第 28 卷 第 5 期 物 理 学 报 Vol. 28, No. 5
1979 年 9 月 ACTA PHYSICA SINICA Sept., 1979

等离子体状态方程的活动性参量展开*

安 志 刚
(中 国 西 南 物 理 所)

根据 Mayer 理论[1],非理想气体的状态方程可表为幂级数,它的一种形式是

$$p = kT\sum_{l=1}^{\infty} b_l z^l, \tag{1}$$

其中 z 是活动性参量 (activity), b_l 是集团积分;另一种形式是

$$p = nkT\left(1 - \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu\beta_\nu}{\nu+1}n^\nu\right), \tag{2}$$

其中 n 是密度, β_ν 是不可约集团积分. 这两种幂级数都不能直接应用于等离子体, 因为对于库仑相互作用,积分 b_l 和 β_ν 都是发散的.

(2) 式的发散困难已由 Mayer[2] 和 Abe[3] 解决,他们证明 (2) 式可以化为

$$p = nkT\left(1 - n\frac{d}{dn}\frac{s(n)}{n}\right), \tag{3}$$

其中 $s(n)$ 是收敛级数,

$$s(n) = \sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{\beta_{\nu-1}n^\nu}{\nu}. \tag{4}$$

(1) 式的收敛问题曾由 Rogers 和 DeWitt 研究过[4]. 他们用直接计算的办法证明了,含有一个、两个、三个、四个、五个 β_ν 因子的项对状态方程的贡献分别为

$$\begin{aligned}
(p/kT)_1 &= s(z);\\
(p/kT)_2 &= \frac{z}{2}\left(\frac{ds}{dz}\right)^2;\\
(p/kT)_3 &= \frac{z}{3!}\frac{d}{dz}z\left(\frac{ds}{dz}\right)^3;\\
(p/kT)_4 &= \frac{z}{4!}\left(\frac{d}{dz}z\right)^2\left(\frac{ds}{dz}\right)^4;\\
(p/kT)_5 &= \frac{z}{5!}\left(\frac{d}{dz}z\right)^3\left(\frac{ds}{dz}\right)^5.
\end{aligned} \tag{5}$$

Rogers 和 DeWitt 由明显的规律性指出,可以相信普遍的结果应该是

$$(p/kT)_m = \frac{z}{m!}\left(\frac{d}{dz}z\right)^{m-2}\left(\frac{ds}{dz}\right)^m. \tag{6}$$

本文的目的在于证明 Rogers 和 DeWitt 的猜想是正确的. 现证明如下:

* 1978 年 12 月 11 日收到.

引入辅助函数

$$q_m = \sum_{l=1}^{\infty} l^2 b_l \frac{z^l}{l^m}, \quad (m \geqslant 2) \tag{7}$$

由 (1) 式可知

$$p/kT = \left(z \frac{d}{dz}\right)^{m-2} q_m. \tag{8}$$

现在我们来计算含 m 个 β_ν 因子的项对 q_m 函数的贡献．利用集团积分与不可约集团积分之间的关系式[1]

$$l^2 b_l = \sum_{\substack{(\mu) \\ \Sigma \nu\mu_\nu = l-1}} \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{(l\beta_\nu)^{\mu_\nu}}{\mu_\nu!} \tag{9}$$

可将 (7) 式化为

$$q_m = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{\substack{(\mu) \\ \Sigma \nu\mu_\nu = l-1}} \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{(l\beta_\nu)^{\mu_\nu}}{\mu_\nu!} \frac{z^l}{l^m} \tag{10a}$$

$$= z \sum_{(\mu)} \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{(l\beta_\nu z^\nu)^{\mu_\nu}}{\mu_\nu!} \frac{1}{l^m}. \tag{10b}$$

注意在 (10b) 式中的 l 满足 $l = \Sigma \nu\mu_\nu + 1$，而对 μ_ν 的求和则不再受到附加条件的限制．现在要从 (10b) 式中挑选出 m 个 β_ν 因子的项，把它们的贡献的总和记为 $(q_m)_m$，那么，我们应选取的是 (10b) 式中满足 $\Sigma \mu_\nu = m$ 的诸项之和，即

$$(q_m)_m = z \sum_{\substack{(\mu) \\ \Sigma \mu_\nu = m}} \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\beta_\nu z^\nu)^{\mu_\nu}}{\mu_\nu!}. \tag{11}$$

用公式

$$\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} x_\nu\right)^m = \Sigma \frac{m!}{\mu_1! \mu_2! \cdots} x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \cdots = \sum_{\substack{(\mu) \\ \Sigma \mu_\nu = m}} m! \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{(x_\nu)^{\mu_\nu}}{\mu_\nu!}, \tag{12}$$

可将 (11) 式化为

$$(q_m)_m = \frac{z}{m!} \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu z^\nu\right)^m = \frac{z}{m!} \left(\frac{ds}{dz}\right)^m. \tag{13}$$

这里函数 $s(z)$ 的定义与 (4) 式相同，只要把 n 改为 z．把 (13) 式代入 (8) 式，得到

$$(p/kT)_m = \left(z \frac{d}{dz}\right)^{m-2} (q_m)_m = \frac{z}{m!} \left(\frac{d}{dz} z\right)^{m-2} \left(\frac{ds}{dz}\right)^m. \tag{14}$$

这便是 Rogers 和 DeWitt 的结果 (6) 式．求出所有的 m 之和，便得到

$$p/kT = z + s(z) + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{z}{m!} \left(\frac{d}{dz} z\right)^{m-2} \left(\frac{ds}{dz}\right)^m. \tag{15}$$

因为 Mayer 和 Abe 已证明 $s(z)$ 是解析函数[2,3]，所以 $s(z)$ 的任意阶导数是存在的，故展开式 (15) 的每一项都是有意义的．但 (15) 式本身也是一个无穷级数，它是否收敛，尚未得到普遍的证明．不过 (15) 式比 (1) 式还是进了一步，因为 (1) 式每项都是发散的积

分．此外，在 $s(z)$ 的初级近似下有

$$s(z) \cong s_0(z) = \frac{1}{12\pi}\left(\frac{4\pi e^2 z}{kT}\right)^{3/2}. \tag{16}$$

此时容易证明无穷级数(15)式本身也是收敛的．

参 考 文 献

[1] 王竹溪，统计物理学导论，高等教育出版社．
[2] J. E. Mayer, *J. Chem. Phys.*, **18** (1950), 1426.
[3] R. Abe, *Prog. Theor. Phys.*, **22** (1959), 213.
[4] F. J. Rogers and H. E. DeWitt, *Phys. Rev.*, **A8** (1973), 1061.

THE ACTIVITY EXPANSION FOR THE EQUATION OF STATE OF A PLASMA

AN ZHI-GANG

(*Southwestern Institute of Physics, China*)