

超导临界温度理论(II)*

龚昌德 吴杭生 蔡建华 蔡俊道 吉光达

提 要

在文献[1]中,我们导出了超导临界温度 T_c 的一个严格级数表式. 本文讨论这个级数的收敛范围,以及通过解析延拓来扩展收敛范围的可能性. 结论是: 我们的 T_c 级数(指文献[1]原来的级数,或者经过延拓后的级数)在 $\infty > \lambda > \lambda_0$ 的整个范围内,都是收敛的. 这里 λ_0 是 Matsubara 表象中使决定 T_c 的方程具有正实数解的最小的 λ 值. 实际上,就是库仑赝势. 因此,这就是说,也许除了少数非常弱耦合的超导体以外,我们的 T_c 级数,能适用于一切超导体.

一、引 言

在文献[1]中,从 Matsubara 表象中决定 T_c 的方程[文献[1]的(1)至(3)式]出发,导出了一个超导临界温度公式:

$$(2\pi T_c)^{-2} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \lambda^{-n}, \quad (1)$$

其中系数 b_n 可参见文献[1]. 这个 T_c 公式的好处是严格而解析的. 最突出的一点,是在系数 b_n 中包含了有效声子谱的各次矩,因而能够全面地反映出有效声子谱的形状对临界温度 T_c 的影响. 不过(1)式是一级数,所以自然地存在收敛性的问题. 本文的目的就是说明这个级数的收敛范围,以及通过解析延拓来扩展它的收敛范围的可能性.

令

$$(2\pi T_c)^{-2} = y \text{ 和 } \lambda^{-1} = z, \quad (2)$$

并把 y 和 z 看作复数,在复 y 和复 z 平面上考察决定 T_c 的方程的解析行为,即可弄清楚上述问题. 所得结论是: 我们的 T_c 级数[指原级数(1)式,或它的解析延拓]¹⁾在 $\infty > \lambda > \lambda_0$ 的整个范围内是收敛的. 通过常规的延拓手续,适当地选择级数展开的中心点,总可以使它有足够快的收敛速度. 这就是说,也许除了少数非常弱耦合的超导体以外,对于一切超导体,我们的 T_c 级数都成立,并且是能实用的. 以上 λ_0 是文献[1]的(1)式有正实数解的最小的 λ 值.

二、决定 T_c 方程的解析行为

本节的讨论利用了 Matsubara 表象中决定 T_c 的方程的下列极其重要的基本性质^[4]:

* 1977年8月4日收到.

1) 以下凡提到“我们的 T_c 级数”都是指这样的意思,凡提到原级数,就是指(1)式.

对于任何 $0 < z < z_0 = \frac{1}{\lambda_0}$ 的正实数的 z , 方程只有唯一的、有限的正实数解 y . 反之亦然. 对于任何 $0 < y < \infty$ 的正实数 y , 也只存在一个唯一的、有限的正实数解 z , $0 < z < z_0$. 这就是说, 给予 z 一个在 $0 < z < z_0$ 区间内的正实数值, 方程只有一个在 $0 < y < \infty$ 区间内的唯一的、有限的正实数单根. 反之亦然. 以下的讨论, 将反复用到这一基本性质.

为了清楚起见, 先讨论一级近似的方程^[1]:

$$(1 + 2\mu^*)^{-1} \int_0^{\omega_{ph}} \frac{\omega^2 y}{\omega^2 y + 1} g(\omega) d\omega = z, \quad (3)$$

其中 $g(\omega)$ 是规一的有效声子谱^[2], ω_{ph} 是它的频率上界.

把(3)式写成

$$z = F(y) = (1 + 2\mu^*)^{-1} \int_0^{\omega_{ph}} \frac{\omega^2 y}{\omega^2 y + 1} g(\omega) d\omega. \quad (4)$$

并在复 y 平面上考察函数 $F(y)$. 由于有效声子谱 $g(\omega)$ 至多只有可积性的奇点^[3], 函数 $F(y)$ 的奇点都来自被积函数 $\frac{\omega^2 y}{\omega^2 y + 1}$. 它的奇点是在负实轴上的 $y = -\omega_{ph}^{-2}$. 一般地, 这是一个极性支点(图 1). 从这一点沿负实轴向左作割线, 在切割过的全黎曼面上, $F(y)$ 是解析函数. 由于本节一开始着重指出的基本性质, 必定存在黎曼面的一叶, 在这一叶上, 当 y 为正实数时, $F(y)$ 也是正实数.

再考察(4)式的反函数(图 2)

$$y = G(z). \quad (5)$$

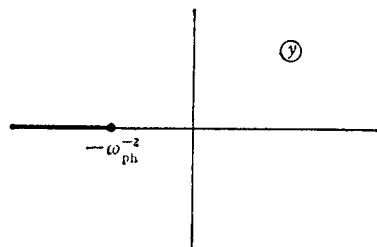


图 1

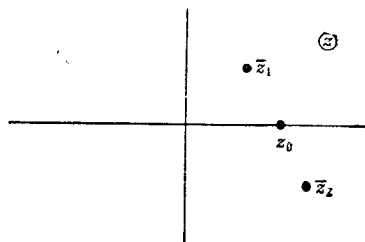


图 2

$G(z)$ 在复 z 平面上的奇点分布如下: 在正实轴上有一个极性支点 z_0 (在特殊情形下, 它退化成一个孤立极点, 见附录一). 这是因为 z 平面上沿实轴的 $(0, z_0)$ 的区间, 实际上是 y 平面上 $(0, \infty)$ 区间的映射. 要注意 y 平面上的无穷远点, 映射成 z 平面上的 z_0 点, 所以 z_0 也就是方程(3)有正实数解 $y = y^* \rightarrow \infty$ 的最大的正实数 z 值. 第三节的计算表明, 在一级近似下 $z_0 = (1 + 2\mu^*)^{-1}$.

除了 z_0 以外, 函数还会有一系列支点(或其它可能的孤立奇点). 这些奇点的分布依赖于有效声子谱 $g(\omega)$ 的形状. 在附录一中, 我们举 Einstein 谱及双 δ 函数谱为例说明. 但是根据决定 T_c 的方程的基本特性, 可以判断, 在 z 平面的正实轴上从 0 到 z_0 这一段以内, 函数 $G(z)$ 没有奇点. $G(z)$ 的除 z_0 以外的奇点, 必定都分布在正实轴的两侧, 或正实轴上除 $(0, z_0)$ 这一段以外的地方. 对于 z_0 以及别的分支点, 作割线, 使多值函

数 $G(z)$ 成为黎曼面上的单值函数, 那末仍然由于决定 T_c 的方程的基本性质, 必定能挑选出黎曼面的一叶, 在这一叶上, 当 z 是 $0 < z < z_0$ 的正实数时, $G(z)$ 也是正实数.

弄清楚以上的解析性质之后, 就可以说明我们的 T_c 级数的收敛性问题. 在文献[1]中导出原级数(1)式时, 我们在 $|y| < \omega_{ph}^{-2}$ 的圆形域内, 展开(4)式右方的被积函数, 然后对于所得到的级数用 Lagrange 定理^[5]进行反解, 得到(1)式. (1)式作为一个幂级数, 在 z 平面上总归存在一个足够小的 $z = 0$ 的邻域 C , 在 C 内它是收敛的. 根据上述 z 平面上 $G(z)$ 的解析性质, 在圆形域 C' 内, $G(z)$ 是解析函数. 这里 C' 是 $|z| < z_0$ 的圆 (如果离原点最近的奇点是 $\bar{z}_1$ 而 $|\bar{z}_1| > z_0$), 或者是 $|z| < |\bar{z}_1|$ 的圆 (如果 $|\bar{z}_1| < z_0$). 在 C' 内, $y = G(z)$ 有泰勒级数展式, 并且是唯一的. 因此, 在 C 内 $y = G(z)$ 的泰勒级数展式, 必与原级数(1)式重合. 反过来说, 不管 C 多么小, 实际上, 原级数(1)式在更大的区域 C' 内都收敛于解析函数 $G(z)$. 因此, 尽管 (4)式中被积函数的展开条件是 $|y| < \omega_{ph}^{-2}$ 但经 Lagrange 定理反解得到的原级数(1)式的收敛区域, 并不是由与此相应的条件所决定, 而实际上是由 $G(z)$ 在 z 平面上的解析性质所决定的.

如上所述, 如果 C' 是 $|z| < z_0$ 的圆形域, 那末原级数(1)式在 $0 < z < z_0$ 的整个范围内成立. 如果 C' 是 $|z| < |\bar{z}_1| < z_0$ 的圆形域, 此时, 由于在正实轴上直到 z_0 , 没有奇点的阻挡, 通过标准的手续沿正实轴进行解析延拓 (具体作法, 见第四节) 就可以从 (1)式出发, 得到在 $0 < z < z_0$ (或 $\infty > \lambda > \lambda_0$) 的整个范围内都收敛的 T_c 级数.

附带指出, 这种延拓手续, 也可以在 y 平面内实行. 在 $|y| < \omega_{ph}^{-2}$ 的圆内, 将 $F(y)$ 展成泰勒级数. 由于 y 平面上沿正实轴, 直到无穷远点都没有奇点的阻挡, 所以总可以将此级数进行延拓, 并且延拓后的级数收敛于解析函数. 用 Lagrange 定理对延拓后的级数进行反解, 也能得到适用于 0 到 z_0 区间内的 T_c 级数.

应该指出, 无论在 z 平面, 还是在 y 平面上的解析延拓, 都是指在前面特地声明的那一叶黎曼面上进行的.

以上, 我们就一级近似情形, 说明了基本的思想. 相似的论证, 也适用于任意级近似的情形. 并且, 随着近似级数 N 增高, 我们的 T_c 级数的收敛区域, 也相应地扩大到 $z_0 = \mu^*(N)^{-1}$ 或 $\lambda_0 = \mu^*(N) < 1$. 我们把 N 级近似的决定 T_c 的方程, 写成如下的形式:

$$\delta^{(0)} z^N - A_1(y) z^{N-1} + A_2(y) z^{N-2} - \cdots + (-1)^N A_N(y) = 0, \quad (6)$$

[即文献[1]的(29)式, $\delta^{(0)} = \Delta(\mu, \mu, \cdots, \mu)$ 代表一个非零的数值行列式, 见文献[1]各个系数 $A_i(y)$, $i = 1, \cdots, N$ 都由各个 λ_n 组成,

$$\lambda_n = \int_0^{\omega_{ph}} \frac{\omega^2 y}{\omega^2 y + n^2} g(\omega) d\omega, \quad n = 1, 2, 3, \cdots. \quad (7)$$

$\lambda_n(y)$ 在复 y 平面上有极性支点 $-n^2 \omega_{ph}^{-2}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$, 其中离原点最近的一个仍是 $-\omega_{ph}^{-2}$. 从这一点沿负实轴向左作割线, 在切割后的黎曼面上, 每个 A_i 都成为单值函数, 并且必定在黎曼面的一叶, 在这一叶上, 当 y 为正实数时, $A_i(y)$, $i = 1, \cdots, N$ 也都是正实数. 每个 $A_i(y)$ 在这一叶的正实轴上, 没有任何奇点.

现在, 在上述那一叶黎曼面上, 考察方程(6)所决定的函数

$$z = F(y). \quad (8)$$

函数 $F(y)$ 还将有一些新的支点. 它们是(8)式作为高次代数方程(6)的解, 所带来的一

些正则型支点. 但同样由于基本的理由, 这些正则型支点, 都不可能位于正实轴上. 对应于每个这种正则型支点再作割线, 我们得到一个多叶黎曼面上的单值函数. 并且其中必有一叶, 在这一叶的正实轴上, $F(y)$ 是解析的, 并且是正实数.

再反过来考察(8)式的反函数 $y = G(z)$. 和上面一级近似情形相同, 在对于我们有意义的那一叶黎曼面上, 函数在正实轴上 $(0, z_0)$ 区间内为解析 (z_0 是一极性支点). 据上所述, 前面在一级近似下所得关于我们的 T_c 级数的收敛性的结论, 依然成立. 只是在高级近似下 $z_0 = \mu^*(N)^{-1}$, 这将在下节中予以证明.

三、 λ_0 的计算

对于任何有效声子谱, 从决定 T_c 的方程解出的 $T_c \sim \lambda$ 曲线与 λ 轴相交(参看附录二). 交点 λ_0 , 就是 $T_c \rightarrow 0$ 时的 λ 值(即 $z_0 = \lambda_0^{-1}$ 对应于 $y = \infty$)(见图 3).

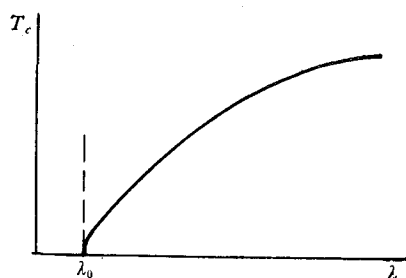


图 3

按文献[1]的(3)式, 当 $T_c \rightarrow 0$,

$$\lambda(n) = 2 \int \frac{\omega \alpha^2 F d\omega}{\omega^2 + (2\pi n T_c)^2} \rightarrow \lambda = 2 \int \frac{d\omega}{\omega} \alpha^2 F. \quad (9)$$

于是文献[1]的(1)式, 在 $T_c \rightarrow 0$ 时, 成为下列方程:

$$\Delta_N \equiv \begin{vmatrix} \lambda - 2\mu^* - 1 & 2(\lambda - \mu^*) \cdots 2(\lambda - \mu^*) \\ 2(\lambda - \mu^*) & -\lambda - 2\mu^* - 3 \cdots 2(\lambda - \mu^*) \\ \cdots & \cdots \\ 2(\lambda - \mu^*) & 2(\lambda - \mu^*) \cdots - (2N-3)\lambda - 2\mu^* - (2N-1) \end{vmatrix} = 0, \quad (10)$$

其中 $\mu^* = \mu^*(N)$. 行列式 Δ_N , 可以用下列数学公式算出:

$$\begin{vmatrix} a_1 & x & \cdots & x \\ x & a_2 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & \cdots & a_N \end{vmatrix} = \left\{ 1 + x \sum_{l=1}^N \frac{1}{a_l - x} \right\} \prod_{l=1}^N (a_l - x). \quad (11)$$

应用行列式的基本性质, (11)式是不难证明的, 这里从略. 利用(11)式, 立即可得

$$\Delta_N = (-1)^N (2N-1)!! (\lambda + 1)^{N-1} [1 + \lambda - 2(\lambda - \mu^*) A_N], \quad (12)$$

其中

$$(2N-1)!! \equiv 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2N-1), \quad (13)$$

$$A_N \equiv 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2N-1}. \quad (14)$$

令 $\Delta_N = 0$, 唯一的正实根, 来自

$$1 + \lambda - 2(\lambda - \mu^*)A_N = 0, \quad (15)$$

即

$$\lambda = \lambda_0 \equiv \frac{2A_N\mu^* + 1}{2A_N - 1}. \quad (16)$$

当 $N \gg 1$,

$$\lambda_0 \cong \mu^*(N), \text{ 或 } z_0 \cong \mu^*(N)^{-1}. \quad (17)$$

四、讨 论

1) 为了明白起见, 我们简单地解释一下标准解析延拓手续的具体做法. 设 z 平面上以原点为中心的圆 1 (图 4) 是级数

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{n-1} \quad (18)$$

的收敛圆. 在收敛圆内, 于实轴上取一点 z_1^* . 以 z_1^* 为中心, 展开级数

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} d_n (z - z_1^*)^{n-1}. \quad (19)$$

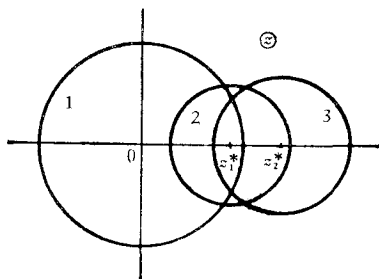


图 4

当 $z = z_1^*$ 时, 级数(18)式是收敛的, 并与(19)式重合:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n (z_1^*)^{n-1} = d_1. \quad (20)$$

这就定出了级数(19)式中的常数项 d_1 . 将(18)和(19)式都对 z 求导一次后, 令 $z = z_1^*$,

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-1) c_n (z_1^*)^{n-2} = d_2. \quad (21)$$

因(18)式所定义的函数在 $z = z_1^*$ 解析, (21)式左方的级数也是收敛的. 这就定出了系数 d_2 . 如此下去, 即可定出级数(19)式. (19)式所定义的函数在以 z_1^* 为中心的圆 2 内解析. 再在圆 2 内取一点 z_2^* , 重复上述过程, 只要沿实轴不遇到奇点的阻挡, 这样的过程能一直继续下去, 直到 $z = z_0$ 为止.

如果在实轴上有孤立奇点阻挡, 可以在复平面上绕过孤立奇点进行延拓, 不过这时不能保证, 绕过奇点之后, 回到实轴上, 延拓级数所定义的函数仍是实数. 但是对于我们的 T_c 级数, 不发生这个问题.

此外,适当选择展开的中心点 z_1^* , z_2^* 等,可以做到使级数有足够快的收敛速度.

2) 在文献[1]中导出原级数的过程中,应用了文献[1]的(10)式. 这个展式,只是在

$$y < \omega_{ph}^2 \quad (22)$$

的条件下收敛. 但这并不意味着,原级数也只能在与(22)式相对应的条件 $z < z_{ph}$ 下,才能成立. 易见

$$z_{ph} = \int \frac{\omega^2}{\omega^2 + \omega_{ph}^2} g(\omega) d\omega \leq \frac{\langle \omega^2 \rangle}{\omega_{ph}^2} < 1. \quad (23)$$

但前面分析表明,原级数(必要时进行延拓后)可以一直适用到 $z < z_0$, 而(17)式给出的 $z_0 \gg z_{ph}$.

3) 依照 McMillan^[6], 在弱耦合的极限下,

$$T_c \sim \exp\left(-\frac{1}{\lambda - \mu^*}\right). \quad (24)$$

$\lambda = \mu^*$ 是一个本性奇点. 这个本性奇点,是任何有限阶近似的 Matsubara 表象中决定 T_c 的方程所不能给出的. 具体的理由将在附录二中说明. 但是只要 $\lambda > \lambda_0 \cong \mu^*(N)$, 并且 N 足够大, N 级近似的 Matsubara 表象中决定 T_c 的方程,确实能给出正确的 T_c 解. 因此,我们的 T_c 级数,适用于 $\lambda > \lambda_0$ 的一切情形,但不给出在本性奇点的行为. 所以(24)式在这本性奇点的邻域内是代替不了的. 但除了这个小的邻域以外,我们的 T_c 级数,则是严格的. 这就是说,我们的 T_c 级数,可以把 McMillan 的 T_c 公式压缩到本性奇点的小邻域之中,只有在这个邻域之中,(24)式才是无可替代的、然而在这个邻域之中,(24)式也就是原始的 BCS 的临界温度公式.

4) 最后的结论是: 我们的 T_c 级数在 Matsubara 表象中决定 T_c 的方程有解的整个范围内都成立,能适用于也许除个别非常弱耦合的以外的一切超导体. 它还是一个严格解,并且我们正在找出它的闭合形式. 它能全面地反映出有效声子谱的形状对 T_c 的影响. 因此,我们预期,由它引出的,关于如何调整有效声子谱来提高 T_c 的意见,将是准确而可靠的.

附 录 一

这里就一级近似情形,举 Einstein 谱与双 δ 函数谱这两个简单的例子. 首先看 Einstein 谱的情形. 此时

$$g(\omega) = \delta(\omega - \omega_E). \quad (A1)$$

于是(3)式(为简单起见,设 $\mu^* = 0$) 给出

$$z = \frac{\omega_E^2 y}{\omega_E^2 y + 1} = F(y). \quad (A2)$$

由此解得

$$y = \frac{z}{\omega_E^2(1-z)} = G(z). \quad (A3)$$

很明显,函数 $F(y)$ 有极点 $y = -\omega_E^{-2}$, 而函数 $G(z)$ 有极点 $z = 1$. 在这个简单情形,极点支点是 $y = -\omega_E^{-2}$ 和 $z = z_0$. 分别退化成孤立极点 $y = -\omega_E^{-2}$ 和 $z = 1$. 除此以外,函数 $F(y)$ 和 $G(y)$ 没有别的奇点(见图 A1).

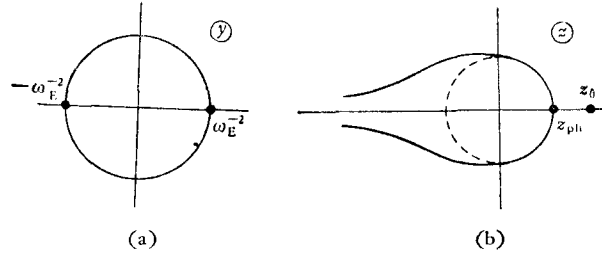


图 A1

顺便指出: 假如把 $F(y)$ 展成 y 的幂级数, 这个级数只有在 $y < \omega_E^{-2}$ 的条件下, 才收敛于 $F(y)$. 把这个幂级数, 用 Lagrange 定理反演成 z 的级数 (即 (1) 式), 很容易直觉地误认为, 只有当 $z < z_{ph}$ 时, z 级数才能收敛, 这里 z_{ph} 是条件 $y < \omega_E^{-2}$ 所决定的 z 值. 以 $y = \omega_E^{-2}$ 代入 (A2) 式, 得到 $z = z_{ph} = \frac{1}{2}$. 但实际上, z 级数的收敛范围是 $z < 1$.

这原因其实是很简单的. y 平面上的 $-\omega_E^{-2}$, ω_E^{-2} 和无穷远点分别映射成 z 平面上的无穷远点, z_{ph} 和 z_0 . y 平面上以原点为中心, 半径为 ω_E^{-2} 的圆, 映射到 z 平面上, 成为大致如图 A1(b) 中的曲线. 如果认为 z 平面上以原点为中心, 以 z_{ph} 为半径的圆是 Lagrange 反解给出的 z 级数的收敛圆就完全错了. 真实的收敛圆是 $|z| < z_0 = 1$. 对于 Einstein 谱, 具体作出一级近似的 T_c 级数 [文献 [1] 的 (15) 式], 很容易验证这一事实.

其次研究双 δ 函数谱的情形,

$$g(\omega) = a\delta(\omega - \omega_1) + (1-a)\delta(\omega - \omega_2), \omega_1 < \omega_2, a < 1. \quad (A4)$$

这时,

$$z = F(y) = \frac{a\omega_1^2 y}{\omega_1^2 y + 1} + \frac{(1-a)\omega_2^2 y}{\omega_2^2 y + 1} \quad (A5)$$

反函数是

$$y = G(z) = \frac{-[1-a+ar^2-(1+r^2)z] \pm [(1-r^2)z^2 - 2(1-a-r^2+ar^2)z + (1-a+ar^2)^2]^{1/2}}{2(1-z)r^2\omega_2^2}, \quad (A6)$$

其中 $r = \frac{\omega_1}{\omega_2} < 1$.

函数 $F(y)$ 在负实轴上有两个极点, $y = -\omega_1^{-2}$ 和 $y = -\omega_2^{-2}$. 函数 $G(z)$ 有一个极点 $z = z_0 = 1$, 另外还有两个一阶正则型支点 $\bar{z}_{\pm}$, 它们都不在实轴上 (见图 A2):

$$\bar{z}_{\pm} = \frac{1-a(1+r^2)}{1-r^2} \pm i \frac{\sqrt{4a(1-a)r^2}}{1-r^2}. \quad (A7)$$

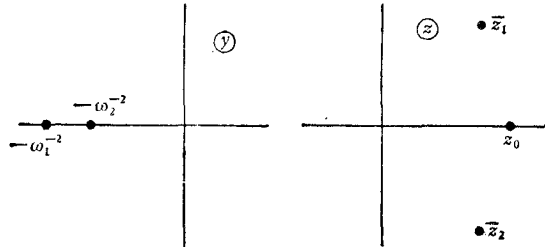


图 A2

只有在极端的情形: $r \rightarrow 0$, 或 $a \rightarrow 1$ 和 $a \rightarrow 0$, $\bar{z}_{\pm}$ 才会同时移到实轴上去. 在前一情形,

$$\bar{z}_{\pm} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 1 - a; \quad (\text{A8})$$

而在后两情形

$$\bar{z}_{\pm} \xrightarrow{a \rightarrow 1} -\frac{r^2}{1-r^2} \text{ 或 } \bar{z}_{\pm} \xrightarrow{a \rightarrow 0} \frac{r^2}{1-r^2}. \quad (\text{A9})$$

前一种情形,是非物理的. 在后两种情形, z 平面的正实轴上,仍只有 $z = z_0 = 1$ 的一个奇点. 支点 $\bar{z}_{\pm}$ 离原点的距离为

$$d = \frac{1-a+ar^2}{1-r^2}. \quad (\text{A10})$$

当 $r^2 > \frac{a}{1+a}$ 时, $d > 1$, 这时原 T_c 级数的收敛范围是从 0 到 $z_0 = 1$. 否则,是从 0 到 $d < 1$, 需要进行解析延拓,才能够扩展到 $z_0 = 1$.

附 录 二

这里,我们要计算图 3 中, $T_c \sim \lambda$ 曲线在 $\lambda = \lambda_0$ 点的导数. 有效声子谱 $\alpha^2 F$ 的任意变化 $\delta \alpha^2 F$, 导致 λ 的增量

$$d\lambda = 2 \int_0^{\infty} \frac{\delta \alpha^2 F}{\omega} d\omega. \quad (\text{A11})$$

所以

$$\frac{d\lambda}{dT_c} = 2 \int \frac{d\omega}{\omega} \left[\frac{\delta T_c}{\delta \alpha^2 F} \right]^{-1} \quad (\text{A12})$$

其次, $\lambda(n)$ [见(9)式]对 T_c 的导数为

$$\frac{d\lambda(n)}{dT_c} = 2 \int \frac{\omega d\omega}{\omega^2 + (2\pi n T_c)^2} \left[\frac{\delta T_c}{\delta \alpha^2 F} \right]^{-1} - 4(2\pi n)^2 T_c \int \frac{\omega \alpha^2 F d\omega}{[\omega^2 + (2\pi n T_c)^2]^2}.$$

当 $T_c \rightarrow 0$,

$$\frac{d\lambda(n)}{dT_c} \rightarrow \left. \frac{d\lambda}{dT_c} \right|_{T_c=0} \equiv \left[\frac{d\lambda}{dT_c} \right]_0. \quad (\text{A13})$$

将文献[1]的(1)式,对 T_c 求导后,令 $T_c \rightarrow 0$, 得到

$$\left[\frac{d\lambda}{dT_c} \right]_0 \left\{ \begin{array}{ccc} \lambda_0 - \mu^* & 2(\lambda_0 - \mu^*) & 2(\lambda_0 - \mu^*) \cdots \\ 2(\lambda_0 - \mu^*) & -\lambda_0 - 2\mu^* - 3 & 2(\lambda_0 - \mu^*) \cdots \\ 2(\lambda_0 - \mu^*) & 2(\lambda_0 - \mu^*) & -3\lambda_0 - 2\mu^* - 5 \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{ccc} \lambda_0 - 2\mu^* - 1 & 2(\lambda_0 - \mu^*) & 2(\lambda_0 - \mu^*) \cdots \\ 2(\lambda_0 - \mu^*) & -\lambda_0 - \mu^* & 2(\lambda_0 - \mu^*) \cdots \\ 2(\lambda_0 - \mu^*) & 2(\lambda_0 - \mu^*) & -3\lambda_0 - 2\mu^* - 5 \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{array} \right\} + \cdots = 0, \quad (\text{A14})$$

其中每个行列式仍可用(11)式算出,从而得到

$$(-1)^{N+1} (2N-1)!! (\lambda_0 + 1)^{N-1} \cdot 2(1 + \mu^*) A_N \left[\frac{d\lambda}{dT_c} \right]_0 = 0. \quad (\text{A15})$$

因此

$$\left[\frac{d\lambda}{dT_c} \right]_0 = 0. \quad (\text{A16})$$

这个结果,是在任何级近似下,对于无论什么有效声子谱都成立.

按同样的精神,可以证明

$$\left. \frac{d^2\lambda}{dT_c^2} \right|_{T_c \rightarrow 0} \equiv \left[\frac{d^2\lambda}{dT_c^2} \right]_0 = 4\pi^2\lambda_0 \left\langle \frac{1}{\omega^2} \right\rangle \frac{12N^2A_N - N^2 + A_N}{6A_N(2A_N - 1)} \gg 1. \quad (\text{A17})$$

以及

$$\left. \frac{d^3\lambda}{dT_c^3} \right|_{T_c \rightarrow 0} \equiv \left[\frac{d^3\lambda}{dT_c^3} \right]_0 = 12\pi^2\lambda_0 \left[\frac{d}{dT_c} \left\langle \frac{1}{\omega^2} \right\rangle \right]_0 \frac{12N^2A_N - N^2 + A_N}{6A_N(2A_N - 1)} \gg 1. \quad (\text{A18})$$

但计算较繁, 这里不予详述。

根据 (A16) — (A18) 等式, 可以知道, 任何 N 级近似的 $T_c \sim \lambda$ 曲线, 如图 3 所示, 在 $(\lambda = \lambda_0, T_c = 0)$ 一点的切线与 T_c 轴平行。也就是说, 曲线在这一点的行为是: 起初陡直地上升, 然而立即猛地掉头, 拐向 λ 轴。这样的情况与 (24) 式所正确地表达的在本性奇点的行为, 是完全不一样的。如所周知, 按照 (24) 式, $T_c \sim \lambda$ 曲线在本性奇点附近, 应与 λ 轴渐近地相切。因此, 在任何有限级近似下, 从 Matsubara 表象中决定 T_c 的方程, 都不可能得出在本性奇点附近的正确行为。然而, 随着近似级数的增高, 我们是能够任意地逼近这个本性奇点的。

参 考 文 献

- [1] 吴杭生、蔡建华、龚昌德、吉光达、蔡俊道, 物理学报, **26** (1977).
- [2] P. B. Allen and R. C. Dynes, *Phys. Rev.*, **B12**(1975), 905.
- [3] D. J. Scalapino and P. W. Anderson, *Phys. Rev.*, **133**(1964), A921.
- [4] C. S. Owen and D. J. Scalapino, *Physica*, **55**(1971), 691; 又见文献 [2].
- [5] E. T. Whittaker and G. N. Watson, *Modern Analysis*, chap. 7. 32.
- [6] W. L. McMillan, *Phys. Rev.*, **167**(1968), 331.

THEORY OF THE SUPERCONDUCTING CRITICAL TEMPERATURE (II)

GONG CHANG-DE WU HANG-SHENG CAI JIAN-HUA
CAI JUN-DAO JI GUANG-DA

ABSTRACT

In a previous paper (I), we have derived a rigorous series expression for the superconducting critical temperature T_c . Here we discuss the region of convergence of this series, and the possibility of its extension through analytical continuation. Our conclusion is that the above mentioned series or its analytical extension is convergent within the whole region $\infty > \lambda > \lambda_0$. By λ_0 we mean the smallest value of λ which can be taken such that the equation determining T_c in the Matsubara representation has a real positive solution. It is in fact the Coulomb pseudopotential. Therefore, excluding possibly a few very weakly coupled ones, our T_c formula is applicable to all superconductors.