

研究简报

具有双相变点的一种三维氢键模型*

孙 鑫
(复 旦 大 学)

假设在金刚石晶格的相邻格点间有一氢键,每一氢键上的质子有两个平衡位置,因而可用三维八顶点模型来描述^[1],这种氢键模型是一种铁电晶体,其序参量是极化强度 p . 由于奇数层与偶数层上的格点是不等价的,因而两者的能量参数 ε_i 和 $\varepsilon'_i (i=1, 2, \dots, 8)$ 不同. 本文将讨论满足 $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_3 + \varepsilon_4, \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 = \varepsilon'_3 + \varepsilon'_4$ 的这种铁电模型的相变,特别是讨论相变点附近的极化关联的范围. 结果发现该模型有两个特点: 1) 它存在两个二级相变点,目前能严格求解的其它模型^[2-4]都只有一个相变点. 2) 在高相变点上,极化关联长度保持有限,而现在一般认为,二级相变时关联长度在相变点上趋向无限.

一、等效哈密顿量

为了将上述氢键晶体的能量写成哈密顿形式,可按文献[1]中的方法引进对偶自旋晶格(见文献[1]中图 1). 假设奇数层格点 i 周围的四个自旋 s_i, s'_i, s''_i 和 s'''_i (见文献[1]中图 3, 空间位置见本文图 1) 之间存在如下相互作用,

$$H_i = -I - J_0 s_i s'_i - J_e s_i s''_i - J_4 s_i s'_i s''_i s'''_i. \quad (1.1)$$

在偶数层格点 i' 周围的四个自旋存在如下相互作用,

$$H_{i'} = -I' - J'_0 s_{i'} s'_{i'} - J'_e s_{i'} s''_{i'} - J'_4 s_{i'} s'_{i'} s''_{i'} s'''_{i'}. \quad (1.2)$$

按如下方法选择自旋间相互作用常数:

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{4}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4), & J_0 &= \frac{1}{4}(\varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_1 - \varepsilon_4), \\ J_e &= \frac{1}{4}(\varepsilon_2 + \varepsilon_4 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3), & J_4 &= \frac{1}{4}(\varepsilon_3 + \varepsilon_4 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2), \\ I' &= -\frac{1}{4}(\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 + \varepsilon'_3 + \varepsilon'_4), & J'_0 &= \frac{1}{4}(\varepsilon'_2 + \varepsilon'_4 - \varepsilon'_1 - \varepsilon'_3), \\ J'_e &= \frac{1}{4}(\varepsilon'_2 + \varepsilon'_3 - \varepsilon'_1 - \varepsilon'_4), & J'_4 &= \frac{1}{4}(\varepsilon'_3 + \varepsilon'_4 - \varepsilon'_1 - \varepsilon'_2), \end{aligned} \quad (1.3)$$

则奇、偶层格点上的八种顶点的能量(见文献[1]中图 2)可用(1.1)和(1.2)式来表示,整个晶格的哈密顿量为

* 1977 年 12 月 12 日收到.

$$H = \sum_i H_i + \sum_{i'} H_{i'}. \quad (1.4)$$

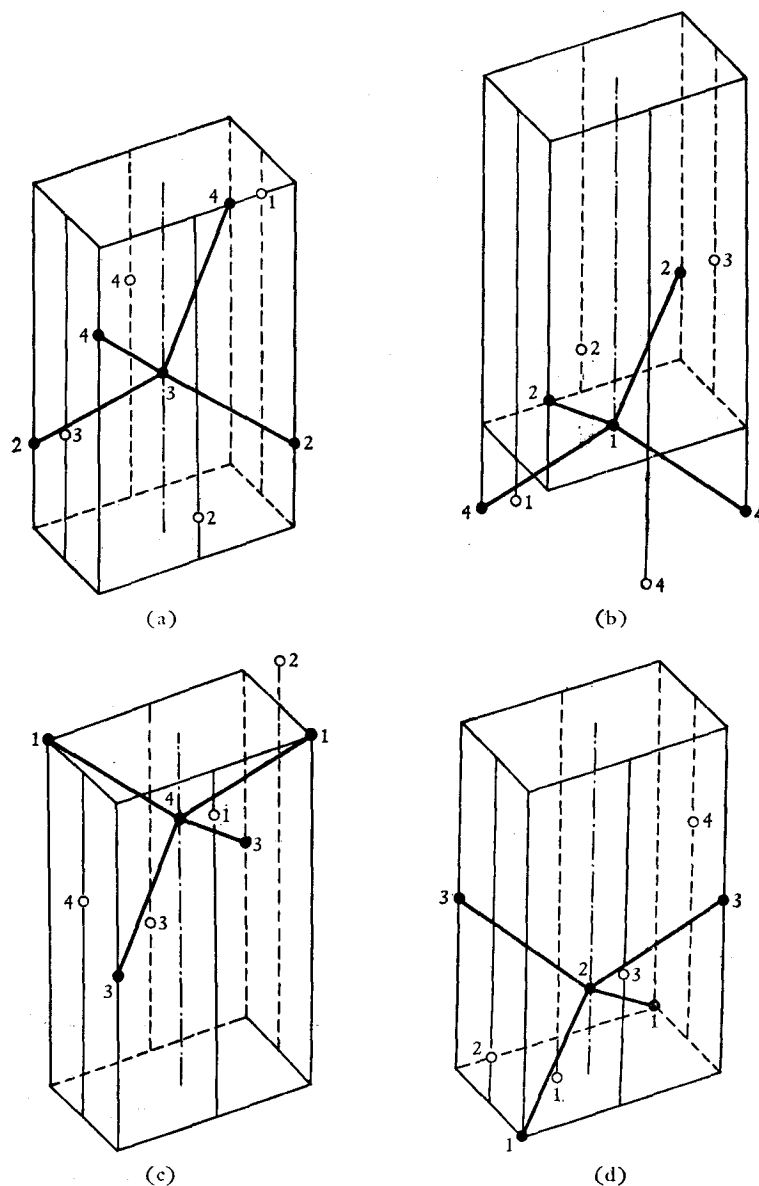


图1 各层原子格点周围的自旋格点的空间位置分布(黑点是原晶格,圆圈是自旋)

二、极化强度

氢键晶格的序参量是极化强度 $\mathbf{P}(\mathbf{i})$, 为了便于计算极化关联函数, 可将极化强度用自旋来表示.

若对三维氢键晶格加上不均匀的外电场 $\mathbf{E}(\mathbf{i})$,

$$\mathbf{E}(\mathbf{i}) = E_1(\mathbf{i})\mathbf{l}_1 + E_2(\mathbf{i})\mathbf{l}_2 + E_3(\mathbf{i})\mathbf{l}_3,$$

其中 $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3$ 的方向各为 $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (0, 0, 1)$.

由于氢键在外电场中具有能量, 于是整个氢键晶体在外电场中的哈密顿量变为

$$\begin{aligned} \bar{H} = H + \sum_i & \left[-\sqrt{\frac{2}{3}} E_1(\mathbf{i})(s_i s'_i + s''_i s'''_i) - \sqrt{\frac{2}{3}} E_2(\mathbf{i})(s_i s'''_i + s'_i s''_i) \right. \\ & \left. + \frac{1}{\sqrt{3}} E_3(\mathbf{i})(s'_i + s'''_i)(s''_i - s_i) \right] + \sum_{i'} \left[-\sqrt{\frac{2}{3}} E_1(\mathbf{i}')(s_{i'} s'_{i'} + s''_{i'} s'''_{i'}) \right. \\ & \left. - \sqrt{\frac{2}{3}} E_2(\mathbf{i}')(s_{i'} s'''_{i'} + s'_{i'} s''_{i'}) - \frac{1}{\sqrt{3}} E_3(\mathbf{i}')(s'_{i'} + s'''_{i'})(s''_{i'} - s_{i'}) \right]. \quad (2.1) \end{aligned}$$

由此可得奇、偶层格点上的极化强度分别为

$$\begin{aligned} P_1(\mathbf{i}) &= -\frac{\partial \bar{H}}{\partial E_1(\mathbf{i})} = \sqrt{\frac{2}{3}} (s_i s'_i + s''_i s'''_i), & P_2(\mathbf{i}) &= \sqrt{\frac{2}{3}} (s_i s'''_i + s'_i s''_i), \\ P_3(\mathbf{i}) &= -\frac{1}{\sqrt{3}} (s'_i + s'''_i)(s''_i - s_i), & P_1(\mathbf{i}') &= -\frac{\partial \bar{H}}{\partial E_1(\mathbf{i}')} = \sqrt{\frac{2}{3}} (s_{i'} s'_{i'} + s''_{i'} s'''_{i'}), \\ P_2(\mathbf{i}') &= \sqrt{\frac{2}{3}} (s_{i'} s'''_{i'} + s'_{i'} s''_{i'}), & P_3(\mathbf{i}') &= \frac{1}{\sqrt{3}} (s'_{i'} + s'''_{i'})(s''_{i'} - s_{i'}). \quad (2.2) \end{aligned}$$

可见极化强度各分量中的每一项都是两个自旋的乘积, 而且在这两个相乘的自旋中, 一个属奇数层 (记为 $s_i^{(o)}$), 另一个属偶数层 (记为 $s_i^{(e)}$).

三、可解理的三维八顶点模型

如果奇、偶层上的能量参数分别满足

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_3 + \varepsilon_4, \quad \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 = \varepsilon'_3 + \varepsilon'_4, \quad (3.1)$$

则三维自旋晶格可解理成两组二维自旋晶格 (注意氢键晶格并不解理). 由哈密顿量 (1.1), (1.2) 式可见:

1) $J_4 = J'_4 = 0$, 因而只有两个自旋间的相互作用.

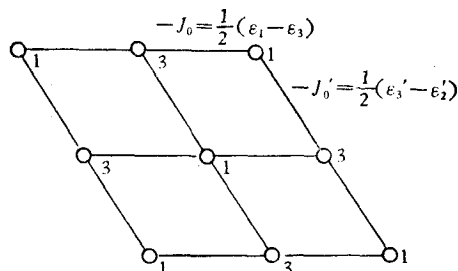


图2 晶面 $(\bar{1}, 1, 1)$ 上的二维 Ising 晶格

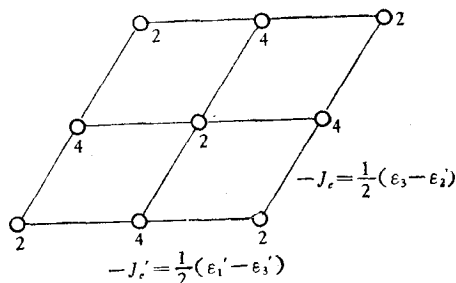


图3 晶面 $(\bar{1}, 1, 1)$ 上的二维 Ising 晶格

2) 奇、偶层自旋之间无作用, 因而金刚石结构分解成两个面心立方的自旋子晶格.

3) 在奇数层自旋子晶格内, 只有同一晶面 $(\bar{1}, 1, 1)$ 上相邻的自旋间有作用, 于是沿此晶面解理成二维晶格 (图 2).

4) 在偶数层自旋子晶格内, 只有同一晶面 $(\bar{1}, \bar{1}, 1)$ 上相邻自旋间有作用, 于是沿此晶面解理成二维晶格 (图 3).

因此, 该三维氢键模型的自由能 F 就是这两组晶面上的 Ising 模型的自由能之和,

$$F = \frac{N}{4} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2) - \frac{NkT}{4\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi \ln \left\{ \left[\text{ch} \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}{kT} \text{ch} \frac{\varepsilon'_2 - \varepsilon'_3}{kT} - \text{sh} \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}{kT} \cos \omega \right. \right. \\ \left. \left. - \text{sh} \frac{\varepsilon'_2 - \varepsilon'_3}{kT} \cos \omega' \right] \left[\text{ch} \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{kT} \text{ch} \frac{\varepsilon'_3 - \varepsilon'_1}{kT} - \text{sh} \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{kT} \cos \omega \right. \right. \\ \left. \left. - \text{sh} \frac{\varepsilon'_3 - \varepsilon'_1}{kT} \cos \omega' \right] \right\} d\omega d\omega'. \quad (3.2)$$

它有两个奇点 (每组 Ising 模型各有一个), 因而该氢键模型有两个二级相变点 T_o 和 T_e , 分别由下式决定,

$$\text{sh} \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}{kT_o} \text{sh} \frac{\varepsilon'_2 - \varepsilon'_3}{kT_o} = 1, \quad \text{sh} \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{kT_e} \text{sh} \frac{\varepsilon'_3 - \varepsilon'_1}{kT_e} = 1. \quad (3.3)$$

注意 T_o 和 T_e 是由 ε_i 和 ε'_i 混合决定的, 下面设 $T_e > T_o$.

四、极化关联函数

上面已指出极化强度的每一项都是 $s_i^{(0)} s_j^{(e)}$, 因而极化关联函数

$$(\langle P(i)P(j) \rangle - \langle P(i) \rangle \langle P(j) \rangle)$$

中的每项都具有下述形式:

$$g(R, T) = \langle s_i^{(0)} s_m^{(0)} \rangle \langle s_{i'}^{(e)} s_{m'}^{(e)} \rangle - \langle s_i^{(0)} \rangle^2 \langle s_{i'}^{(e)} \rangle^2.$$

下面分别讨论极化关联在两个相变点附近的行为.

1) 在低相变点 T_o 附近

(1) $T \lesssim T_o$.

a) $P(i)$ 和 $P(j)$ 位于晶面 $(\bar{1}, 1, 1)$ 近旁, 此时 $s_i^{(0)}$ 和 $s_m^{(0)}$ 在同一晶面 $(\bar{1}, 1, 1)$ 上, 两者有关联. 但 $s_{i'}^{(e)}$ 和 $s_{m'}^{(e)}$ 不在 $(\bar{1}, \bar{1}, 1)$ 上, 两者无关联, 于是 $\langle s_{i'}^{(e)} s_{m'}^{(e)} \rangle = \langle s_{i'}^{(e)} \rangle^2$.

所以 $g(R, T) = \langle s_{i'}^{(e)} \rangle^2 (\langle s_i^{(0)} s_m^{(0)} \rangle - \langle s_i^{(0)} \rangle^2) \sim (T_o - T)^{\frac{1}{4}} f_{<}(R(T_o - T))$. (4.1)

由 $f_{<}$ 的渐近性质可知^[5], 关联长度 $\xi \sim \frac{1}{T_o - T}$ 趋向无限 ($T \rightarrow T_o$).

b) $P(i)$ 和 $P(j)$ 位于晶面 $(\bar{1}, \bar{1}, 1)$ 近旁. 此时 $s^{(e)}$ 是相关的, $s^{(0)}$ 不相关, 于是

$$g(R, T) = \langle s_i^{(0)} \rangle^2 (\langle s_{i'}^{(e)} s_{m'}^{(e)} \rangle - \langle s_{i'}^{(e)} \rangle^2).$$

在 T_o 附近, 偶数层自旋关联长度是有限的, 根据文献 [6],

$$g(R, T) \sim \frac{(T_o - T)^{1/4}}{R^2} \exp \left(-\frac{2R}{\xi^{(e)}(T_o)} \right) \quad (R \rightarrow \infty). \quad (4.2)$$

所以沿 $(\bar{1}, \bar{1}, 1)$ 面只有有限的极化关联长度 $\xi^{(e)}(T_o)$:

$$\xi^{(e)}(T_o) = \frac{a_o}{\sqrt{2 \ln(Z_2^*/Z_1)}}, \left(Z_1 = \text{th} \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{2kT_o}, Z_2^* = \frac{1 - Z_2}{1 + Z_2}, Z_2 = \text{th} \frac{\varepsilon_3' - \varepsilon_1'}{2kT_o} \right). \quad (4.3)$$

c) $P(i)$ 和 $P(j)$ 位于其它方位. 此时 $s^{(0)}$ 和 $s^{(e)}$ 都无关联, 因而无极化关联.

(2) $T \geq T_o$.

a) $P(i)$ 和 $P(j)$ 位于 $(\bar{1}, 1, 1)$ 近旁.

$$g(R, T) = \langle s_i^{(e)} \rangle^2 (\langle s_i^{(0)} s_m^{(0)} \rangle - \langle s_i^{(0)} \rangle^2) \sim (T - T_o)^{\frac{1}{4}} f_{>}(R(T - T_o)). \quad (4.4)$$

极化关联长度 $\xi \sim \frac{1}{T - T_o}$, 它可趋向无限 ($T \rightarrow T_o$).

b) $P(i)$ 和 $P(j)$ 位于 $(\bar{1}, \bar{1}, 1)$ 近旁. 由于 $\langle s_i^{(0)} s_m^{(0)} \rangle = \langle s_i^{(0)} \rangle \langle s_m^{(0)} \rangle = 0$,

所以 $g(R, T) = \langle s_i^{(e)} \rangle^2 (\langle s_i^{(e)} s_m^{(e)} \rangle - \langle s_i^{(e)} \rangle \langle s_m^{(e)} \rangle) = 0$.

故沿晶面 $(\bar{1}, \bar{1}, 1)$ 无关联.

c) $P(i)$ 和 $P(j)$ 位于其它方位也无关联.

(3) $T = T_o$.

当 $P(i)$ 和 $P(j)$ 位于晶面 $(\bar{1}, 1, 1)$ 近旁时, 因为

$$\langle s_i^{(e)} s_m^{(e)} \rangle = \langle s_i^{(e)} \rangle^2, \quad \langle s_i^{(0)} s_m^{(0)} \rangle - \langle s_i^{(0)} \rangle^2 \sim \frac{1}{R^{1/4}},$$

$$\text{所以} \quad g(R, T) = \langle s_i^{(e)} \rangle^2 (\langle s_i^{(0)} s_m^{(0)} \rangle - \langle s_i^{(0)} \rangle^2) \sim \frac{1}{R^{1/4}}, \quad (4.5)$$

在其它方向上无关联.

综上所述, 在低相变点 T_o 附近, 只有沿晶面 $(\bar{1}, 1, 1)$ 方向有长程极化关联, 其临界指数为

$$\nu = \nu' = 1, \quad \eta = \frac{1}{4}. \quad (4.6)$$

2) 在高相变点 T_e 附近

(1) $T \lesssim T_e$.

a) $P(i)$ 和 $P(j)$ 位于晶面 $(\bar{1}, 1, 1)$ 近旁

$$g(R, T) = \langle s_i^{(e)} \rangle^2 (\langle s_i^{(0)} s_m^{(0)} \rangle - \langle s_i^{(0)} \rangle^2).$$

因为奇数层自旋晶格的临界点在 T_o 上, 因而在 T_e 附近时, 它的自旋关联长度是有限的, 利用文献 [6] 中结果可得

$$g(R, T) \sim \frac{(T_e - T)^{1/4}}{\sqrt{R}} \exp \left(-\frac{R}{\xi^{(0)}(T_e)} \right) \quad (R \rightarrow \infty). \quad (4.7)$$

所以沿 $(\bar{1}, 1, 1)$ 面只有有限的极化关联长度 $\xi^{(0)}(T_e)$,

$$\xi^{(0)}(T_e) = \frac{a_o}{\sqrt{2 \ln(Z_2^*/Z_1')}}, \left(Z_1' = \text{th} \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}{2kT_e}, Z_2^* = \frac{1 - Z_2'}{1 + Z_2'}, Z_2' = \text{th} \frac{\varepsilon_2' - \varepsilon_1'}{2kT_e} \right). \quad (4.8)$$

b) 在其它方向, $\langle s_i^{(0)} s_m^{(0)} \rangle = \langle s_i^{(0)} \rangle \langle s_m^{(0)} \rangle = 0$, 故无极化关联.

(2) $T \geq T_e$.

a) $P(i)$ 和 $P(j)$ 位于晶轴 $[1, 0, 1]$ 近旁. 此时 $s_i^{(0)}$ 和 $s_m^{(0)}$ 可在同一晶面 $(\bar{1}, 1, 1)$ 上, 同时 $s_i^{(e)}$ 和 $s_m^{(e)}$ 可在同一晶面 $(\bar{1}, \bar{1}, 1)$ 上, 它们都是相关的, 于是

$$\langle s_i^{(0)} s_m^{(0)} \rangle \sim \frac{1}{\sqrt{R}} \exp \left(-\frac{R}{\xi^{(0)}(T)} \right), \quad \langle s_i^{(\epsilon)} s_m^{(\epsilon)} \rangle \sim \frac{1}{\sqrt{R}} \exp \left(-\frac{R}{\xi^{(\epsilon)}(T)} \right),$$

$$(T \rightarrow T_c + 0, R \rightarrow \infty).$$

因为 $\xi^{(\epsilon)} \sim \frac{1}{T - T_c}$, $\xi^{(0)}(T_c)$ 有限, 所以 $\xi^{(\epsilon)} \gg \xi^{(0)}$, $(T \rightarrow T_c)$.

故
$$g(R, T) = \langle s_i^{(0)} s_m^{(0)} \rangle \langle s_i^{(\epsilon)} s_m^{(\epsilon)} \rangle \sim \frac{1}{R} \exp \left(-\frac{R}{\xi^{(0)}(T)} \right). \quad (4.9)$$

b) $P(i)$ 和 $P(j)$ 在其它方位无关联(因为 $\langle s_i^{(\epsilon)} \rangle = \langle s_i^{(0)} \rangle = 0$).

综上所述, 在高相变点 T_c 附近, 无长程关联. 当 $T < T_c$ 时只有沿 $(\bar{1}, 1, 1)$ 面有短程关联, 当 $T \geq T_c$ 时只剩下晶轴 $[1, 0, 1]$ 上有短程关联, 其它方向皆无关联.

极化关联随温度的变化见下表.

极化关联长度 方 向	温 度		T_c	
	T_c		$T \rightarrow T_c - 0$	$T \rightarrow T_c + 0$
晶面 $(\bar{1}, 1, 1)$	∞	∞	有限	0
晶面 $(\bar{1}, \bar{1}, 1)$	有限	0	0	0
晶轴 $(1, 0, 1)$	∞	∞	有限	有限
其 它 方 向	0	0	0	0

五、极 化 率

因为
$$\chi = \left. \frac{\partial p}{\partial E} \right|_{E=0} = \sum_j (\langle P(i)P(j) \rangle - \langle P(i) \rangle \langle P(j) \rangle), \quad (5.1)$$

所以由上节所得的极化关联函数可得极化率 χ .

1) 在 T_c 附近 利用 (4.1) 和 (4.4) 式可得

$$\chi \Big|_{\substack{T_c+0 \\ T_c-0}} \sim \int_0^\infty |T_c - T|^{\frac{1}{2}} f_{\frac{1}{2}}(R|T_c - T|) 2\pi R dR = \frac{2\pi}{|T_c - T|^{7/4}} \int_0^\infty f_{\frac{1}{2}}(x) x dx$$

$$\sim |T_c - T|^{-\frac{7}{4}} \quad (5.2)$$

所以
$$\gamma = \gamma' = \frac{7}{4} \quad (T \sim T_c). \quad (5.3)$$

2) 在 T_c 附近 当 $T \rightarrow T_c$ 时, 由于极化关联长度 $\xi^{(0)}$ 保持有限, 因此极化关联函数 $g(R, T) \sim e^{-\frac{R}{\xi^{(0)}}}$ 随 R 的增加而指数下降, 于是 (5.1) 式中对 R 的积分不会发散. 这说明 $\chi(T)$ 在 T_c 上无奇性, 所以

$$\chi(T_c) = \text{常数}, \quad \gamma = \gamma' = 0 \quad (T \sim T_c). \quad (5.4)$$

六、极化强度

先计算自发极化强度. 无外电场时, $s^{(0)}$ 与 $s^{(e)}$ 相互独立, 由 (2.2) 式可知, 自发极化强度 P_0 为

$$P_0 \sim (T_0 - T)^{\frac{1}{8}}, \quad (T \lesssim T_0); \quad P_0 = 0, \quad (T > T_0). \quad (6.1)$$

所以
$$\beta = \frac{1}{8}, \quad (T \lesssim T_0). \quad (6.2)$$

再来计算临界指数 δ , 这要求计算 $E \rightarrow 0$ 时的 $P(E)$. 根据文献 [1], 当 $E \rightarrow 0$ 时, 加在奇数层自旋上的“外磁场”为 $h^{(e)} \sim E \langle s^{(e)} \rangle$, 加在偶数层自旋上的“外磁场”为

$$h^{(0)} \sim E \langle s^{(0)} \rangle.$$

1) 低相变点 T_0 上的 $\delta^{(0)}$ 此时偶数层上自旋存在自发磁化, 对奇数层自旋利用 Ising 模型 $\delta = 15$,

$$\langle s^{(e)} \rangle = c, \quad \langle s^{(0)} \rangle \sim (h^{(e)})^{\frac{1}{15}} \sim (E \langle s^{(e)} \rangle)^{\frac{1}{15}}$$

故
$$P \sim \langle s^{(0)} \rangle \langle s^{(e)} \rangle \sim E^{\frac{1}{15}} \quad \delta^{(0)} = 15. \quad (6.3)$$

2) 高相变点 T_c 上的 $\delta^{(e)}$ 此时奇偶数层上磁化强度分别为

$$\langle s^{(0)} \rangle \sim h^{(e)} \sim E \langle s^{(e)} \rangle, \quad \langle s^{(e)} \rangle \sim (h^{(0)})^{\frac{1}{15}} \sim (E \langle s^{(0)} \rangle)^{\frac{1}{15}},$$

故
$$\langle s^{(0)} \rangle \sim E^{\frac{8}{7}}, \quad \langle s^{(e)} \rangle \sim E^{\frac{1}{7}},$$

$$P \sim \langle s^{(0)} \rangle \langle s^{(e)} \rangle \sim E^{\frac{9}{7}}, \quad \delta^{(e)} = \frac{7}{9}. \quad (6.4)$$

七、总 结

对于能量参数满足条件 (3.1) 式的三维氢键模型, 可发生二次二级相变:

1. 在低相变点上, 只有沿晶面 $(\bar{1}, 1, 1)$ 存在长程关联, 其它方向是短程关联或者无关联, 其全部临界指数都已求出, 它们满足所有的标度律.

2. 在高相变点上, 沿任何方向都没有长程关联, 因而没有标度性. 此时比热仍有对数奇性, 极化强度 $P(E) \sim E^{\frac{9}{7}}$ 仍有支点奇性, 但极化率和关联长度不再有奇性. 临界指数不符合标度定律 (包括热力学标度定律^[7]), 其原因与文献 [1] 不同, 那里是由于关联范围的收缩所引起的 (关联长度在某些方向仍无限), 这里是由于关联长度保持有限而引起的.

参 考 文 献

- [1] 孙 鑫, 物理学报, **25** (1976), 487.
- [2] L. Onsager, *Phys. Rev.*, **65** (1944), 117.
- [3] E. Lieb, *Phys. Rev. Lett.*, **18** (1967), 1046; **19** (1967), 108.
- [4] R. Baxter, *Ann. Phys.*, **70** (1972), 193.
- [5] L. P. Kadanoff, *Nuovo Cimento*, **44B** (1966), 276.
- [6] T. T. Wu, *Phys. Rev.*, **149** (1966), 380.
- [7] R. Bront, *Phys. Repor.*, **10C** (1974), 1.

A 3-d HYDROGEN-BOND MODEL WITH TWO CRITICAL POINTS

SUN XIN

(*Fudan University*)