

球 面 镜 的 散 射 理 论*

沈 浩 明

提 要

本文用三个球坐标面将球面镜包围,同时把空间切割为三个区域,分别求得通解;再利用边界条件得到了系数方程组。用它来计算球面天线的辐射场,利用会聚波和发散波的概念,得到了严格的解析解。

引 言

复杂镜面的散射问题,可以分区来求解。即根据镜面形状将空间分为若干区域,先分区得到形式解,再利用边界条件来定解。在文献[1]和[2]中,曾用球坐标包围了双锥形天线和圆锥形导体,同时将空间切割成两部分,得到了振子天线辐射场和锥形导体散射场的严格解。对于许多有实际意义的复杂镜面(如抛物面、球面、圆锥喇叭面等有限长的二次曲面)散射问题,往往需用更多的坐标面来包围,把空间分割成更多的区域。由于定解时数学上的困难,还很少见到把空间分成两部分以上来联立求解的做法。

本文用三个球坐标面将球面镜包围住;将空间切割成三部分;然后将各区域的场和源表示成球坐标系本征函数的展开;最后利用边界条件来确定本征值及展开系数,得到了系数联立方程组。在镜面口径远大于波长时,利用会聚波和发散波在镜面的不同性质,得到了严格的解析解。在一般情形下,可以把它当作零级近似,用逐次逼近法来解系数方程组。由于零级近似合理,逼近速度很快。

一、系 数 方 程

1) 问题的提出

图 1 是一个球面镜,它的表面和球坐标的 $r = r_1$; $r = r_2$; $\theta = \theta_0$ 三个坐标面的一部分重合。将空间分为 $r \leq r_1$; $r_1 \leq r \leq r_2$, $0 \leq \theta \leq \theta_0$; $r_2 \leq r$ 三部分。分别记为区域 I, II, III。在这三个空间的电磁场分别用 $\mathbf{E}_I = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_s$, $\mathbf{H}_I = \mathbf{H}_i + \mathbf{H}_s$; $\mathbf{E}_{II}$, $\mathbf{H}_{II}$; $\mathbf{E}_{III}$, $\mathbf{H}_{III}$ 来表示。其中 $\mathbf{E}_i$, $\mathbf{H}_i$ 是区域 I 的入射场, $\mathbf{E}_s$, $\mathbf{H}_s$ 是 I 中待求的散射场, $\mathbf{E}_{II}$, $\mathbf{H}_{II}$; $\mathbf{E}_{III}$, $\mathbf{H}_{III}$ 是区域 II 和 III 中待求的总场。现在的问题是,已知入射场 $\mathbf{E}_i$, $\mathbf{H}_i$, 要求 $\mathbf{E}_I$, $\mathbf{H}_I$, $\mathbf{E}_{II}$, $\mathbf{H}_{II}$, $\mathbf{E}_{III}$ 和 $\mathbf{H}_{III}$ 。

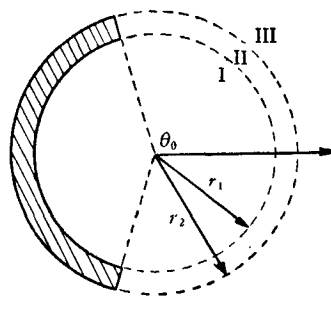


图 1

* 1977 年 12 月 5 日收到。

在球坐标系中,真空中电磁场可以分解为“横电波”和“横磁波”.它们分别用径向赫兹磁矢位 Π^μ 和电矢位 Π^e 表示如下^[3]:

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{\partial^2 \Pi^e}{\partial r^2} + K^2 \Pi^e, & H_r &= \frac{\partial^2 \Pi^\mu}{\partial r^2} + K^2 \Pi^\mu, \\ E_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Pi^e}{\partial r \partial \theta} - \frac{j\omega\mu}{r \sin \theta} \frac{\partial \Pi^\mu}{\partial \varphi}, & H_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Pi^\mu}{\partial r \partial \theta} + \frac{j\omega\varepsilon}{r \sin \theta} \frac{\partial \Pi^e}{\partial \varphi}, \\ E_\varphi &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 \Pi^e}{\partial r \partial \varphi} + \frac{j\omega\mu}{r} \frac{\partial \Pi^\mu}{\partial \theta}, & H_\varphi &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 \Pi^\mu}{\partial r \partial \varphi} - \frac{j\omega\varepsilon}{r} \frac{\partial \Pi^e}{\partial \theta}, \end{aligned} \quad (1)$$

式中 Π^e 和 Π^μ 除以 r 后都满足亥姆霍兹方程

$$(\nabla^2 + K^2) \frac{\Pi^{e,\mu}}{r} = 0. \quad (2)$$

将 $\Pi^{e,\mu}$ 的右下角分别加上 s, II, III , 就是各区域待求的场量.

2) 通解

因为 $\Pi^{e,\mu}$ 满足(2)式,考虑到解有限和辐射条件,各区域的通解可以写成

$$\Pi_s^{e,\mu} = \sum_m \Pi_{s,m}^{e,\mu} \Phi_m = \sum_{m,n} a_{n,m}^{e,\mu} S_n(Kr) P_n^m(\cos \theta) \Phi_m(\varphi), \quad (3)$$

$$\Pi_{\text{II}}^{e,\mu} = \sum_m \Pi_{\text{II},m}^{e,\mu} \Phi_m = \sum_{m,p} Z_{p,m}^{e,\mu}(Kr) P_p^m(\cos \theta) \Phi_m(\varphi), \quad (4)$$

$$\Pi_{\text{III}}^{e,\mu} = \sum_m \Pi_{\text{III},m}^{e,\mu} \Phi_m = \sum_{m,n} d_{n,m}^{e,\mu} R_n(Kr) P_n^m(\cos \theta) \Phi_m(\varphi), \quad (5)$$

其中

$$\Phi_m = e^{im\varphi} \quad m = \dots -2, -1, 0, 1, 2 \dots;$$

$P_n^m = P_n^{-m} = P_n^{|m|}(\cos \theta)$ 为缔合勒让德多项式 $n \geq |m|$ ^[1] $n = 0, 1, 2 \dots$;

$P_p^m = P_p^{-m} = P_p^{|m|}(\cos \theta)$ 为连带勒让德函数, p 待定;

$S_n(Kr) = Kr j_n(Kr)$ 中 $j_n(Kr)$ 为球贝塞耳函数;

$R_n(Kr) = Kr h_n^{(2)}(Kr)$ 中 $h_n^{(2)}(Kr)$ 为第二类球汉开尔函数;

$Z_{p,m}^{e,\mu}(Kr) = b_{p,m}^{e,\mu} Kr j_p(Kr) + c_{p,m}^{e,\mu} Kr h_p^{(2)}(Kr)$;

$a_{n,m}^{e,\mu}, b_{p,m}^{e,\mu}, c_{p,m}^{e,\mu}, d_{n,m}^{e,\mu}$ 为待定系数.

如果场源在 $r = r_1$ 附近等于零,则入射场 $\Pi_s^{e,\mu}$ 在 r_1 附近也满足(2)式,可以展成

$$\Pi_s^{e,\mu} = \sum_m \Pi_{s,m}^{e,\mu} \Phi_m = \sum_{m,n} g_{n,m}^{e,\mu} R_n(Kr) P_n^m(\cos \theta) \Phi_m(\varphi), \quad (6)$$

其中 $g_{n,m}^{e,\mu}$ 是已知的展开系数. 下面利用边界条件来求 a, b, c, d, p .

3) 边界条件

设球面是理想导体,各区域的电场应满足下列边界条件:

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_s + \mathbf{E}_i) = 0 \quad \text{当 } r = r_1 \quad \theta_0 \leq \theta \leq \pi \text{ 时}; \quad (7)$$

$$\mathbf{E}_s + \mathbf{E}_i = \mathbf{E}_{\text{II}} \quad \text{当 } r = r_1 \quad 0 \leq \theta \leq \theta_0 \text{ 时}; \quad (8)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}_{\text{III}} = 0 \quad \text{当 } r = r_2 \quad \theta_0 \leq \theta \leq \pi \text{ 时}; \quad (9)$$

$$\mathbf{E}_{\text{III}} = \mathbf{E}_{\text{II}} \quad \text{当 } r = r_2 \quad 0 \leq \theta \leq \theta_0 \text{ 时}; \quad (10)$$

1) 这几种特殊函数的定义和特性见文献 [4, 5].

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}_{\text{II}} = 0 \quad \text{当 } \theta = \theta_0, r_1 \leq r \leq r_2 \text{ 时.} \quad (11)$$

式中 $\mathbf{n}$ 是镜面法线. 将(1)式代入(7)–(11)式中, 就得到了各区域中径向赫兹电和磁矢量应当满足的边界条件.

(1) 当 $r = r_1, \theta_0 \leq \theta \leq \pi$ 时, $E_{\theta,1} = 0, E_{\varphi,1} = 0$. 即应满足条件

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Pi_r^e}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Pi_\theta^e}{\partial r \partial \theta} &= 0, & -\frac{j\omega\mu}{r \sin \theta} \frac{\partial \Pi_r^e}{\partial \varphi} - \frac{j\omega\mu}{r \sin \theta} \frac{\partial \Pi_\theta^e}{\partial \varphi} &= 0, \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 \Pi_r^e}{\partial r \partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 \Pi_\theta^e}{\partial r \partial \varphi} &= 0, & \frac{j\omega\mu}{r} \frac{\partial \Pi_r^e}{\partial \theta} + \frac{j\omega\mu}{r} \frac{\partial \Pi_\theta^e}{\partial \theta} &= 0. \end{aligned}$$

这些条件互不独立, 可以归纳为

$$\frac{\partial \Pi_r^e}{\partial r} + \frac{\partial \Pi_\theta^e}{\partial r} = 0, \quad \Pi_r^e + \Pi_\theta^e = 0. \quad (12)$$

(2) 当 $r = r_1, 0 \leq \theta \leq \theta_0$ 时, $\mathbf{E}_e + \mathbf{E}_i = \mathbf{E}_{\text{II}}$. 即各分量满足

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + K^2 \right) (\Pi_r^e + \Pi_\theta^e) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + K^2 \right) \Pi_{\text{II}}^e, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} (\Pi_r^e + \Pi_\theta^e) &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \Pi_{\text{II}}^e; \\ -\frac{j\omega\mu}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\Pi_r^e + \Pi_\theta^e) &= -\frac{j\omega\mu}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \Pi_{\text{II}}^e, \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} (\Pi_r^e + \Pi_\theta^e) &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \Pi_{\text{II}}^e; \\ \frac{j\omega\mu}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\Pi_r^e + \Pi_\theta^e) &= \frac{j\omega\mu}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \Pi_{\text{II}}^e. \end{aligned}$$

这些条件可以归纳为

$$\begin{aligned} \Pi_r^e + \Pi_\theta^e &= \Pi_{\text{II}}^e, & \Pi_r^e + \Pi_\theta^e &= \Pi_{\text{II}}^e, \\ \frac{\partial \Pi_r^e}{\partial r} + \frac{\partial \Pi_\theta^e}{\partial r} &= \frac{\partial \Pi_{\text{II}}^e}{\partial r}, & \frac{\partial \Pi_r^e}{\partial r} + \frac{\partial \Pi_\theta^e}{\partial r} &= \frac{\partial \Pi_{\text{II}}^e}{\partial r}. \end{aligned} \quad (13)$$

(3) 当 $r = r_2, \theta_0 \leq \theta \leq \pi$ 时, 同理得到

$$\frac{\partial \Pi_{\text{III}}^e}{\partial r} = 0, \quad \Pi_{\text{III}}^e = 0. \quad (14)$$

(4) 当 $r = r_2, 0 \leq \theta \leq \theta_0$ 时, 合理得到

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{III}}^e &= \Pi_{\text{II}}^e, & \Pi_{\text{III}}^e &= \Pi_{\text{II}}^e, \\ \frac{\partial \Pi_{\text{III}}^e}{\partial r} &= \frac{\partial \Pi_{\text{II}}^e}{\partial r}, & \frac{\partial \Pi_{\text{III}}^e}{\partial r} &= \frac{\partial \Pi_{\text{II}}^e}{\partial r}. \end{aligned} \quad (15)$$

(5) 当 $\theta = \theta_0, r_1 \leq r \leq r_2$ 时, 有 $E_{r\text{II}} = E_{\varphi\text{II}} = 0$, 即应满足

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + K^2 \right) \Pi_{\text{II}}^e &= 0, \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 \Pi_{\text{II}}^e}{\partial r \partial \varphi} &= 0, & \frac{j\omega\mu}{r} \frac{\partial \Pi_{\text{II}}^e}{\partial \theta} &= 0. \end{aligned}$$

这些条件可以归纳成

$$\Pi_{\text{II}}^e = 0, \quad \frac{\partial \Pi_{\text{II}}^e}{\partial \theta} = 0. \quad (16)$$

总结以上,只要电、磁矢位满足条件(12)–(16)式,那么由(1)式确定的电场就满足边界条件(7)–(11)式.

4) 定解

将通解(3)–(6)式代入(12)–(16)式中,得到按 m 分开的边界条件

$$\frac{\partial \Pi_{s,m}^{e1}}{\partial r_1} + \frac{\partial \Pi_{i,m}^{e1}}{\partial r_1} = \begin{cases} 0 & \theta \geq \theta_0; \\ \frac{\partial \Pi_{11,m}^{e1}}{\partial r_1} & \theta \leq \theta_0, \end{cases} \quad (17a)$$

$$\Pi_{s,m}^{\mu 1} + \Pi_{i,m}^{\mu 1} = \begin{cases} 0 & \theta \geq \theta_0; \\ \Pi_{11,m}^{\mu 1} & \theta \leq \theta_0, \end{cases} \quad (17b)$$

$$\frac{\partial \Pi_{11,m}^{e2}}{\partial r_2} = \begin{cases} 0 & \theta \geq \theta_0; \\ \frac{\partial \Pi_{11,m}^{e2}}{\partial r_2} & \theta \leq \theta_0, \end{cases} \quad (18a)$$

$$\Pi_{11,m}^{\mu 2} = \begin{cases} 0 & \theta \geq \theta_0; \\ \Pi_{11,m}^{\mu 2} & \theta \leq \theta_0, \end{cases} \quad (18b)$$

$$\Pi_{s,m}^{e1} + \Pi_{i,m}^{e1} = \Pi_{11,m}^{e1} \quad \theta \leq \theta_0, \quad (19a)$$

$$\frac{\partial \Pi_{s,m}^{\mu 1}}{\partial r_1} + \frac{\partial \Pi_{i,m}^{\mu 1}}{\partial r_1} = \frac{\partial \Pi_{11,m}^{\mu 1}}{\partial r_1} \quad \theta \leq \theta_0, \quad (19b)$$

$$\Pi_{11,m}^{e2} = \Pi_{11,m}^{e2} \quad \theta \leq \theta_0, \quad (20a)$$

$$\frac{\partial \Pi_{11,m}^{\mu 2}}{\partial r_2} = \frac{\partial \Pi_{11,m}^{\mu 2}}{\partial r_2} \quad \theta \leq \theta_0, \quad (20b)$$

$$\Pi_{11,m}^{e1} = 0 \quad \theta = \theta_0, \quad (21a)$$

$$\frac{\partial \Pi_{11,m}^{\mu 1}}{\partial \theta} = 0 \quad \theta = \theta_0, \quad (21b)$$

其中 $\Pi_m^{e,\mu 1} = \Pi_m^{e,\mu}(r_1, \theta)$, $\Pi_m^{e,\mu 2} = \Pi_m^{e,\mu}(r_2, \theta)$.

利用条件(21)式可以得到 p 取的值. 对 E 波(横磁波) $\theta = \theta_0$ 时,将(4)式代入(21a)式中,得到

$$\sum_p Z_{p,m}^*(Kr) P_p^m(\cos \theta_0) = 0.$$

此式对 $r_1 \leq r \leq r_2$ 都成立,必须

$$P_p^m(\cos \theta_0) = 0. \quad (22a)$$

由此定出 p 应取的值 $p_{e,1}^m, p_{e,2}^m, p_{e,3}^m, \dots, p_{e,n}^m \dots$.

对 H 波, $\theta = \theta_0$ 时,将(4)式代入(21b)式中有

$$\sum_p Z_{p,m}^*(Kr) \frac{d}{d\theta_0} P_p^m(\cos \theta_0) = 0.$$

因此必须

$$\frac{d}{d\theta_0} P_p^m(\cos \theta_0) = 0. \quad (22b)$$

由此定出 p 应取的值 $p_{\mu,1}^m, p_{\mu,2}^m \dots, p_{\mu,n}^m \dots$.

将(3),(4),(6)式代入(17a)式中,得到

$$\sum_n a_{n,m}^e P_n^m S'_{n1} + g_{n,m}^e P_n^m R'_{n1} = \begin{cases} 0 & \theta_0 \leq \theta; \\ \sum_p P_p^m Z_{p,m1}' & \theta_0 \geq \theta. \end{cases}$$

在此式两边乘以 $P_k^m \sin \theta d\theta$, 由 $0-\pi$ 积分, 得到

$$a_{k,m}^e S'_{k1} + g_{k,m}^e R'_{k1} = \sum_p L_{k,p}^m Z_{p,m1}' \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (23a)$$

其中

$$S'_{k1} = \frac{d}{dr_1} s_k(Kr_1) \dots; \quad Z_{p,m1}' = \frac{d}{dr_1} Z_{p,m}^e(r_1, \theta);$$

$$L_{k,p}^m = \int_{x_0}^1 P_k^m(x) P_p^m(x) dx / \int_{-1}^1 [P_k^m(x)]^2 dx \quad (x_0 = \cos \theta_0).$$

将(3),(4),(6)代入(17b)式中, 有

$$\sum_n a_{n,m}^\mu P_n^m S_{n1} + g_{n,m}^\mu P_n^m R_{n1} = \begin{cases} 0 & \theta_0 \leq \theta; \\ \sum_p P_p^m Z_{p,m1}^\mu & \theta_0 \geq \theta. \end{cases}$$

两边乘以 $P_k^m \sin \theta d\theta$, 由 $0-\pi$ 积分, 得到

$$a_{k,m}^\mu S_{k1} + g_{k,m}^\mu R_{k1} = \sum_p L_{k,p}^m Z_{p,m1}^\mu \quad k = 0, 1, 2, \dots. \quad (23b)$$

同理将(4),(5)式代入(18a), (18b) 式中, 分别乘 $P_k^m \sin \theta d\theta$ 在 $0-\pi$ 积分, 得到

$$d_{k,m}^e R'_{k2} = \sum_p L_{k,p}^m Z_{p,m2}', \quad (24a)$$

$$d_{k,m}^\mu R_{k2} = \sum_p L_{k,p}^m Z_{p,m2}^\mu. \quad (24b)$$

将(3),(4),(6)式代入(19a) 式中, 得到

$$\sum_n a_{n,m}^e P_n^m S_{n1} + g_{n,m}^e P_n^m R_{n1} = \sum_p P_p^m Z_{p,m1}^e \quad 0 \leq \theta \leq \theta_0.$$

两边乘以 $P_q^m \sin \theta d\theta$ 由 $0-\theta_0$ 积分, 由于 P_p^m 在区间 $0-\theta_0$ 是正交函数组, 故有

$$\sum_n M_{q,n}^m (a_{n,m}^e S_{n1} + g_{n,m}^e R_{n1}) = Z_{q,m1}^e, \quad (25a)$$

其中本征值 p, q 都由(22a)式确定,

$$M_{q,n}^m = \int_{x_0}^1 P_q^m(x) P_n^m(x) dx / \int_{x_0}^1 [P_q^m(x)]^2 dx.$$

同理对(19b) 式有

$$\sum_n M_{q,n}^m (a_{n,m}^\mu S'_{n1} + g_{n,m}^\mu R'_{n1}) = Z_{q,m1}^{\mu'}. \quad (25b)$$

对(20a) 式有

$$\sum_n M_{q,n}^m d_{n,m}^e R_{n2} = Z_{q,m2}^e. \quad (26a)$$

对(20b) 式有

$$\sum_n M_{q,n}^m d_{n,m}^\mu R'_{n2} = Z_{q,m2}^{\mu'}. \quad (26b)$$

总结上面结果, 我们由边界条件(19)—(21) 式得到分别确定系数 $a_{n,m}^e, b_{p,m}^e, c_{p,m}^e$,

$d_{n,m}^*$ 和 $a_{n,m}^*$, $b_{p,m}^*$, $c_{p,m}^*$, $d_{n,m}^*$ 的两组方程组 (23a)—(26a) 式和 (23b)—(26b) 式. 这两组方程中 (a) 和 (b) 是互相独立的, 它们的解分别代表 E 波和 H 波. 方程组中 n, k 取正整数; p, q 取的值由 (22a), (22b) 式决定, E 波和 H 波是不同的. 这样, 就把求解散射场的边值问题, 演变成求解代数方程组确定散射系数的问题. 后者借助计算机, 是不难获得精确数值解的.

5) 特例

在考虑方程组一般解法以前, 先研究几种特例.

(1) $\theta_0 = 0$. 这相当一封闭的金属球壳. 由 $L_{n,p}^m$ 的定义知道 $L_{n,p}^m = 0$, 从而 (23), (24) 式简化为

$$\begin{aligned} E \text{ 波} \quad & a_{n,m}^* S'_{n1} + g_{n,m}^* R'_{n1} = 0, \\ & d_{n,m}^* R'_{n2} = 0; \\ H \text{ 波} \quad & a_{n,m}^* S_{n1} + g_{n,m}^* R_{n1} = 0, \\ & d_{n,m}^* R_{n2} = 0. \end{aligned}$$

因此有解

$$\begin{aligned} a_{n,m}^* &= -\frac{R'_{n1}}{S'_{n1}} g_{n,m}^*, \quad d_{n,m}^* = 0, \\ a_{n,m}^* &= -\frac{R_{n1}}{S_{n1}} g_{n,m}^*, \quad d_{n,m}^* = 0. \end{aligned}$$

这正是球形空腔强迫振荡的结果. 系数 b, c 未定出, 因为区域 II 不存在.

(2) $\theta_0 = \pi$. 这相当镜面不存在的“散射问题”. 此时 $L_{n,p}^m = M_{p,n}^m = \delta_{n,p}$ (p 也取正整数), E 波方程组简化为

$$\begin{aligned} a_{n,m}^* S'_{n1} + g_{n,m}^* R'_{n1} &= b_{n,m}^* S'_{n1} + c_{n,m}^* R'_{n1}, \\ d_{n,m}^* R'_{n2} &= b_{n,m}^* S'_{n2} + c_{n,m}^* R'_{n2}, \\ a_{n,m}^* S_{n1} + g_{n,m}^* R_{n1} &= b_{n,m}^* S_{n1} + c_{n,m}^* R_{n1}, \\ d_{n,m}^* R_{n2} &= b_{n,m}^* S_{n2} + c_{n,m}^* R_{n2}. \end{aligned}$$

由此得解

$$a_{n,m}^* = b_{n,m}^* = 0, \quad c_{n,m}^* = d_{n,m}^* = g_{n,m}^*.$$

同理对 H 波有解

$$a_{n,m}^* = b_{n,m}^* = 0, \quad c_{n,m}^* = d_{n,m}^* = g_{n,m}^*.$$

这正是镜面不存在时 I 区场向 II, III 区自由辐射.

二、球面天线的辐射场

球面天线具有广角扫描优点, 有一定实用价值. 迄今对这种反射器的理论分析还都是用近似方法. 如口径场理论以及近来发展较快的“衍射的几何(光学)理论”^[6,7] 和“衍射的物理(光学)理论”^[8]. 在这里, 我们应用第一部分得到的系数方程组, 来精确的计算辐射场.

1) 方程组的简化

一般面天线的口径都比波长大得多,即

$$Kr_1 \gg 1. \quad (27)$$

而它的金属反射面却很薄,即

$$Kr_2 - Kr_1 \ll 1. \quad (28)$$

利用这两个条件,可以把系数方程简化并求得系数的解. 下面只考虑 E 波¹⁾, 为了公式写起来简单,暂时略去标记 e 和 m , 记住我们现在是求 E 波第 m 分量的解, 得到解后, 再将标记 e, m 加上.

由于条件(28)式,可以去掉下标 1, 2, 记为 $S_{n1} = S_{n2} = S_n$; $R_{n1} = R_{n2} = R_n; \dots$. 又因 $s_n = \frac{1}{2}(R_n + \bar{R}_n)$, 其中 $\bar{R}_n = Kr_1 h_n^{(1)}(Kr_1)$, 则系数方程 (23a)—(26a) 式简化为

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} a_n \bar{R}'_n + \bar{g}_n R'_n &= \sum_p L_{n,p} Z'_p, \\ d_n R'_n &= \sum_p L_{n,p} Z'_p, \\ \sum_n M_{p,n} \left(\frac{1}{2} a_n \bar{R}'_n + \bar{g}_n R'_n \right) &= Z_p, \\ \sum_n M_{p,n} d_n R'_n &= Z_p, \end{aligned} \quad (29)$$

其中 $\bar{g}_n = g_n + \frac{1}{2} a_n$. 由(29)式的前两式分别解出 a_n, d_n , 再将它代入后两式中并令两式相等,得到

$$\sum_q T_{p,q} Z'_q = G_p, \quad (30)$$

其中

$$T_{p,q} = \sum_k M_{p,k} L_{k,q} \Delta_k, \quad (30a)$$

$$G_p = \sum_k M_{p,k} R'_k \bar{g}_k \Delta_k, \quad (30b)$$

$$\Delta_k = \frac{R_k}{R'_k} - \frac{\bar{R}_k}{\bar{R}'_k}. \quad (30c)$$

这是在 $r_1 \doteq r_2$ 的条件下简化的系数方程. 它比原来方程 (23)—(26) 式数目少了四倍. 方程(30)式右边“常数项” G_p 中包含了未知量 $a_n \left(\bar{g}_n = g_n + \frac{1}{2} a_n \right)$, 这样做的原因下面便知²⁾.

2) 求解

球汉开尔函数在宗量远大于 1 时,可以用渐近展开来表示,

$$R_n \doteq (j)^{n+1} e^{-iKr_1}, \quad \bar{R}_n \doteq (-j)^{n+1} e^{iKr_1}. \quad (31)$$

上式代入 (30c) 式中,

1) 利用系数方程的对称性,只要把解中系数的上标 e 换成 μ , R'_n 换成 R_n , R_n 换成 R'_n 就得到 H 波的解.

2) 解(23)—(26)式时,必须先解出 Z 和 Z' . 通过它们求 a, d . 亦即先求 II 区场. 否则如先消去 Z, Z' (如令(30)式中前两式和后两式分别相等),就反映不出镜面的散射效应.

$$\Delta_k \doteq \frac{2j}{K} = \Delta. \quad (32)$$

它与下标无关,是一常数. 又利用勒让德函数的正交完备性,可以证明

$$\sum_k M_{p,k} L_{k,q} = \delta_{p,q}. \quad (33)$$

这样(30a)式简化为

$$T_{p,q} = \Delta \cdot \delta_{p,q}. \quad (34)$$

将它代入(30)式中,得到解

$$Z'_p = \frac{1}{\Delta} G_p = \sum_k M_{p,k} R'_k \bar{g}_n. \quad (35)$$

再将(35)式代入(29)式中,得到

$$\frac{1}{2} a_n \bar{R}'_n + \bar{g}_n R'_n = \sum_{p,k} L_{n,p} M_{p,k} R'_k \bar{g}_k.$$

又利用勒让德函数的正交完备性,可以证明

$$\sum_p L_{n,p} M_{p,k} = N_{n,k}, \quad (36)$$

其中

$$N_{n,k} = \int_{x_0}^1 P_n(x) P_k(x) dx / \int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx. \quad (36a)$$

从而将上式简化为

$$\frac{1}{2} a_n = \frac{1}{\bar{R}'_n} \sum_k N_{n,k} R'_k \bar{g}_k - \frac{R'_n}{\bar{R}'_n} g_n + \frac{1}{2\bar{R}'_n} \sum_k N_{n,k} R'_k a_k - \frac{R'_n}{2\bar{R}'_n} a_n. \quad (37)$$

为了解出(37)式中的 a_n , 需要专门分析一下等式右边最后两项的物理意义, 并估量它的大小.

3) 发散波和会聚波

利用 $S_n = \frac{1}{2} (R_n + \bar{R}_n)$ 可以把 I 区散射场分解成两部分,

$$\Pi_s = \sum_k a_k S_k P_k(\cos \theta) = \Pi_s^+ + \Pi_s^-, \quad (38)$$

其中

$$\Pi_s^+ = \sum_k \frac{1}{2} a_k R_k P_k(\cos \theta) \quad (38a)$$

代表向外辐射的发散波;

$$\Pi_s^- = \sum_k \frac{1}{2} a_k \bar{R}_k P_k(\cos \theta) \quad (38b)$$

代表向内收缩的会聚波. 它们在反射镜面附近的大小是不同的. 在 $r=r_1-0$, $\theta > \theta_0$ 的金属反射面上只有入射场的一次反射波, 即只有会聚波. 因此 Π_s^+ 代表的发散波 E_θ^+ , E_ϕ^+ 很小, 所以有

$$\frac{\partial}{\partial r_1} \Pi_s^+(r_1, \theta) \doteq 0 \quad \theta_0 \leq \theta \leq \pi. \quad (39)$$

和镜面处情形相反, 在 $r=r_1$, $\theta < \theta_0$ 的假想球面上散射场是被镜面反射经球心后的发散

波, 会聚波 E_{θ} , E_{φ} 很小, 从而有

$$\frac{\partial}{\partial r_1} \Pi_r^-(r_1, \theta) \doteq 0 \quad 0 \leq \theta \leq \theta_0. \quad (40)$$

也就是说, 散射场在 $r = r_1$ 的球面上不同部位性质不同. 用镜面上以反射波为主; 在假想球面上以辐射波为主. 利用这一性质, 容易证明 (37) 式右边最后两项等于零: 将 Π_r^+ 的表达式 (38a) 代入 (39) 式中, 得到

$$\sum_k \frac{1}{2} a_k R'_k P_k(\cos \theta) \doteq 0 \quad \theta_0 \leq \theta \leq \pi. \quad (39a)$$

在此式两边乘以 $P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta$, 并由 $\theta_0 - \pi$ 积分得到

$$\frac{1}{2} a_n R'_n - \sum_k \frac{1}{2} a_k R'_k N_{n,k} \doteq 0. \quad (41)$$

这正是 (37) 式右边最后两项.

4) 解的物理意义

利用 (41) 式就得到了 a_n 的解, 再将 a_n 的解代入 (29) 式中, 最后求得

$$a_n = 2B_n, \quad (42)$$

$$d_n = A_n + B_n, \quad (43)$$

其中

$$A_n = \frac{1}{R'_n} \sum_k N_{n,k} R'_k g_k = \frac{1}{R'_n} \int_{x_0}^1 \left(\frac{\partial}{\partial r_1} \Pi_i^1 \right) P_n(x) dx / \int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx, \quad (44)$$

$$B_n = \frac{1}{R'_n} \sum_k N_{n,k} R'_k g_k - \frac{R'_n}{R'_n} g_n = - \frac{1}{R'_n} \int_{-1}^{x_0} \left(\frac{\partial}{\partial r_1} \Pi_i^1 \right) P_n(x) dx / \int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx. \quad (45)$$

将 (42), (43) 式代入 (3), (5) 式, 就得到 I 区的散射场

$$\Pi_i = \sum_n B_n \bar{R}_n(Kr) P_n(\cos \theta) + \sum_n B_n R_n(Kr) P_n(\cos \theta), \quad (46)$$

和 III 区总场

$$\Pi_{III} = \sum_n A_n R_n(Kr) P_n(\cos \theta) + \sum_n B_n R_n(Kr) P_n(\cos \theta). \quad (47)$$

为了弄清 (46), (47) 式各项的物理意义, 可以将入射波分为直射波和投射波两部分:

$$\frac{\partial}{\partial r} \Pi_i = \frac{\partial}{\partial r} \tilde{\Pi}_i + \frac{\partial}{\partial r} \check{\Pi}_i^{(1)}, \quad (48)$$

其中

$$\frac{\partial}{\partial r} \tilde{\Pi}_i = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial r} \Pi_i & 0 \leq \theta \leq \theta_0; \\ 0 & \theta_0 \leq \theta \leq \pi, \end{cases} \quad (48a)$$

它代表没有射到镜面的直射波.

$$\frac{\partial}{\partial r} \check{\Pi}_i = \begin{cases} 0 & 0 \leq \theta \leq \theta_0; \\ \frac{\partial}{\partial r} \Pi_i & \theta_0 \leq \theta \leq \pi, \end{cases} \quad (48b)$$

1) 因电场 E_{θ} , $E_{\varphi} \sim \frac{\partial}{\partial r} \Pi^*$, 所以考虑 Π 对 r 的偏微商.

它代表射向镜面的投射波。今将 $\tilde{\Pi}_i$ 和 $\check{\Pi}_i$ 展开为

$$\tilde{\Pi}_i = \sum_n f_n R_n(Kr) P_n(\cos \theta), \quad (49)$$

$$\check{\Pi}_i = \sum_n h_n R_n(Kr) P_n(\cos \theta), \quad (50)$$

其中

$$f_n = \frac{1}{R'_n} \int_{x_0}^1 \left(\frac{\partial}{\partial r_1} \Pi_i^1 \right) P_n(x) dx / \int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx, \quad (49a)$$

$$h_n = \frac{1}{R'_n} \int_{-1}^{x_0} \left(\frac{\partial}{\partial r_1} \Pi_i^1 \right) P_n(x) dx / \int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx. \quad (50a)$$

将 f_n , h_n 和 A_n , B_n 表达式(44), (45)比较, 显见

$$A_n = f_n, \quad (51)$$

$$B_n = - \frac{R'_n}{\bar{R}'_n} h_n. \quad (52)$$

因此, 散射场 Π_s 和辐射场 Π_{III} 可以表示成

$$\Pi_{\text{III}} = \tilde{\Pi}_i + \Pi_s^+, \quad \Pi_s = \Pi_s^+ + \Pi_s^-, \quad (53)$$

其中

$$\tilde{\Pi}^i = \sum_n f_n R_n(Kr) P_n(\cos \theta), \quad (53a)$$

代表入射波未经反射而直射空间部分, 即直射波.

$$\Pi_s^+ = \sum_n - \frac{R'_n}{\bar{R}'_n} h_n R_n(Kr) P_n(\cos \theta), \quad (53b)$$

代表反射波射向空间部分, 即发散波. 因为式中系数 B_n 是投射波的系数 h_n 乘上相位因子 $\left(-\frac{R'_n}{\bar{R}'_n}\right)$, 因子中负号表示在镜面反射时有 180° 相位变化, $\frac{R'_n}{\bar{R}'_n}$ 表示程差引起的相位差.

最后第三项

$$\Pi_s^- = \sum_n - \frac{R'_n}{\bar{R}'_n} h_n \bar{R}_n(Kr) P_n(\cos \theta) \quad (53c)$$

则表示反射波的会聚部分, 即会聚波. (53)式说明: III 区的辐射场是由反射波的发散部分和直射波构成; I 区的散射场由反射波的发散部分和会聚部分构成. 这一结果和几何光学的概念是一致的. 正好说明, 在波长远小于口径尺寸时, 电磁波的绕射效应很弱, 它的散射服从反射定律.

最后, 再讨论一下解(46), (47)式的合理性. 即验证一下它们在 $Kr_1 \gg 1$ 的条件下, 是否满足边界条件(17)–(21)式和对镜面发散波的推测(39), (40)式. 由于系数 a_n , d_n 满足(29)式, 容易证明, 在 $r = r_1 \doteq r_2$, $0 \leq \theta \leq \theta_0$ 的假想球面处总场连续, $\frac{\partial}{\partial r_1} (\Pi_i^1 + \Pi_s^1) = \frac{\partial}{\partial r_2} \Pi_{\text{III}}^1$. 再将(46), (47)式代入, 就得到 $\frac{\partial}{\partial r_1} \Pi_s^-(r_1, \theta) = 0$. 这正是(40)式. 下节将反射镜的具体数值代入, 还可以证明: 在 $r = r_2 + 0$, $\theta_0 \leq \theta \leq \pi$ 的反射镜外面, 总场等于零, 即 $\frac{\partial}{\partial r_2} \Pi_{\text{III}}^1 = 0$. 再将(53)式代入, 就得到 $\frac{\partial}{\partial r_1} \Pi_s^+(r_1, \theta) = 0$. 表明前面认为在镜面发散

波很小的推测是正确的。

5) 一般情形

现在再把上面得到的解加上标记 e , m 恢复原来面目, 对 E 波 m 分量有

$$a_{n,m}^e = 2B_{n,m}^e, \quad (54)$$

$$d_{n,m}^e = A_{n,m}^e + B_{n,m}^e, \quad (55)$$

其中

$$A_{n,m}^e = \frac{1}{R'_n} \sum_k N_{n,k}^m R'_k g_{k,m}^e = \frac{1}{R'_n} \int_{x_0}^1 \left(\frac{\partial}{\partial r_1} \Pi_{i,m}^{e,1} \right) P_n^m(x) dx / \int_{-1}^1 [P_n^m(x)]^2 dx, \quad (56)$$

$$\begin{aligned} B_{n,m}^e &= \frac{1}{\bar{R}'_n} \sum_k N_{n,k}^m R'_k g_{k,m}^e - \frac{R'_n}{\bar{R}'_n} g_{n,m}^e \\ &= -\frac{1}{\bar{R}'_n} \int_{-1}^{x_0} \left(\frac{\partial}{\partial r_1} \Pi_{i,m}^{e,1} \right) P_n^m(x) dx / \int_{-1}^1 [P_n^m(x)]^2 dx \end{aligned} \quad (57)$$

和

$$\Pi_{11,m}^e = \sum_n A_{n,m}^e R_n(Kr) P_n^m(\cos \theta) + \sum_n B_{n,m}^e R_n(Kr) P_n^m(\cos \theta), \quad (58)$$

$$\Pi_{i,m}^e = \sum_n B_{n,m}^e \bar{R}_n(Kr) P_n^m(\cos \theta) + \sum_n B_{n,m}^e R_n(Kr) P_n^m(\cos \theta). \quad (59)$$

解(54)–(59)式是在 $Kr_1 \gg 1$ 的条件下得到的。如果这一条件不满足, 可以把它当作零级近似, 用逐次逼近法求解。这时需要把第二部分 2), 3) 两节中略去的小量考虑进去。下面来考虑这些修正。

在一般情形下, Δ_k 不是常数, 但接近常数, 即

$$\Delta_k - \Delta \ll \Delta. \quad (60)$$

此时 (30a) 式应写成

$$T_{p,q}^m = \Delta \delta_{p,q} + \sum_k M_{p,k}^m L_{k,q}^m (\Delta_k - \Delta). \quad (61)$$

右边第二项是小量。 (30b) 式应写成

$$G_{p,m}^e = \sum_k M_{p,k}^m R'_k \bar{g}_{k,m}^e \Delta + \sum_k M_{p,k}^m R'_k \bar{g}_{k,m}^e (\Delta_k - \Delta). \quad (62)$$

上式右边第二项也是小量。将 (61), (62) 式代入 (30) 式中解出

$$Z_{p,m}^{e'} = \sum_k M_{p,k}^m R'_k \bar{g}_{k,m}^e - \sum_k M_{p,k}^m \bar{R}'_k \frac{1}{2} a_{k,m}^e \left(\frac{\Delta_k}{\Delta} - 1 \right). \quad (63)$$

将 (63) 式代入 (29) 式, 得到

$$a_{n,m}^e = 2B_{n,m}^e + 2 \frac{R'_n}{\bar{R}'_n} \gamma_{n,m}^e, \quad (64)$$

$$d_{n,m}^e = A_{n,m}^e + B_{n,m}^e + \left(1 + \frac{R'_n}{\bar{R}'_n} \right) \gamma_{n,m}^e, \quad (65)$$

式中小量 $\gamma_{n,m}^e$ 由两部分构成:

$$\begin{aligned} \gamma_{n,m}^e &= -\frac{1}{R'_n} \sum_k L_{n,k}^m \bar{R}'_k \frac{1}{2} a_{n,m}^e \left(\frac{\Delta_k}{\Delta} - 1 \right) \\ &\quad - \frac{1}{R'_n} \sum_k (\delta_{n,k} - N_{n,k}^m) R'_k \frac{1}{2} a_{k,m}^e. \end{aligned} \quad (66)$$

上式第一部分是 $Z'_{p,m}$ 的修正量, 由于 $\left(\frac{\Delta_k}{\Delta} - 1\right)$ 很小, 它是一小量; 第二部分是镜面发散波的修正量, 即发散波在镜面绕射的贡献, 它也是一小量. 而且可以证明, 将零级解代入后它等于零, 是更高一级的小量, 可以把它忽略. 这样一般情形下解方程组(23)–(26)式的问题, 就变成了用叠代法计算

$$a'_{n,m} = 2B'_{n,m} + \sum_k D'_{n,k} a'_{k,m} \quad (67)$$

的问题, 其中

$$D'_{n,k} = \frac{1}{R'_n} N'_{n,k} \bar{R}'_k \left(1 - \frac{\Delta_k}{\Delta}\right) \quad (67a)$$

是 $(kr_1)^{-1}$ 形式的一级小量.

6) 半球形反射器

作为例子, 考虑 $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ 情形. 首先看一下半球形反射器辐射场的特性, 再计算几种辐射图形.

(1) 本征函数和本征值 由(22a), (22b)式确定的本征函数在 $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ 时很容易得到. 利用 $P'_n(\cos\theta)$ 的奇偶性可以证明此时勒让德函数 P'_n 退化成多项式. 对 E 波 $p + |m|$ 取奇数, 对 H 波 $p + |m|$ 取偶数.

(2) 辐射场的性质 利用半球的对称性, 不难证明

$$[1 + (-)^{n+k}] N'_{n,k} = \delta_{n,k}. \quad (68)$$

将(68)式代入(58)式中, 得到

$$\Pi'_{\text{III},m}(r, \theta) = \sum_{n,k} [1 + (-)^{k+1} e^{-2jKr_1}] N'_{n,k} \frac{R'_k}{R'_n} g'_{k,m} R'_n(Kr) P'_n(\cos\theta).$$

再将 $N'_{n,k}$ 的表达式(36a)代入, 计算 $r = r_2$ 时辐射场, 得到

$$\frac{\partial}{\partial r_2} \Pi'^2_{\text{III},m} = \sum_k [1 + (-)^{k+1} e^{-2jKr_1}] g'_{k,m} R'_k \int_0^1 P'_k(x') \delta(x - x') dx',$$

式中 $x = \cos\theta$, $\delta(x - x') = \begin{cases} x = x'; \\ x \neq x'. \end{cases}$ 由此得到

$$\frac{\partial}{\partial r_2} \Pi'^2_{\text{III},m} = \begin{cases} \sum_k [1 + (-)^{k+1} e^{-2jKr_1}] g'_{k,m} R'_k P'_k(\cos\theta) & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}; \\ 0 & \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi. \end{cases} \quad (69)$$

此式说明(58), (59)式表示的解满足边界条件(18a)式, 这正是第二部分4)节最后验证解时需要证明的结果.

(3) 球心偶极子的辐射场 要满足上述的渐近展开的条件(31)式, 除需球径远大于波长外, 还要求入射场展开式(6)中高阶波分量小. 这就要求场源在球心附近. 下面来计算两种偶极子源反射后的辐射场.

a) 球心 z 向电偶极子 它的赫兹电矢量为

$$\Pi_z = h_0^{(2)}(Kr) P_0(\cos\theta). \quad (70)$$

将它分解为 E 波和 H 波¹⁾, 得到

$$g_{n,m}^e = \begin{cases} 1 & n=1, m=0, \\ 0 & n \neq 1, m \neq 0; \end{cases} \quad g_{n,m}^h = 0. \quad (71)$$

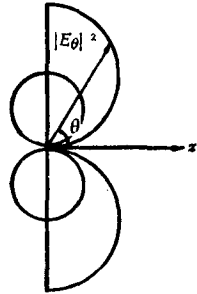
将(71)式代入(69)式, 得到

$$\frac{\partial}{\partial r} \Pi_{III}^e = \begin{cases} (1 + e^{-j2Kr_1}) P_1(\cos \theta) R_1'(Kr) & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}; \\ 0 & \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi. \end{cases} \quad (72)$$

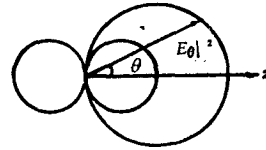
再将(72)式代入(1)式中, 最后得到

$$E_\theta = \begin{cases} (1 + e^{-j2Kr_1}) \sin \theta \frac{e^{-jKr}}{r} & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}; \\ 0 & \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi. \end{cases} \quad (73)$$

其辐射图形如图 2 所示, 图中双圆是偶极子自身方向图.



(a) z 向偶极子反射方向图



(b) y 向偶极子反射方向图

图 2

b) 球心 y 向电偶极子 它的赫兹电矢量为

$$\Pi_y = h_0^{(2)}(Kr) P_0(\cos \theta). \quad (74)$$

将它分解为 E, H 波, 得到

$$g_{n,m}^e = \begin{cases} \pm \frac{1}{2j} & n=1, m=\pm 1, \\ 0 & n \neq 1, m \neq 1; \end{cases} \quad g_{n,m}^h = 0. \quad (75)$$

将(75)式代入(69)式, 得到

$$\frac{\partial}{\partial r} \Pi_{III}^e = \begin{cases} (1 + e^{-j2Kr_1}) P_1'(\cos \theta) R_1'(Kr) \frac{1}{2j} (e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}) & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}; \\ 0 & \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi. \end{cases} \quad (76)$$

再代入(1)式, 最后得到

1) 利用(1)式 E , 只与 Π^e 有关, H , 只与 Π^h 有关的性质, 可以把入射场分解为 E 波和 H 波.

$$E_{\theta} = \begin{cases} (1 + e^{-j2Kr_1}) \cos \theta \sin \varphi \frac{e^{-jKr}}{r} & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}; \\ 0 & \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi. \end{cases} \quad (77)$$

辐射图形如图 2 所示. 公式(73), (77)还表示了反射波和直射波的相干效应, 当 $2Kr_1 = 2n\pi$ 时, 相互加强; 当 $2Kr_1 = (2n+1)\pi$ 时, 相互抵消.

结 语

以上利用分区边界条件, 将求解散射场的边值问题, 演化成求解系数方程组的代数问题. 对于大多数二次镜面, 都可以用十一种可分离变量坐标系的三个坐标面来包围. 因此本文采用的定解办法, 有一定的普遍意义, 可以解决一系列复杂镜面的散射问题.

本文在写作中得到任朗先生的帮助和鼓励, 在此顺致谢意.

参 考 文 献

- [1] S. A. Schelkunoff, *P. I. R. E.*, 29 (1941), 493.
- [2] C. C. Rogers, J. K. Schindler and F. Y. Schultz, *Electromagnetic Theory and Antennas*, p. 67.
- [3] J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory*.
- [4] И. М. 雷日克, И. С. 格拉德什坦, 函数表与积分表.
- [5] 王竹溪、郭敦仁, 特殊函数概论, 科学出版社.
- [6] J. B. Keller, *J. Opt. Soc. Amer.*, 52 (1962), 116.
- [7] S. W. Lee, *IEEE Trans. A. P.*, 25 (1977), 162.
- [8] P. Ya. Ufimtsev, Air Force System Command, Foreign Tech. Div. Document ID No. FTD-HC-23-259-71 (1971).

ON THE THEORY OF SCATTERING BY A SPHERICAL MIRROR

SHEN HAO-MING

ABSTRACT

In the present paper, a method of calculating scattering field by a spherical mirror is introduced. Three coordinate surfaces of the spherical coordinate system are used to surround the mirror and separate the space into three regions, in each of which the general solution have been worked out, respectively. Then by making use of the boundary-condition, we obtain a group of equations, by which the coefficients are determined. This equations are used for calculating the radiating field of spherical antennas. The analytic solutions are obtained.