

研究简报

原子共振中的相位调制*

廖世强

(中国科学院上海光学精密机械研究所)

一、理论考虑

Karplus 对原子共振的频率调制的一般形式作过研究^[1]。本文讨论量子系统受到一个相位经过调制的外场作用,在共振时感应辐射谱的线型、线型展宽以及能级移位效应。

假设有一个两能级系统,用 E_i^0 及 E_j^0 表示。当受外场 $\mathcal{E}(t)$ 微扰,系统发生共振时,能级变为 E_i 及 E_j , 这时对应的波函数 ϕ_i, ϕ_j 可用未受微扰时的本征函数 ϕ_i^0 及 ϕ_j^0 展开,形式为

$$\begin{aligned} \phi_i &= \sum_k c_{ik} \phi_k^0 \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_i d\tau\right), \\ \phi_j &= \sum_k c_{jk} \phi_k^0 \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_j d\tau\right). \quad (k = i \text{ 及 } j) \end{aligned} \quad (1)$$

令 $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \{\exp[i(\omega t + \varphi(t))] + \exp[-i(\omega t + \varphi(t))]\}$, 哈密顿量可写为

$$H(t) = H_0 + \boldsymbol{\mu} \cdot \mathcal{E}_0 \{\exp[i(\omega t + \varphi(t))] + \exp[-i(\omega t + \varphi(t))]\}, \quad (2)$$

$\boldsymbol{\mu}$ 为电或磁偶极子。

如果相位调制函数 $\varphi(t)$ 是正弦的,即令

$$\varphi(t) = \frac{a}{\Omega_m} \sin \Omega_m t, \quad (3)$$

利用二级微扰论解薛定谔方程以后,得到 c_{ij} 及 c_{ji} 的微分方程:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} c_{ij} - \hbar \omega_{ij}^0 c_{ij} - \mu_{ji} \mathcal{E}_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n\left(\frac{a}{\Omega_m}\right) \\ \cdot \{\exp[i(\omega + n\Omega_m)t] + \exp[-i(\omega + n\Omega_m)t]\} = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

其中

$$\mu_{ji} = \int \phi_j^{0*}(\mathbf{r}) \boldsymbol{\mu} \phi_i^0(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad \omega_{ij}^0 = \frac{1}{\hbar} (E_j^0 - E_i^0).$$

解方程(4)时,给出如下初始条件: $t = 0$ 时, E_i 能级上的粒子已经全部抽运集聚在高能级 E_j 上,考虑弛豫过程时,解中应包含有因子 $\exp(-\gamma t/2)$, $1/\gamma$ 为粒子在能级 E_j 上的寿命时间。则有

* 1978年3月22日收到。

$$c_{ij} = \frac{\mu_{ij}\mathcal{E}_0}{\hbar} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n\left(\frac{a}{\Omega_m}\right) \left\{ \frac{\exp[-i(\omega + n\Omega_m)t]}{(\omega - \omega_{ij}^0 + n\Omega_m) - i\gamma/2} - \frac{\exp[i(\omega + n\Omega_m)t]}{(\omega + \omega_{ij}^0 + n\Omega_m) + i\gamma/2} \right\}. \quad (5)$$

同样可求得

$$c_{ji} = \frac{-\mu_{ji}\mathcal{E}_0}{\hbar} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n\left(\frac{a}{\Omega_m}\right) \left\{ \frac{\exp[i(\omega + n\Omega_m)t]}{(\omega - \omega_{ij}^0 + n\Omega_m) + i\gamma/2} - \frac{\exp[-i(\omega + n\Omega_m)t]}{(\omega + \omega_{ij}^0 + n\Omega_m) - i\gamma/2} \right\}. \quad (6)$$

感应辐射跃迁几率 $p_{ij} = |c_{ij}|^2$, 由 Heitler 给出的感应辐射强度公式^[2], 可求得共振时谱线线型的表示式为

$$I(\omega) = \frac{\hbar\gamma\omega d\omega}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_m\left(\frac{a}{\Omega_m}\right) J_n\left(\frac{a}{\Omega_m}\right) L(\omega, \omega_{ij}, m\Omega_m, n\Omega_m), \quad (7)$$

其中

$$L(\omega, \omega_{ij}^0, m\Omega_m, n\Omega_m) = \frac{(\omega - \omega_{ij}^0 + m\Omega_m)(\omega - \omega_{ij}^0 + n\Omega_m) + \gamma^2/4}{\{(\omega - \omega_{ij}^0 + m\Omega_m)^2 + \gamma^2/4\}\{(\omega - \omega_{ij}^0 + n\Omega_m)^2 + \gamma^2/4\}} \quad (8)$$

称为线型因子。

在实验中调相深度一般很小, (8) 式中的 m, n 不会出现大数值, 所以谱的线型表示式近似地为

$$I(\omega) = \frac{\hbar\omega d\omega}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n^2\left(\frac{a}{\Omega_m}\right) \frac{\gamma/2}{(\omega - \omega_{ij}^0 + n\Omega_m)^2 + \gamma^2/4}. \quad (9)$$

可见, 感应辐射谱的线型, 实际是许多谱线的迭加结果, 这些线各自具有洛仑兹型。主线出现在 ω_{ij}^0 处, 旁线的位置则与调相频率有关, 旁线对应的频率为 $\omega_{ij}^0 + n\Omega_m$ ($n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$)。特别是 $n = \pm 1$ 的一次旁线引起谱线型宽度的变化, 调相讯号的频率 Ω_m 增高时, 线宽随着增大。当调相深度过大时, 旁线很强, 不但引起线宽极大加宽, 而且谱线也发生形变出现多峰, 这在实验中很清楚地观察到。

外场作用下, 能级产生移位效应。由于微扰量很小, 总可以认为 $c_{ii} = c_{ij} \approx 1$, 从微扰方程中直接得到

$$\begin{aligned} E_i &= E_i^0 + c_{ij}\mu_{ij}\mathcal{E}(t), \\ E_j &= E_j^0 + c_{ji}\mu_{ji}\mathcal{E}(t). \end{aligned} \quad (10)$$

计算时, 代入 c_{ij} 及 c_{ji} , 且应取实部; 同时注意到表示式 (5), (6) 中, 当 ω 趋近于 ω_{ij}^0 时, 右边括号内第一项分式变得很大, 表示共振情形。这样, 影响能级移位的只决定于第二项分式。将 (5) 和 (6) 式代入 (10) 式以后, 可以看到 E_i 及 E_j 这时多了一个交流函数调制项, 它对能级的影响应对时间取平均, 最后得

$$E_i = E_i^0 - \frac{|\mu_{ij}|^2\mathcal{E}_0^2}{2\hbar\omega_{ij}^0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n^2\left(\frac{a}{\Omega_m}\right),$$

$$E_i = E_j^0 + \frac{|\mu_{ij}|^2 \mathcal{E}_0^2}{2\hbar\omega_{ij}^0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n^2 \left(\frac{a}{\Omega_m} \right). \quad (11)$$

量子系统能级在调相外场作用下,能级向相反方向移位,对应的玻尔频率改变为

$$\begin{aligned} \omega_{ij} &= \omega_{ij}^0 + \Delta\omega_{ij}, \\ \Delta\omega_{ij} &= \frac{|\mu_{ij}|^2 \mathcal{E}_0^2}{\hbar\omega_{ij}^0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n^2 \left(\frac{a}{\Omega_m} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

这个物理量是不难观察到的.

二、实验结果

Andres 认为 Karplus 公式适用于双共振吸收谱^[3]. 吉村和幸与小林正纪直接解 Karplus 公式,计算了 Rb^{87} 双共振吸收谱的线型^[4],并和实验作了比较,但仍有一些实验现象不能得到满意的物理解释. 本文的理论推导,是和光-微波双共振的实验条件一致的. 本实验是在一台 Rb^{87} 双共振装置上进行的,其方框图见图 1. 用一低频讯号调制倍频器输入端讯号的相位,通过改变晶体振荡器的频率,使微波讯号频率发生变化. 从光检测的放大器输出端直接测量双共振吸收谱的微分曲线,同时在检相器的输出端对应地描出相检曲线(即 s 曲线). 证实吸收谱线宽随调相讯号频率,以及调制幅度的增加而展宽. 当调制频率较高,调制幅度够大时,观察到了线型变化出现多峰的过程. 能级移位的测量,是将实验装置和一台原子频标作频率比较,直接测出玻尔频率的变化量.

1. 双共振吸收谱线宽与调相讯号频率及调制幅度的关系见图 2. 改变微波讯号频率,在光检测放大器的输出端接上示波器,能观测到双共振吸收谱的微分曲线,如蝴蝶形状,两次微分讯号输出为最大时,所对应微波讯号频率之差,定义为吸收谱的线宽. 实验中,当调相讯号频率高于 140Hz 以后,若幅度大于 30mV 时,吸收谱就开始形变出现多峰,这时线宽就无法定义. 图中上面两条曲线就是这种情形,因此无法取更多的实验点.

2. 增大调相讯号幅度,旁线很强,双共振吸收谱出现形变的过程,可见图 3 至图 5. 图中的微分曲线为蝴蝶状讯号图象的包络曲线. 图 3 为调制幅度不大时,多峰情形尚未出现,可以认为谱线是洛仑兹型. 实验时调相讯号频率为 140Hz,坐标横轴零点对准吸收谱线主峰的中心. 图 4,图 5 为调相讯号频率不变情况下,增大调相讯号幅度,双共振谱出

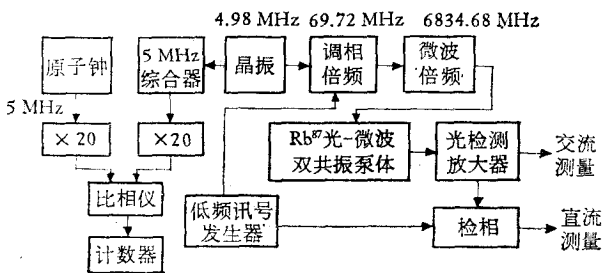


图 1 Rb^{87} 双共振实验装置方框图及测频系统

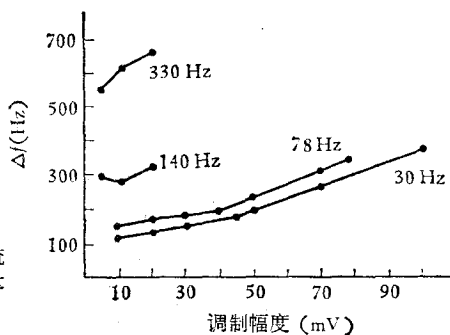
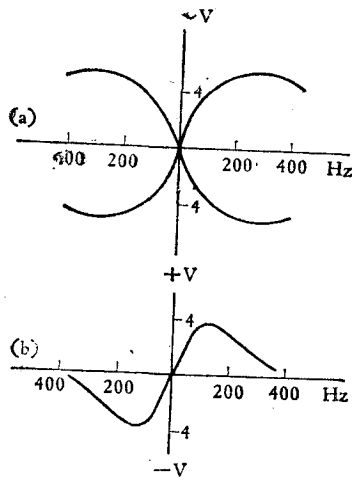
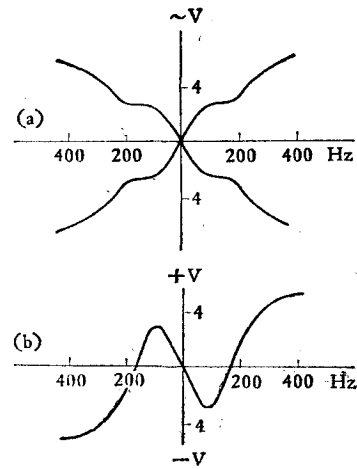


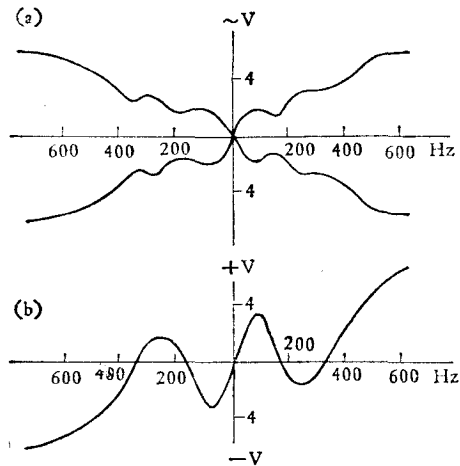
图 2 双共振吸收谱线宽与调相讯号频率及调制幅度的关系



(a) 微分曲线 (b) 相检曲线
图3 调相讯号幅度为 15mV 时双共振吸收谱线型



(a) 微分曲线 (b) 相检曲线
图4 调相讯号幅度为 30mV 时双共振吸收谱线开始变形



(a) 微分曲线 (b) 相检曲线
图5 调相讯号幅度为 45mV 时双共振吸收谱对称地出现多峰

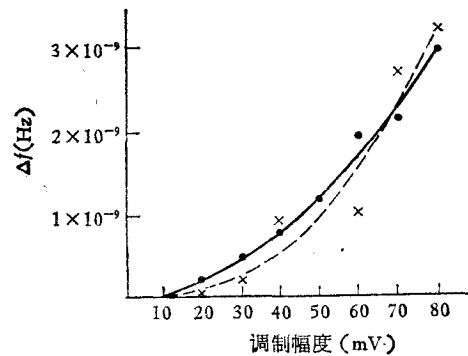


图6 调相讯号幅度与玻尔频率变化曲线
调相讯号幅度从 10 mV 开始增加, 纵坐标为相对于 10mV 时频率的移动值; 虚线为微波功率衰减 3.5dB 后的曲线

现多峰的过程,同时观察到相检曲线出现了扭拐。

3. 能级移位情形以及实测玻尔频率的变化。微波讯号是经过倍频获得的,从 4.98 MHz 晶振输出,经过线路倍频到 69.72MHz 后,所得功率为 160mW。再用阶跃二极管倍频到 6834.68MHz。进入双共振泵体的功率,实际是所有倍频的傅里叶谱功率的总和,约为 $100\mu\text{W}$ 。改变调相讯号的幅度,测得玻尔频率的变化。各测量点子的离散性还是比较大的,但仍然能看出玻尔频率的变化与调制幅度成非线性关系。

参 考 文 献

- [1] R. Karplus, *Phys. Rev.*, **73** (1948), 1027.
[2] W. Heitler, "The quantum theory of radiation", Third edition, Oxford at the Clarendon press (1954).
[3] J. M. Andres, D. J. Farmer and G. T. Inouye, *I. R. E. Trans. MIL*, **3** (1959), 178.
[4] 吉村和幸、小林正纪, 電波研究所季報, **19**(1973), 117.

PHASE MODULATION IN ATOMIC RESONANCE

LIAO SHI-QIANG

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)