

关于高 T_c 问题的一个建议*

吴 杭 生 吉 光 达

提 要

我们建议:把超导体分成 A 型和 B 型两种。前者, $\lambda < 4$, 后者, $\lambda > 4$. λ 的物理意义在正文中给出。本文分析表明了,有效声子谱对这两种超导体 T_c 的影响是不同的,因而提高它们 T_c 方法也是不一样的。提高 A 型超导体 T_c 的最有效方法是增大 λ , 提高 B 型超导体 T_c 的最有效方法是增大 $\lambda \langle \omega^2 \rangle$.

一、引 言

1968 年, McMillan^[1] 在 Eliashberg 方程数值解的基础上,提出了如下的 T_c 公式:

$$T_c = \frac{\omega_{\log}}{1.20} \exp \left(- \frac{1.04(1 + \lambda)}{\lambda - \mu^* - 0.62\lambda\mu^*} \right), \quad (1)$$

其中 $\omega_{\log} = \lim_{n \rightarrow 0} (\langle \omega^n \rangle)^{1/n}$. 在原始的 McMillan 的 T_c 公式中,指数前的因子并不是 $\omega_{\log}/1.20$, 而是 $\Theta_D/1.45$. $\omega_{\log}/1.20$ 是由 Allen 和 Dynes 引入的^[2]. Karakozov 等人从理论上也得出类似的结果^[3]. 严格地说,指数上的系数因 $\alpha^2 F(\omega)$ 谱不同而略有不同(例见文献[4—7]). 只是由于本文的讨论仅需知道 T_c 和各参量之间的函数关系便够了,所以我们仍采用 McMillan 定出的系数值. McMillan 证明了,参量 λ 可表示为

$$\lambda = \frac{\eta}{M \langle \omega^2 \rangle} = \frac{N(0) \langle I^2 \rangle}{M \langle \omega^2 \rangle}, \quad (2)$$

式中 M 是原子的质量; $N(0)$ 是在费米面处,电子的态密度; $\langle I^2 \rangle$ 是电声子矩阵元在费米面上的平均值. McMillan 在分析了体心立方过渡金属 V, Nb, Ta, Mo, W 的 $N(0)$ 和 $\langle I^2 \rangle$ 数据后提出,对同一类晶体, η 近似是个常数. 于是,他由(2)式得出结论:声谱软化可提高 λ , 从而可提高 T_c . 这是 McMillan 理论对高 T_c 问题提出的一个有价值的预言.

环绕 McMillan 工作,人们进行了大量的研究. 这段时期的工作表明了,超导临界温度变化规律比 McMillan 预言的要复杂得多. 例如,像 Al, Sn, Ga, In, W 和 Mo 等无序金属¹⁾, 临界温度的确因声谱软化而提高了;但另一些无序金属(例 Pb, Nb, La 等)的临界温度反而因声谱软化而下降了^[8—14]. 很多作者都指出,“ $\eta = \text{常数}$ ”一般是不正确的^[2, 19—21]. 而且,从一些实验事实看,增大 η 比声谱软化更有效地提高强耦合超导体的临界温度^[2]. Allen 和 Dynes 甚至预言:“能够找到的高温超导体多半是 η 尽可能大的材料”^[2].

* 1978 年 3 月 11 日收到.

1) 无序金属指非晶态金属和颗粒状金属等.

现在已弄清楚, McMillan T_c 公式只适用于耦合较弱的超导体。把从这个 T_c 公式得出的结论推广到它的适用范围之外, 出现种种和实验不符合现象, 也就很自然的了。

最近, 作者和他们的合作者^[15-17]由 Eliashberg 方程导出了如下 T_c 公式:

$$(2\pi T_c)^{-2} = \sigma \frac{1}{\lambda \langle \omega^2 \rangle} \left\{ 1 + \frac{1}{\lambda} \sigma_4 \frac{\langle \omega^4 \rangle}{\langle \omega^2 \rangle^2} + \frac{1}{\lambda^2} \left[\sigma \sigma_6 \frac{\langle \omega^6 \rangle}{\langle \omega^2 \rangle^3} + (\sigma \sigma_{44} + \sigma_4 \sigma_4) \frac{\langle \omega^4 \rangle^2}{\langle \omega^2 \rangle^6} \right] + \dots \right\}, \quad (3a)$$

即

$$T_c = \alpha_0 \sqrt{\lambda \langle \omega^2 \rangle} \left\{ 1 + \frac{1}{\lambda} \alpha_1 \frac{\langle \omega^4 \rangle}{\langle \omega^2 \rangle^2} + \frac{1}{\lambda^2} \left(\alpha_{21} \frac{\langle \omega^6 \rangle}{\langle \omega^2 \rangle^3} + \alpha_{22} \frac{\langle \omega^4 \rangle^2}{\langle \omega^2 \rangle^4} \right) + \dots \right\}, \quad (3b)$$

式中各系数在文献[17]中给出。

新的 T_c 公式和 McMillan T_c 公式一起, 为较全面地研究高 T_c 问题提供了一个合理的基础。本文将报告我们对这个问题的研究结果。

二、一个建议

我们得到的 T_c 公式是一个级数解。它的收敛性质, 作者已在文献[16]中研究过。这个分析表明了, 新的 T_c 公式适用于 $\lambda > \Lambda$ 的超导体。 $1/\Lambda$ 是级数解 (3a) 式的收敛半径。在文献[17]中, 我们给出了估算 Λ 的方法。

至于 McMillan T_c 公式的适用范围, 严格说来, 仍是一个不清楚的问题。目前, 普遍接受的看法是认为它可用于 $\lambda < 1$ 超导体。然而, 这只是人们把它和 Eliashberg 方程的数值解进行比较后, 得到的一个粗略看法而已。我们推测, McMillan T_c 公式的适用范围是 $\lambda < \Lambda$ 。支持我们看法的事实有两。一是 Eliashberg 方程的数值解明显地分为性质不同的两个部份: 在小 λ 区域是 McMillan 指数解。在大 λ 区域是非指数解¹⁾。另一是在 Einstein 谱、 $\mu^* = 0$ 情形, McMillan T_c 公式开始偏离严格数值解的 λ 值为 0.5^[2]。而用文献[17]中叙述的方法估计此情形下的 Λ 值约为 0.6, 在数量级上正好和 $\lambda = 0.5$ 符合。

有效声子谱对 T_c 的影响是通过 T_c 公式中的 λ 及各级矩 $\langle \omega^n \rangle$ 表现出来的。既然 T_c 公式(1)和(3b)所表示的 T_c 依赖 λ 和 $\langle \omega^n \rangle$ 的函数关系是完全不同的, 那末它们所表明的有效声子谱对 T_c 的影响自然也应有不同。由于这个原因, 我们建议: 把超导体分成 A 型和 B 型两种。前者, $\lambda < \Lambda$ 。后者, $\lambda > \Lambda$ 。

早在 1964 年, Wada 和 Schrieffer 就曾指出, 准粒子的衰减可引起超导临界温度下降^[18]。在电声子耦合较弱的超导体中, 准粒子衰减对 T_c 的影响是次要的。此时, T_c 主要是由电声子作用引起的电子之间的吸引力和电子间的库仑排斥力决定的。随着电声子耦合增强, 准粒子寿命减小, 从而对 T_c 的影响增大。因此, 当电声子耦合强到一定程度以后, 准粒子衰减对 T_c 的影响便成为主要的, 而库仑作用的影响是次要的。这就是超导体为什

1) 见文献[2]中的图 1 和图 2。

么有 A 型和 B 型之分的物理原因。

表 1 给出了一些超导体的 λ 和 A 值,后者是用文献 [17] 介绍的方法估算得到的。表

表 1

超导体	λ	A	类 型	超导体	λ	A	类 型
Al	0.38 ^[11]	≥ 0.65	A	Sn	0.72 ^[2]	0.90	A
Zn	0.38 ^[11]	≥ 0.65	A	Sn(D)	0.84 ^[10]	0.96	A
Ga	0.40 ^[11]	≥ 0.65	A	Sn+10%Cu(D)	1.82 ^[10]	1.58	B
Mo	0.39 ^[2]	≥ 0.65	A	Nb ₃ Sn	1.67 ^[2]	0.94	B
W	0.25 ^[11]	≥ 0.65	A	Pb _{0.45} Bi _{0.55} (D)	2.59 ^[2]	2.04	B
Zr	0.45 ^[19]	≥ 0.65	A	Pb	1.55 ^[2]	1.01	B
In	0.805 ^[21]	≥ 1.3	A	Pb + 10%Cu(D)	2.01 ^[10]	1.63	B

中注有 (D) 的超导材料均是无序金属。由表 1 看到, Nb₃Sn, Pb, Pb_{0.45}Bi_{0.55}(D), Sn + 10%Cu(D) 和 Pb + 10%Cu(D) 是 B 型超导体; Al, Zn, Ga, Mo, W, Zr, In, Sn 和 Sn(D) 是 A 型超导体。

应当指出: A 的数值因谱的形状不同而不同^[16,17]。对某些谱形,它可能是大于 1 的,对另一些谱形,它也可能小于 1。这样,一个超导体到底是 A 型的,还是 B 型的,一般不能简单地根据电声子耦合强弱来判断。

三、有效声子谱对 T_c 的影响

把有效声子谱 $\alpha^2F(\omega)$ 写成

$$\alpha^2F(\omega) = \frac{\lambda\omega}{2} g(\omega). \quad (4)$$

参量 λ 的大小标志了电声子耦合的强弱。 $g(\omega)$ 是一个反映谱形状的函数。它满足以下归一化条件:

$$\int_0^\infty d\omega g(\omega) = 1. \quad (5)$$

关系式 $\langle\omega^n\rangle = \int_0^\infty d\omega g(\omega)\omega^n$ 表明了,各级矩 $\langle\omega^n\rangle$ 不依赖电声子耦合强弱,只依赖谱的形状。

A 型超导体的临界温度是由 McMillan 的 T_c 公式给出的。由此 T_c 公式直接看出,或者增大 $\omega_{\log}$, 或者增大 λ , 都可以使 T_c 增加。但 λ 是出现在 T_c 公式的指数上, 矩 $\omega_{\log}$ 只出现在指数前的系数中, 因而 T_c 随 λ 变化迅速, 随 $\omega_{\log}$ 变化相对来说则缓慢得多了。所以, 要提高 A 型超导体的临界温度, 最有效方法是增大 λ 。

B 型超导体的临界温度是由 T_c 公式(3b)给出的。把此 T_c 公式改写成以下形式:

$$T_c = \alpha_0 \sqrt{\lambda \langle\omega^2\rangle} \left\{ 1 + \alpha_1 \frac{\lambda \langle\omega^4\rangle}{(\lambda \langle\omega^2\rangle)^2} + \left(\alpha_{21} \frac{\lambda \langle\omega^6\rangle}{(\lambda \langle\omega^2\rangle)^3} + \alpha_{22} \frac{(\lambda \langle\omega^4\rangle)^2}{(\lambda \langle\omega^2\rangle)^4} \right) + \dots \right\}. \quad (6)$$

在此式中, λ 不单独出现, 出现的只是 $\lambda\langle\omega^n\rangle$. 这意味着, 谱的形状和电声子耦合强弱对决定 B 型超导体临界温度, 起着同等重要的作用. 这个特点是 A 型超导体所没有的. 对 A 型超导体来说, 电声子耦合强弱对它的临界温度影响大, 谱形状的影响相对来说则较小.

在表 2 中, 列出了 Pb, Nb₃Sn, Pb_{0.45}Bi_{0.55}(D) 的 λ , $\bar{\omega}_2 = (\langle\omega^2\rangle)^{1/2}$ 和 $\alpha_0\sqrt{\lambda\langle\omega^2\rangle} = \frac{0.182}{1 + 2.5\mu^*}\sqrt{\lambda\langle\omega^2\rangle}$ ^[17] (取 $\mu^* = 0.1$) 的数值. 表中数据表明了, T_c 总是比 (3b) 式右边级数

表 2

超导体	λ	$\bar{\omega}_2$ (K)	T_c (K)	$\alpha_0\sqrt{\lambda\langle\omega^2\rangle}$ (K)
Pb	1.55	65	7.2	13
Nb ₃ Sn	1.67	163	18.1	34
Pb _{0.45} Bi _{0.55} (D)	2.59	47	7.0	12

的第 1 项 $\alpha_0\sqrt{\lambda\langle\omega^2\rangle}$ 小, 即

$$0 < T_c < \alpha_0\sqrt{\lambda\langle\omega^2\rangle}. \quad (7)$$

此不等式预示, 在 $\sqrt{\lambda\langle\omega^2\rangle}$ 一定时, T_c 应存在一定上界和下界. 实际上正是这样的. 在附录中将证明

$$\left(1 - \frac{1}{\lambda} \frac{\langle\omega^4\rangle}{\langle\omega^2\rangle^2}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{T_c}{\alpha_0\sqrt{\lambda\langle\omega^2\rangle}} \leq \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (8)$$

其中

$$\lambda = \frac{\lambda}{0.65(1 + 3.0\mu^*)}. \quad (9)$$

由 (8) 式和 (3b) 式, 立刻得到

$$1 - \left(1 - \frac{1}{\lambda} \frac{\langle\omega^4\rangle}{\langle\omega^2\rangle^2}\right)^{\frac{1}{2}} \geq \xi \geq 1 - \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (10)$$

式中, ξ 是 (3b) 式右边级数的第二项以上诸项之和, 即

$$\xi = -\frac{\alpha_1}{\lambda} \frac{\langle\omega^4\rangle}{\langle\omega^2\rangle^2} - \frac{1}{\lambda^2} \left(\alpha_{21} \frac{\langle\omega^6\rangle}{\langle\omega^2\rangle^3} + \alpha_{22} \frac{\langle\omega^4\rangle^2}{\langle\omega^2\rangle^4} \right) + \dots \quad (11)$$

注意到, ξ 是大于零的.

由 T_c 公式 (3b) 易见: 或者增大 $\lambda\langle\omega^2\rangle$, 或者适当改变各种矩之比 $\left(\frac{\langle\omega^4\rangle}{\langle\omega^2\rangle^2}, \frac{\langle\omega^6\rangle}{\langle\omega^2\rangle^3}\right)$ 等等, 使 ξ 减小, 都可以使 B 型超导体的临界温度增大. 由于 ξ 需满足不等式 (10), 所以通过改变各种矩之比是不可能显著地提高 T_c 的¹⁾. 至于 $\lambda\langle\omega^2\rangle$, 则不同了. 从原则上说, 它

1) 由 (8) 式知, 通过改变各种矩之比, 最多只能使 T_c 增至 $T'_c = \alpha_0\sqrt{\lambda\langle\omega^2\rangle} \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)^{1/2}$. 用表 2 中的数据和此式估计得到: Pb, $T'_c \approx 9\text{K}$; Nb₃Sn, $T'_c \approx 23\text{K}$.

注意到, T'_c 是理论的上限值. 要达到此上限值, $g(\omega)$ 需取假想的 Einstein 谱 $\delta(\omega - \langle\omega^2\rangle)$. 实际的谱总是和 Einstein 谱有相当大的距离. 所以, 通过改变各种矩之比, 实际能实现的临界温度增加比 ($T'_c - T_c$) 要低得多.

是没有上限的. 通过增加 $\lambda\langle\omega^2\rangle$ 使 T_c 大幅度地提高, 是可能的. 所以, 要提高 B 型超导体临界温度, 最有效的方法是增大 $\lambda\langle\omega^2\rangle$.

四、讨 论

引言中提到的那些和 McMillan 理论不符合的现象, 从本文观点看, 是可以理解的, 至少它们是不矛盾的.

表 3 中列出了两组样品的 T_c , λ , $\langle\omega^2\rangle$ 和 μ^* 数据^[10]. 一组是 Pb 和 Pb + 10%Cu (D). 另一组是 Sn 和 Sn(D). 表中数据表明了, 声谱软化对 Pb 和 Sn 的临界温度的影响

表 3

材 料	T_c (K)	λ	μ^*	$\langle\omega^2\rangle$ (meV) ²	$\lambda\langle\omega^2\rangle$ (meV) ²
Pb	7.2	1.66	0.12	25.8	42.8
Pb + 10%Cu(D)	6.5	2.01	0.04	16.3	32.7
Sn	3.6	0.70	0.12	108	75.6
Sn(D)	4.5	0.84	0.07	86.5	72.7

是相反的. 前者下降了, 后者升高了. 从两类超导体观点看, 这是很自然的. Sn 是 A 型超导体. 它的 T_c 主要是被 λ 决定的. 在声谱软化后, 尽管 Sn 的 $\lambda\langle\omega^2\rangle$ 从 75.6 减至 72.7 (meV)², 但它的 λ 由 0.70 增至 0.84, 所以 Sn 的 T_c 升高了 (当然, Sn 的 T_c 升高, 部份是由 μ^* 减小引起的). 而 Pb 是 B 型超导体. 它的 T_c 数值不取决于 λ 的大小, 主要是取决于 λ 和 $\langle\omega^2\rangle$ 的乘积. 由于这个原因, 所以尽管 Pb 的 λ 从 1.66 增至 2.01, μ^* 也从 0.12 减至 0.04, 但它的 $\lambda\langle\omega^2\rangle$ 却由 42.8 减到 32.7 (meV)², 因而它的 T_c 下降了.

在第一节中提到, 从一些实验事实看, 增大 η 比声谱软化更有效地提高强耦合超导体的临界温度. 看来, 这正是 B 型超导体的特征. 不过, 要作出肯定的结论, 需对有关实验事实予以重新分析. 这方面问题留待以后讨论. 至于第一节提到的 Allen 和 Dynes 的“预言”, 从第二节得到的结论, 便能直接予以说明. 并且, 我们可以更明确地说, 能够找到的高温超导体一定是 $\lambda\langle\omega^2\rangle$ 尽可能大的 B 型超导体.

附 录

先在一级近似下证明和(8)式相应的不等式. 假设 $\mu^* = 0$. 此时^[2],

$$\int_0^\infty d\omega g(\omega) \frac{\omega^2}{\omega^2 + (2\pi T_{c1})^2} = \frac{1}{\lambda}. \quad (\text{A.1})$$

Allen 和 Dynes 证明了^[2],

$$\int_0^\infty d\omega g(\omega) \frac{\omega^2}{\omega^2 + (2\pi T_{c1})^2} \leq \frac{\langle\omega^2\rangle}{\langle\omega^2\rangle + (2\pi T_{c1})^2}. \quad (\text{A.2})$$

利用同样的方法, 我们可进一步证明

$$\int_0^\infty d\omega g(\omega) \frac{\omega^2}{\omega^2 + (2\pi T_{c1})^2} > \frac{\langle\omega^2\rangle}{\langle\omega^2\rangle + (2\pi T_{c1})^2}. \quad (\text{A.3})$$

由(A.1)–(A.3)式立刻得到

$$\frac{1}{2\pi} \sqrt{\lambda \langle \omega^2 \rangle} \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)^{1/2} \geq T_{c1} \geq \frac{1}{2\pi} \sqrt{\lambda \langle \omega^2 \rangle} \left\{1 - \frac{1}{\lambda} \frac{\langle \omega^4 \rangle}{\langle \omega^2 \rangle^2}\right\}^{1/2}. \quad (\text{A.4})$$

正如我们在文献[17]所指出的：只要把此式中的 λ 换成 $\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{0.65(1 + 3.0\mu^*)}$ ，便能得到 T_c 满足的不等式。注

意到， $\frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{0.65(1 + 3.0\mu^*)}} \approx \alpha_0$ 。此不等式实际上就是(8)式。

参 考 文 献

- [1] M. L. McMillan, *Phys. Rev.*, **167** (1968), 331.
- [2] P. B. Allen and R. C. Dynes, *Phys. Rev.*, **B12** (1975), 905.
- [3] A. E. Каракозов, Е. Г. Максимов и С. А. Машков, *ЖЭТФ*, **68** (1975), 1937.
- [4] J. W. Garland, K. H. Bennemann and F. M. Muller, *Phys. Rev. Letters*, **21** (1968), 1315.
- [5] J. W. Garland and P. B. Allen, *Physica*, **55** (1971), 669.
- [6] C. R. Leaven and J. B. Carbotte, *Can. J. Phys.*, **49** (1971), 724.
- [7] P. Z. Hertel, *Z. für Physik*, **248** (1971), 272.
- [8] G. Bergmann, *Phys. Reports (Section C of Phys. Letters)*, **27** (1975), 159.
- [9] J. Klein and A. Leger, *Physica*, **55** (1971), 740.
- [10] K. Knorr and N. Barth, *J. Low Temp. Phys.*, **4** (1971), 469.
- [11] J. Hanak and J. Gittleman, *Physica*, **55** (1971), 555.
- [12] S. Matsuo, H. Sugiura and S. Noguchi, *J. Low Temp. Phys.*, **15** (1974), 481.
- [13] M. M. Collver and R. H. Hammond, *Phys. Rev. Letters*, **30** (1973), 92.
- [14] В. М. Кузьменко, Б. Г. Лазарев, В. И. Мельников и А. И. Субовцов, *ЖЭТФ*, **67**, (1974), 801.
- [15] 吴杭生、蔡建华、龚昌德、吉光达、蔡俊道, *物理学报*, **26** (1977), 509.
- [16] 龚昌德、吴杭生、蔡建华、蔡俊道、吉光达, *物理学报*, **27** (1978), 85.
- [17] 蔡俊道、吉光达、吴杭生、龚昌德、蔡建华, *物理学报*, 待发表.
- [18] Y. Wada, *Rev. Mod. Phys.*, **36** (1964), 253.
- [19] B. L. Gyorffy, *Superconductivity in d- and f- Band Metals*, (Plenum, New York, 1976), edited by D. H. Douglass, p. 29.
- [20] R. C. Dynes and J. M. Rowell, *Phys. Rev.*, **B11** (1975), 1884.
- [21] J. J. Hopfield, *Phys. Rev.*, **186** (1969), 443.

A SUGGESTION ON THE HIGH T_c PROBLEM

WU HANG-SHENG JI GUANG-DA

ABSTRACT

We suggest that the superconductors should be divided into two types, type A and type B, for the former, $\lambda < \Lambda$ and for the later, $\lambda > \Lambda$. The meaning of Λ is given in this paper. Our analysis shows that the influence of effective phonon spectrum on the transition temperature of these two type superconductors are different and the ways for raising their transition temperature are different also. For type A superconductors, the most effective way for raising T_c is to increase λ , whereas for type B superconductors, is to increase $\lambda \langle \omega^2 \rangle$.