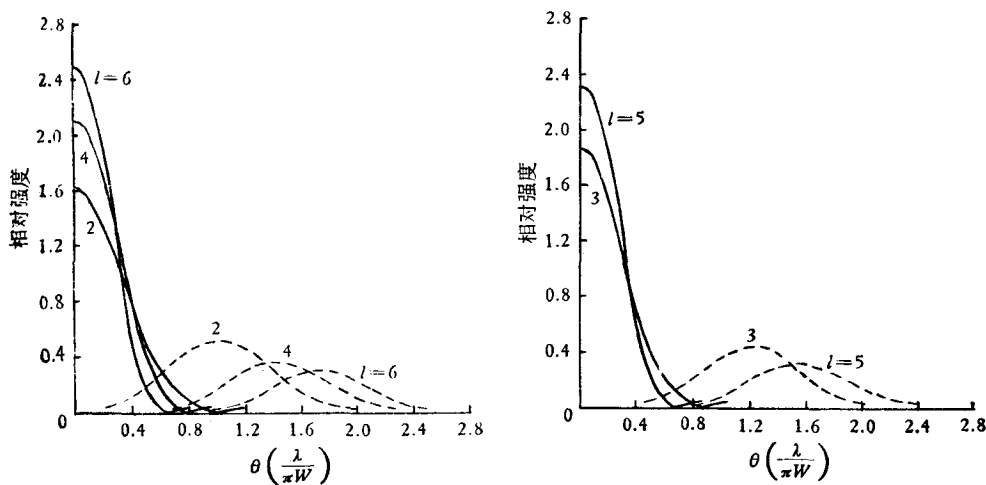


图6 圆形球面腔 TEM_{0l} 模远场分布

虚线为未补偿; 实线为补偿

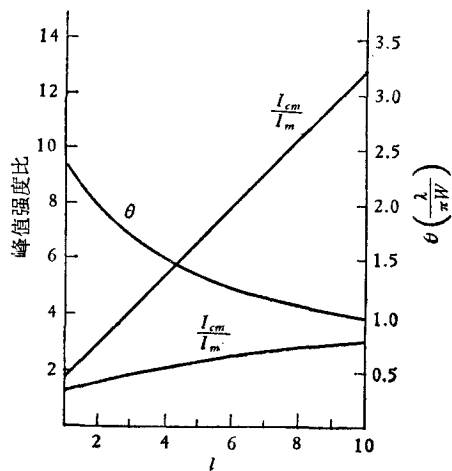


图7 圆形球面腔补偿 TEM_{0l} 模远场峰值强度比 $\frac{I_{cm}}{I_m}$, $\frac{I_{cm}}{I_0}$, 衍射角 θ 与模数 l 关系

根据函数 ${}_1F_1\left(1 + \frac{l}{2}, 1, -\frac{\beta^2}{4}\right)$ 第一个零点的一级近似式求得衍射全角,

$$\theta = 3.34 \frac{(1 + \phi^2)^{1/4}}{(1 + l)^{1/2}} \frac{\lambda}{\pi W}. \quad (26)$$

这表明, l 越大补偿效果越好, 这是由于拉盖尔-高斯分布光斑半径随模数增加而增大, 相位补偿后, 孔径大的同相输出光束衍射角小. 同时再次看到, 将球面波前先行准直成平面波前再行补偿是有益的. 图 6 表示 $R \rightarrow \infty$ 时, 补偿与未补偿的 TEM_{0l} 模远场分布, 图 7 表示圆形腔补偿 TEM_{0l} 模 $\frac{I_{cm}}{I_0}, \frac{I_{cm}}{I_m}, \theta$ 与模数 l 的关系曲线.

四、语 束 结

前面分析了平行平面腔、矩形球面腔 TEM_{m0} 模相位补偿后的远场分布, 也给出了圆形球面腔 TEM_{0l} 模补偿后远场分布更普遍的表达式, 分析得到

1. 对于稳定工作的各种高次横模激光器, 用一个简单的 π 相位跃变的匹配相位板补偿模分布邻峰间的相位差, 能使其远场分布获得本质的改进. 因为激光横模数增加, 光斑半径相应增大, 相位补偿后, 孔径大的同相输出光束衍射角小. 因此, 激光横模数愈大, 相位补偿效果愈好.

2. 将厄米-高斯或拉盖尔-高斯分布的球面波进行准直后再补偿, 对进一步改善远场分布是有益的.

3. 激光高次模的模体积大, 输出功率高, 大多数高功率激光器在高次模运转, 因此相位补偿方法有实用价值. 特别在气体激光器中, 较容易获得高次模稳定工作的激光器.

后记 本文完稿后见到 Casperson 发表的近文^[10], 他用氦氖激光器和二氧化碳激光器, 对 TEM_{10} 模进行相位补偿实验, 获得的结果与本文图 4 的预期结果很好符合.

参 考 文 献

- [1] L. W. Casperson, *Optical and Quant Electr.*, 8(1976), 537.
- [2] J. W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, 1968.
- [3] 方洪烈, *物理*, 1 (1972), 106.
- [4] *Proceedings of the Symposium on Quasi-Optics* (1964), 333.
- [5] J. S. Kruger, *Electro-Optical Systems Design Conference* (1971), 18.
- [6] A. Erdelyi, *Tables of Integral Transforms* (1954), Vol. 2.
- [7] F. Oberhettinger, *Tabellen Zur Fourier Transformation* (1957).
- [8] M. Abramowitz, *Handbook of Mathematical Functions* (1964).
- [9] 斯米尔诺夫, *高等数学教程*, 第三卷第三分册, 1953.
- [10] L. W. Casperson, *Optics Communications*, 21(1977), 1.

ON THE PHASE COMPENSATED FAR FIELD DISTRIBUTION OF TRANSVERSE LASER MODES

XIE PEI-LIANG

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

ABSTRACT

The phase compensated far field distribution of laser modes TEM_{m0} and TEM_{0l} is analyzed. It is shown that the characteristics of the far field distribution is substantially improved.