第28卷 第5期 物 理 学 报 Vol. 28, No. 5
1979年9月 ACTA PHYSICA SINICA Sept., 1979

内扭曲模稳定性的充分判据*

王 中 天
(中国西南物理所)

引 言

目前理想磁流体稳定性的线性理论研究主要分两类：一类是自由边界等离子体的表面波．对这类表面波的研究指出了稳定窗的存在，即安全因子在一定区间才能使等离子体达到稳定；另一类是固定边界等离子体的内扭曲模，局部模是后一类的一部分，由于磁轴处剪切很小，所以这类扰动通常导致对磁轴处安全因子的苛刻限制．

1973年洛兹对固定边界，小体积等离子体推导了稳定性的充分判据[1,2]．本文重新研究了洛兹的充分判据，在圆截面情况下发展了洛兹的判据；我们得到的判据中有两个与札哈洛夫得到的必要判据重合．以前近轴局部模的研究在圆截面情况下没有指出对压力的限制，札哈洛夫的工作明确指出了压力梯度的增加将使稳定性变坏[3]．我们证明了札哈洛夫判据的充分性．

充分判据的导出

首先把等离子体的能量变分写成如下形式：

$$\delta w = w_1 + w_2, \tag{1}$$

$$w_1 = \int [\boldsymbol{Q}^2 + \boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{Q}\times\boldsymbol{j} + \boldsymbol{\xi}\cdot\nabla P(\nabla\cdot\boldsymbol{\xi})]d\tau,$$

$$w_2 = \int [\gamma P(\nabla\cdot\boldsymbol{\xi})^2]d\tau,$$

而 $\boldsymbol{Q} = \nabla\times\boldsymbol{\xi}\times\boldsymbol{B}$，其它符号有它们通常的意义．

我们引入自然坐标系 (θ, ζ, v)，

$$\nabla\theta\times\nabla\zeta\cdot\nabla v = 1,$$

$$\boldsymbol{B}\cdot\nabla\theta = \dot{\chi}, \quad \boldsymbol{j}\cdot\nabla\theta = \dot{I},$$

$$\boldsymbol{B}\cdot\nabla\zeta = \dot{\phi}, \quad \boldsymbol{j}\cdot\nabla\zeta = \dot{J}.$$

这时 w_1 可以写成[1]

$$w_1 = \int \{\boldsymbol{Q}^2 + 2[\boldsymbol{j}\cdot\nabla\mu + \dot{P}\dot{\xi} + \Omega\xi]\xi - \Omega\xi^2\}d\tau, \tag{2}$$

其中

* 1978年9月27日收到．

$$\dot{P} = \dot{I}\dot{\phi} - \dot{J}\dot{\chi}, \quad \Omega = \dot{I}\ddot{\phi} - \dot{J}\ddot{\chi},$$

$$\xi = \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla v, \qquad \mu = \dot{\phi}\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla\theta - \dot{\chi}\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla\zeta,$$

$$\boldsymbol{Q} = \left[\frac{\partial\mu}{\partial\zeta} - (\dot{\chi}\xi)'\right]\boldsymbol{e}_\theta - \left[\frac{\partial\mu}{\partial\theta} + (\dot{\phi}\xi)'\right]\boldsymbol{e}_\zeta + (\boldsymbol{B} \cdot \nabla\xi)\boldsymbol{e}_v,$$

这里"·"和"′"都表示对 v 的导数. 设

$$\boldsymbol{A} = \nabla\mu + (\dot{\phi}\xi)'\nabla\theta - (\dot{\chi}\xi)'\nabla\zeta,$$

于是得到

$$w_1 = \int \{[\boldsymbol{A} \times \nabla v + (\boldsymbol{B} \cdot \nabla\xi)\nabla\theta \times \nabla\zeta]^2 + 2\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{j}\xi - \Omega\xi^2\} d\tau. \tag{3}$$

在自然坐标系中, ξ 和 μ 可以用双重傅里叶级数展开:

$$\xi = \sum_{m,n} \xi_{mn}(v)\exp[2\pi i(m\theta + n\zeta)],$$

$$\mu = \sum_{m,n} \mu_{mn}(v)\exp[2\pi i(m\theta + n\zeta)]. \tag{4}$$

洛兹证明 $m = 0$ 以及 $m = n = 0$ 两种情况在固定等离子体边界时, 只要等离子体的体积充分小, 等离子体就是充分稳定的. $n = 0$ 的扰动是轴对称扰动, 对于固定边界等离子体而言是不重要的[4].

令 $m \neq 0$, $n \neq 0$, 这就是我们研究的内扭曲模. 在 (4) 式表达的 ξ, μ 中下面不包含 $m = 0$ 及 $n = 0$ 的模式. 令

$$\mu = \eta + \omega, \quad \frac{\partial\omega}{\partial\theta} = -(\dot{\phi}\xi)',$$

$$u = \int \boldsymbol{B} \cdot \nabla\xi d\theta, \tag{5}$$

则有

$$\frac{\partial\omega}{\partial\zeta} = -\frac{\partial}{\partial\zeta}\int(\dot{\phi}\xi)'d\theta, \ \boldsymbol{A} = \nabla\eta - u\nabla\zeta,$$

$$w_1 = \int \{[\nabla\eta \times \nabla v + \nabla u \times \nabla\zeta]^2 + 2\xi\boldsymbol{j} \cdot \nabla\eta - 2\dot{J}u'\xi - \Omega\xi^2\} d\tau. \tag{6}$$

w_1 中第一个平方项里的矢量在 ∇v 方向上投影的平方 $\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)^2/|\nabla v|^2$ 等于 $(\boldsymbol{B} \cdot \nabla\xi)^2/|\nabla v|^2$. 当 $v \to 0$ 时, $1/|\nabla v|^2 \to \infty$. 洛兹指出除非

$$m\dot{\chi}(v_0) + n\dot{\phi}(v_0) \to 0 \tag{7}$$

(这里 v_0 是磁轴附近的给定磁面), 否则就会导致磁面 v_0 是充分稳定的. 因此, 近轴的扰动主要是槽形的, 可以叠加的非槽形扰动只能是个小量.

在小体积等离子体的情况下, 引入量级为 $v^{1/2}$ 的小参量 ϵ, 把扰动按 ϵ 展开:

$$\xi = \xi_m + \epsilon\xi_1 + \epsilon^2\xi_2, \quad \eta = \mu_m + \epsilon\mu_1,$$

$$\xi_m' \sim \epsilon^{-2}\xi_m, \quad \xi_1' \sim \epsilon^{-2}\xi_1. \tag{8}$$

参见文献[2], 规度张量的对角分量的量级为

$$g_{vv} \sim \epsilon^{-2}; \ g_{\theta\theta} \sim \epsilon^2; \ g_{\zeta\zeta} \sim \epsilon^0. \tag{9}$$

当平衡位形是轴对称时, 各个 n 模可以分开研究. 因此, 对特定磁面 v_0, 给定 n 值

后，m 值被 (7) 式所限定. ξ_m, μ_m 是 v_0 面上的槽形扰动；而 ξ_1, ξ_2, μ_1 是非槽形扰动，因此它们不受 (7) 式的限制.

对于平衡量我们在 v_0 附近做泰勒展开；w_1 对 $\partial\mu_m/\partial\theta$ 极小化之后，对圆截面等离子体可以得到类似文献 [3] 中的结果，

$$\begin{aligned} w_1 = 4\pi^2 R \int \Big\{ \frac{1}{g_{\zeta\zeta}} \Big[\Big(\frac{\partial u_{m+1}}{\partial a}\Big)^2 + (m+1)^2 \frac{u_{m+1}^2}{a^2} + D\frac{\partial u_{m+1}}{\partial a} \\ + (m+1)D\frac{u_{m+1}}{a} + \Big(\frac{\partial u_{m-1}}{\partial a}\Big)^2 + (m-1)^2\frac{u_{m-1}^2}{a^2} + D\frac{\partial u_{m-1}}{\partial a} \\ - (m-1)D\frac{u_{m-1}}{a} + \frac{(m+1)g_{\zeta\zeta}}{n\dot\phi + (m+1)\dot\chi}\cdot\frac{u_{m+1}^2}{4\pi^2 aR}\frac{\partial j}{\partial a} \\ + \frac{(m-1)g_{\zeta\zeta}}{n\dot\phi + (m-1)\dot\chi}\cdot\frac{u_{m-1}^2}{4\pi^2 aR}\frac{\partial j}{\partial a} - g_{\zeta\zeta}P_1\ddot\phi\xi_m^2 - P_1^2\xi_m^2 \Big]\Big\} a\,da, \end{aligned} \tag{10}$$

其中

$$P_1 = \frac{m\dot I + n\dot J}{m},\quad D = \frac{2}{\iota}P_1\xi_m,\quad a = \sqrt{\frac{v}{2\pi^2 R}}.$$

这里 ι 是 v_0 面上的旋转变换，a 是新的径向坐标. (10) 式 w_1 的表达式略去了 ϵ 的高次项，因为 (4) 式表示的 ξ 不包括 $m=0$ 的项，所以对于 $m=1$ 的情况 u_{m-1} 等于零. w_1 对 m 是对称的，下面我们规定 m 为正值.

采用阶跃电流模型[3]

$$\begin{aligned} j &= j_1 \quad a < a_0; \\ j &= j_2 \quad a > a_0. \end{aligned} \tag{11}$$

这里 j_1 和 j_2 为常量，且有 $j_1 > j_2$, a_0 对应于给定磁面 v_0. 从 (11) 式得到

$$\frac{\partial J}{\partial a} = (j_1 - j_2)\delta(a - a_0). \tag{12}$$

这里 $\delta(a-a_0)$ 是所谓的 δ 函数.

w_1 对 u_{m+1} 和 u_{m-1} 极小化得到[3]

$$\begin{aligned} w_1 = \frac{1}{R}\int_0^{a_0}\Big\{\Big[-4\pi^2R^2P_1\ddot\phi - P_1^2\Big(1+\frac{2}{\iota^2}\Big)\Big]\xi_m^2\Big\} a\,da \\ - \frac{1}{R}2(m+1)\lambda\Big(\frac{1}{a_0^{m+1}}\int_0^{a_0}\frac{D}{2}a^{m+1}da\Big)^2, \end{aligned} \tag{13}$$

其中

$$\lambda = \frac{1 - 2\left(\frac{a_0}{b_1}\right)^{2(m+1)} + \frac{m}{n}\iota_2\left[1 - \left(\frac{a_0}{b_1}\right)^{2(m+1)}\right]}{\left(\frac{a_0}{b_1}\right)^{2(m+1)} - \frac{m}{n}\iota_2\left[1 - \left(\frac{a_0}{b_1}\right)^{2(m+1)}\right]},$$

$$\iota_2 = \frac{j_2 R}{2\dot\phi},\quad \frac{b_1^2}{a_0^2} = \frac{\iota_2 + \frac{n}{m}}{\iota_2 + \frac{n}{m+1}},$$

$$\iota=\frac{\dot{J}_1 R}{2\dot{\phi}}=-\frac{n}{m}=\frac{\dot{\chi}}{\dot{\phi}}.$$

这里 b_1 是 $m+1$ 模的共振面. 从 (13) 式可以看出,对 λ 为负值的扰动是不危险的,我们只研究使 λ 为正值的那种扰动. 为了取得充分判据,利用席瓦兹不等式

$$\int_0^{a_0} a^{2m} a da \int_0^{a_0} \frac{D^2}{4} a da \geqslant \left[\int_0^{a_0} \frac{D}{2} a^{m+1} da\right]^2,$$

则有

$$\frac{1}{2(m+1)}\int_0^{a_0} \frac{D^2}{4} a da \geqslant \left[\frac{1}{a_0^{m+1}}\int_0^{a_0} \frac{D}{2} a^{m+1} da\right]^2.$$

由 (13) 式可以得到充分判据,对于 $m \geqslant 2$ 的情况有

$$-4\pi^2 R^2 P' \dot{\phi}\ddot{\phi}-\left(1+\frac{2}{\iota^2}+\frac{\lambda}{\iota^2}\right) P'^2>0. \tag{14}$$

对于 $m=1$ 的情况,因 $u_{m-1}=0$, 得到

$$-4\pi^2 R^2 P' \dot{\phi}\ddot{\phi}-\left(1+\frac{1}{\iota^2}+\frac{\lambda}{\iota^2}\right) P'^2>0. \tag{15}$$

利用洛兹[2]给出的位形可以计算

$$4\pi^2 R^2 \frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}}=\frac{1}{R}\left[2+4\beta_p-2(1-\beta_p)\iota^2\right],$$

$$\frac{P'}{\dot{\phi}^2}=-\frac{2}{R} \beta_p \iota^2. \tag{16}$$

于是 (14), (15) 式可以分别写成如下形式:

$$\iota^2<1-\lambda\beta_p, \tag{17}$$

$$\iota^2<1-(\lambda-1)\beta_p. \tag{18}$$

类似文献 [3], 我们讨论两种极限情况:

1) $b_1 \to \infty$, 即 $\frac{R\dot{J}_2}{2\dot{\phi}}=-\frac{n}{m+1}$, 则 $\lambda=1/m$;

2) $\dot{J}_2=0$, 则 $\lambda=\left(\frac{m+1}{m}\right)^{m+1}-2$.

第一种情况对应低电流密度梯度;第二种情况对应高电流密度梯度.

最后,对于低电流密度梯度情况,在 $m \geqslant 2$ 时有

$$\iota^2<1-\beta_p/m; \tag{19}$$

在 $m=1$ 时有

$$\iota^2<1. \tag{20}$$

对于高电流密度梯度情况,在 $m \geqslant 2$ 时有

$$\iota^2<1-\beta_p\left[\left(\frac{m+1}{m}\right)^{m+1}-2\right]; \tag{21}$$

在 $m=1$ 时有

$$\iota^2<1-\beta_p. \tag{22}$$

讨　　论

我们得到的充分判据与洛兹[2]得到的充分判据相比是前进了一步．在那里对圆截面情况为

$$\iota^2 < 1 - 2\beta_p.$$

在 $m \geqslant 2$ 的情况，我们得到的判据与札哈洛夫得到的必要判据是重合的．这表明(19)，(21)式给出了稳定的充要条件．

关于电流密度阶跃的产生，有两个原因是需要考虑的．一个是放电后期电流向磁轴高度集中，使电流密度有很大梯度；另一个是由于杂质的辐射及热传导使等离子体边缘冷却，进一步使电流通道缩小，造成电流密度的阶跃．因此，内扭曲模可能是触发破裂不稳定性的重要因素．我们希望能控制电流分布，从而提高等离子体的稳定性．

参　考　文　献

[1] D. Lortz, *Nuclear Fusion*, **13** (1973), 817.
[2] D. Lortz, J. Nührenbeg, *Nuclear Fusion*, **13** (1973), 821.
[3] L. E. Zakharov, *Nuclear Fusion*, **18** (1978), 335.
[4] D. Dobrott, M. S. Chu, *Phys. Fluids*, **16** (1973), 1371.

THE SUFFICIENT CRITERION FOR THE INTERNAL MHD KINK INSTABILITY

WANG ZONG-TIAN

(*Southwestern Institute of Physics, China*)