第28卷 第5期 物 理 学 报 Vol. 28, No. 5
1979 年 9 月 ACTA PHYSICA SINICA Sept., 1979

一种高阶重力场方程及其静态球对称解*

时 永 澄

引 言

爱因斯坦从建立广义相对论开始直到他的统一场论的最后著作中，一直坚持场方程不能包含场变量的高于二阶导数的意见，他认为只有存在着"物理经验的理由"时，才应当越过这种限制[1].

考虑到万有引力常数可能有变化的一些迹象，以及高阶场方程曾经在电动力学中产生过积极作用，研究包含场变量高于二阶的导数的重力场方程是可行的.

爱因斯坦场方程反映了物质的能量动量张量通过 Ricci 张量影响空时度规的思想，对此我们作进一步推广，认为这种影响还与 Ricci 张量的变化率有关，从而建立了一种高阶重力场方程，其静态球对称解所提供的万有引力定律与 Long 的引力系数变化的经验公式相一致. 这种在某种程度上的巧合，是值得注意的.

一、由变分原理推导场方程

在广义相对论的变分原理中，拉格朗日函数为[2]

$$L = \frac{c^4}{16\pi G_0} R + L_M, \tag{1}$$

其中 G_0 为牛顿引力常数，c 为光速，L_M 为重力场以外一切场与物质的拉格朗日函数.

我们推广爱因斯坦场方程所显示的物质和外场的能量动量张量通过 Ricci 张量影响空时度规的思想，进一步认为这种影响还与 Ricci 张量的变化率有关，就要求在拉格朗日函数中加入曲率标量变化率 $R_{,\alpha}$ 的影响. 由于 $R_{,\alpha}$ 是矢量，不能与 R 相加，因此必须引入一个矢量 A^α 与之相乘构成一个标量. 这样一来，拉格朗日函数就具有下列形式:

$$L = \frac{c^4}{16\pi G_0}(R + A^\alpha R_{,\alpha}) + L_M. \tag{2}$$

在由作用量取稳态值获得场方程时，只考虑变分 $\delta g_{\mu\nu}$，矢量 A^α 作为参量在变分过程中保持不变，在此意义下使积分作用量

$$I = \int \sqrt{-g}\, L d\tau \tag{3}$$

达稳态值. 对于参量 A^α 的不同形式，稳态函数 $g_{\mu\nu}$ 不同. 这样获得的场方程肯定是不确定的.

* 1977 年 8 月 29 日收到；1978 年 9 月 29 日收到第一次修改稿；1979年 1 月 11 日收到第二次修改稿.

在上述意义下，变分原理可表为

$$\delta_g I = 0, \tag{4}$$

其中符号 δ_g 表示变分只涉及到基本场变量 $g_{\mu\nu}$. 这是一种包含参变函数的变分原理.

现有

$$\delta_g I = \int \delta_g(\sqrt{-g}\, L) d\tau = 0, \tag{5}$$

其中

$$\delta_g(\sqrt{-g}\, L) = \frac{1}{2\kappa}\{\delta[\sqrt{-g}\,(R + 2\kappa L_M)] + A^\alpha \delta(\sqrt{-g}\, R_{,\alpha})\}, \tag{6}$$

$$\kappa = \frac{8\pi G_0}{c^4}.$$

在爱因斯坦广义相对论中，曾经得到

$$\delta[\sqrt{-g}(R + 2\kappa L_M)] = \left\{\sqrt{-g}\left(g^{\mu\sigma}\delta\begin{Bmatrix}\rho\\ \mu\rho\end{Bmatrix} - g^{\mu\nu}\delta\begin{Bmatrix}\sigma\\ \mu\nu\end{Bmatrix}\right)\right.$$

$$\left. + 2\kappa\frac{\partial\sqrt{-y}\,L_M}{\partial\left(\dfrac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\rho}\right)}\delta g_{\mu\nu}\right\}_{,\sigma} - (G^{\mu\nu} + \kappa T^{\mu\nu})\sqrt{-g}\,\delta g_{\mu\nu}, \tag{7}$$

其中

$$T_{\mu\nu} \overset{\mathrm{def}^n}{=} \frac{2}{\sqrt{-g}}\left\{\frac{\partial}{\partial x^\rho}\frac{\partial\sqrt{-g}\,L_M}{\partial\left(\dfrac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\rho}\right)} - \frac{\partial\sqrt{-g}\,L_M}{\partial g^{\mu\nu}}\right\}.$$

对于式第二项，计算比较复杂. 首先有

$$A^\alpha\delta(\sqrt{-g}\,R_{,\alpha}) = A^\alpha\delta(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}R_{\mu\nu;\alpha}) = A^\alpha\delta(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu})R_{\mu\nu;\alpha}$$

$$+ A^\alpha\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu;\alpha} = -A^\alpha G^{\mu\nu}_{;\alpha}\sqrt{-g}\,\delta g_{\mu\nu} + A^\alpha\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu;\alpha}. \tag{8}$$

由于克里斯多菲符号的变分 $\delta\begin{Bmatrix}\rho\\ \mu\nu\end{Bmatrix}$ 是张量，易证 $\delta R_{\mu\nu}$ 是张量. 由 Palatini 关系式[3]

$$\delta R_{\mu\nu} = \left(\delta\begin{Bmatrix}\rho\\ \mu\rho\end{Bmatrix}\right)_{;\nu} - \left(\delta\begin{Bmatrix}\rho\\ \mu\nu\end{Bmatrix}\right)_{;\rho},$$

可得

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\left[\sqrt{-g}\left(g^{\mu\sigma}\delta\begin{Bmatrix}\rho\\ \mu\rho\end{Bmatrix} - g^{\mu\nu}\delta\begin{Bmatrix}\sigma\\ \mu\nu\end{Bmatrix}\right)\right]_{,\sigma}. \tag{9}$$

显然 $g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}$ 是标量. 此外还可得到

$$\delta R_{\mu\nu;\alpha} = (\delta R_{\mu\nu})_{;\alpha} - \delta\begin{Bmatrix}\rho\\ \alpha\nu\end{Bmatrix}R_{\mu\rho} - \delta\begin{Bmatrix}\rho\\ \alpha\mu\end{Bmatrix}R_{\rho\nu}. \tag{10}$$

由于 $\delta R_{\mu\nu}$, $\delta\begin{Bmatrix}\rho\\ \alpha\nu\end{Bmatrix}$ 是张量，故上式右边是张量，因而 $\delta R_{\mu\nu;\alpha}$ 也是张量.

在所考虑的点处引入局部短程系，在此局部短程系中

$$A^{\alpha}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu;\alpha}=A^{\alpha}(g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu})_{,\alpha}. \tag{11}$$

由于在一般坐标系中 $\delta R_{\mu\nu;\alpha}$，$\delta R_{\mu\nu}$ 是张量，故上式两边均为标量，因而该式在一切坐标系中均成立.

利用关系式 (9)，(11)，可将 (8) 式化为

$$A^{\alpha}\delta(\sqrt{-g}\,R_{,\alpha})=-A^{\alpha}G^{\mu\nu}_{;\alpha}\sqrt{-g}\,\delta g_{\mu\nu}+\Big[\sqrt{-g}\,A^{\sigma}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}-\sqrt{-g}\,A^{\alpha}_{;\alpha}\times\Big(g^{\mu\sigma}\delta\Big\{{\rho \atop \mu\rho}\Big\}-g^{\mu\nu}\delta\Big\{{\sigma \atop \mu\nu}\Big\}\Big)\Big]_{,\sigma}+\sqrt{-g}\,(A^{\alpha}_{;\alpha})_{,\sigma}\Big(g^{\mu\sigma}\delta\Big\{{\rho \atop \mu\rho}\Big\}-g^{\mu\nu}\delta\Big\{{\sigma \atop \mu\nu}\Big\}\Big),$$

令

$$\phi_{\sigma}\overset{\text{def}''}{=}(A^{\alpha}_{;\alpha})_{,\sigma}, \tag{12}$$

考虑到

$$g_{\rho\tau,\mu}\delta g^{\rho\tau}-g^{\rho\tau}_{,\mu}\delta g_{\rho\tau}=0,$$

经过一定的运算可将上式化为

$$\begin{aligned}A^{\alpha}\delta(\sqrt{-g}\,R_{,\alpha})&=\Big[\sqrt{-g}\,A^{\sigma}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}-\sqrt{-g}\,A^{\alpha}_{;\alpha}\Big(g^{\mu\sigma}\delta\Big\{{\rho \atop \mu\rho}\Big\}-g^{\mu\nu}\delta\Big\{{\sigma \atop \mu\nu}\Big\}\Big)\\&-\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,(\phi^{\tau}g^{\mu\sigma}+\phi^{\mu}g^{\tau\sigma}-\phi^{\sigma}g^{\mu\tau})\delta g_{\mu\tau}\Big]_{,\sigma}-A^{\alpha}G^{\mu\nu}_{;\alpha}\sqrt{-g}\,\delta g_{\mu\nu}\\&+\frac{\sqrt{-g}}{2}\Big\{\frac{1}{\sqrt{-g}}[\sqrt{-g}(\phi^{\mu}g^{\nu\tau}+\phi^{\nu}g^{\mu\tau}-\phi^{\tau}g^{\mu\nu})]_{,\tau}+g^{\alpha\beta}\Big(\phi^{\mu}\Big\{{\nu \atop \alpha\beta}\Big\}+\phi^{\nu}\Big\{{\mu \atop \alpha\beta}\Big\}\Big)\\&-\phi^{\alpha}_{;\alpha}g^{\mu\nu}\Big\}\delta g_{\mu\nu}.\end{aligned} \tag{13}$$

上式右边最后一项大括号内的表达式经过一定的运算可表为张量的协变导数

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{-g}}[\sqrt{-g}\,(\phi^{\mu}g^{\nu\tau}+\phi^{\nu}g^{\mu\tau}-\phi^{\tau}g^{\mu\nu})]_{,\tau}+g^{\alpha\beta}\Big(\phi^{\mu}\Big\{{\nu \atop \alpha\beta}\Big\}+\phi^{\nu}\Big\{{\mu \atop \alpha\beta}\Big\}\Big)-\phi^{\alpha}_{;\alpha}g^{\mu\nu}\\&=(\phi^{\mu}g^{\nu\tau}+\phi^{\nu}g^{\mu\tau}-2\phi^{\tau}g^{\mu\nu})_{;\tau}.\end{aligned} \tag{14}$$

令

$$\lambda\overset{\text{def}''}{=}\phi^{\tau}_{;\tau},\quad S^{\mu\nu}\overset{\text{def}''}{=}A^{\alpha}G^{\mu\nu}_{;\alpha}-\frac{1}{2}(\phi^{\mu}g^{\nu\alpha}+\phi^{\nu}g^{\mu\alpha})_{;\alpha}, \tag{15}$$

则由 (6)，(7)，(13) 式和 (14) 式可得

$$\begin{aligned}\delta_g(\sqrt{-g}\,L)&=\frac{1}{2\kappa}\Big\{\sqrt{-g}(1-A^{\alpha}_{;\alpha})\Big(g^{\mu\sigma}\delta\Big\{{\rho \atop \mu\rho}\Big\}-g^{\mu\nu}\delta\Big\{{\sigma \atop \mu\nu}\Big\}\Big)+A^{\sigma}\Big[\sqrt{-g}\\&\times\Big(g^{\mu\tau}\delta\Big\{{\rho \atop \mu\rho}\Big\}-g^{\mu\nu}\delta\Big\{{\tau \atop \mu\nu}\Big\}\Big)\Big]_{,\tau}-\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,(\phi^{\tau}g^{\mu\sigma}+\phi^{\mu}g^{\tau\sigma}-\phi^{\sigma}g^{\mu\tau})\delta g_{\mu\tau}\\&+2\kappa\frac{\partial\sqrt{-g}\,L_M}{\partial\Big(\dfrac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}}\Big)}\delta g^{\mu\nu}\Big\}_{,\sigma}-\frac{\sqrt{-g}}{2\kappa}(G^{\mu\nu}+\lambda g^{\mu\nu}+S^{\mu\nu}+\kappa T^{\mu\nu})\delta g_{\mu\nu}.\end{aligned} \tag{16}$$

将 (16) 式代入 (5) 式，利用散度定理，考虑到 $\delta g_{\mu\nu}$ 在积分边界上到处为零，可以得

到

$$\frac{1}{2\kappa}\int\sqrt{-g}\,(G^{\mu\nu}+\lambda g^{\mu\nu}+S^{\mu\nu}+\kappa T^{\mu\nu})\delta g_{\mu\nu}d\tau=0. \tag{17}$$

此式左边被积函数中包含四个参变量 A^α. 无论引入任何形式的非协变坐标条件，我们可以通过参量 A^α 的选择使 $\delta g_{\mu\nu}$ 的四个非独立分量前的系数为零，于是由(17)式，剩余 $\delta g_{\mu\nu}$ 的六个独立分量前的系数必须为零，这样就得到下列场方程：

$$G^{\mu\nu}+\lambda g^{\mu\nu}+S^{\mu\nu}=-\kappa T^{\mu\nu}. \tag{18}$$

此方程包含 A^μ, $g^{\mu\nu}$ 和决定 $T^{\mu\nu}$ 的物质密度 ρ，四度速度 v^μ 共计十八个未知量. 场方程左边不满足任何恒等式，十个场方程是独立的. 除了必须引入四个非协变的坐标条件外，能量动量张量散度为零的方程

$$T^{\mu\nu}_{;\nu}=0, \tag{19}$$

由于不再作为场方程的推论，应当与场方程和坐标条件联立，共同确定引力场和物质的运动.

由方程 (19) 结合场方程容易导出近似表征物体运动的牛顿方程[4,5].

方程 (19) 等价于下列方程:

$$\lambda^{,\mu}+S^{\mu\nu}_{;\nu}=0. \tag{20}$$

这只要对场方程 (18) 取散度后即得. 这个方程使矢量 A^α 与场变量 $g_{\mu\nu}$ 相关联，可作为矢量 A^α 的定义方程. 因此可将方程 (18) 和 (20) 联立构成完整的场方程:

$$G^{\mu\nu}+\lambda g^{\mu\nu}=-(\kappa T^{\mu\nu}+S^{\mu\nu}), \tag{21}$$

$$S^{\mu\nu}_{;\nu}=-\lambda^{,\mu}. \tag{22}$$

显然，散度方程 (19) 成为该场方程组的自然推论.

这一组场方程是由十四个相互独立的方程构成的高阶拟线性偏微分方程组. 爱因斯坦重力场方程成为 $A^\alpha=0$ 时的特例.

二、静态球对称解

场方程(21)左边第二项对应于爱因斯坦宇宙项，它曾导致 De Sitter 解. 该解不满足无穷远处度规的欧氏条件. 为了消除这一项，只须令 $\lambda=0$. 显然当

$$A^\alpha_{;\alpha}=\text{const} \tag{23}$$

成立时，就有 $\lambda=0$，以及 $\phi^\mu=0$，(15) 式的第二式化为

$$S^{\mu\nu}=A^\alpha G^{\mu\nu}_{;\alpha}. \tag{24}$$

在无物质的空间，$T^{\mu\nu}=0$，场方程 (21) 化为

$$R^{\mu\nu}+A^\alpha R^{\mu\nu}_{;\alpha}=0. \tag{25}$$

按照 Schwarzschild，设场方程具有球对称性，并与时间坐标无关，引入变量

$$r=\sqrt{(\xi^1)^2+(\xi^2)^2+(\xi^3)^2},\quad \chi_p=\xi^p/r,$$

利用 Bergman 的结果[3]，我们有

$$R_{44}=-\lambda_1 e^{\mu-\nu},\quad R_{4s}=0,\quad R_{ps}=\lambda_2\chi_p\chi_s+\tau(\chi_p\chi_s-\delta_{ps}),$$

其中

$$\lambda_1 \overset{\text{def}^n}{=} \frac{1}{2}\mu'' + \frac{1}{r}\mu' + \frac{1}{4}\mu'(\mu' - \nu'),\quad \lambda_2 \overset{\text{def}^n}{=} \frac{1}{2}\mu' - \frac{1}{r}\nu' + \frac{1}{4}\mu'(\mu' - \nu'),$$

$$\tau \overset{\text{def}^n}{=} \frac{1}{r^2} - e^{-\nu}\left[\frac{1}{r^2} + \frac{1}{2r}(\mu' - \nu')\right].$$

设 $A^s = A(r)\chi_s$，$A^4 = 0$，经过一定运算，可得

$$A^\alpha R_{44;\alpha} = -(\lambda_1 e^{-\nu})' e^\mu A,\quad A^\alpha R_{4s;\alpha} = 0,$$

$$A^\alpha R_{ps;\alpha} = \{(\lambda_2' - \nu'\lambda_2)\chi_p\chi_r + \tau'(\chi_p\chi_r - \delta_{pr})\}A,$$

$$A^\alpha_{;\alpha} = A' + \frac{1}{2}\left(\mu' + \nu' + \frac{4}{r}\right)A.$$

将上列有关各式代入场方程 (25) 的协变式和 (23) 式后，可得下列方程：

$$A' + \frac{1}{2}\left(\mu' + \nu' + \frac{4}{r}\right)A = C_0, \tag{26}$$

$$\lambda_1 e^{-\nu} + (\lambda_1 e^{-\nu})' A = 0, \tag{27}$$

$$\lambda_2 e^{-\nu} + (\lambda_2 e^{-\nu})' A = 0, \tag{28}$$

$$\tau + \tau' A = 0, \tag{29}$$

其中 C_0 为常数．令

$$\theta \overset{\text{def}^n}{=} \frac{\mu' + \nu'}{r} e^{-\nu}, \tag{30}$$

方程 (27) 减方程 (28) 后可得

$$\theta + \theta' A = 0. \tag{31}$$

显然，$\theta = 0$ 是这个方程的一个特解，它对应于

$$\mu' + \nu' = 0. \tag{32}$$

这个关系式在爱因斯坦广义相对论的同样场合下成立．由此出发进一步求解场方程，以求得与广义相对论的解最为接近的解是现实的．

将 (32) 式代入 (26) 式得到下列特解：

$$A = r(3 - \beta)^{-1}\quad \beta = 3(1 - 1/C_0). \tag{33}$$

将 (33) 式代入 (29) 式后求出

$$\tau = \tau_0 / r^{3-\beta}, \tag{34}$$

式中 τ_0 为积分常数．

令

$$\sigma \overset{\text{def}^n}{=} e^{-\nu},$$

利用关系式 $\mu' = -\nu'$，由 τ 的定义式和(34)式可得下列方程：

$$\sigma' + \frac{\sigma - 1}{r} = -\frac{1}{r^{2-\beta}}. \tag{35}$$

由此方程解出

$$\sigma = \begin{cases} 1 - \dfrac{\alpha}{r} - \dfrac{\tau_0}{\beta}\dfrac{1}{r^{1-\beta}} & \text{当 } \beta \neq 0, \quad (36) \\[2ex] 1 - \dfrac{\alpha}{r} - \dfrac{\tau_0}{r}\ln r & \text{当 } \beta = 0. \quad (37) \end{cases}$$

这里 α 为积分常数. 极限 $\lim\limits_{\beta\to 0}(r^\beta/\beta)=\infty$ 表明这个解不连续依赖于参数 β. 对应于 $\beta>0$, $\beta=0$ 和 $\beta<0$ 有三种不同特性的解. 这可能反映了不同的引力质点的存在,它们有着不同的引力场和几何构造. 在宏观上,引力场由重质点场决定,对应于 $\beta=0$,

$$\sigma=1-\frac{\alpha}{r}-\frac{\tau_0}{r}\ln r. \tag{38}$$

由 (32) 式得到 $\mu+\nu=\beta_0$, β_0 是积分常数. 于是

$$e^\mu=e^{\mu+\nu}\sigma=e^{\beta_0}\left[1-\frac{\alpha}{r}(1+\epsilon\ln r)\right],$$

其中 $\epsilon=\tau_0/\alpha$. 为了在 $r\to\infty$ 时得到欧氏度规,必须令 $\beta_0=0$.

在静态球对称情况下,由短程线方程可得引力场强度径向值为

$$g=-e^{-\mu}\begin{Bmatrix} l \\ 44\end{Bmatrix}\chi_l=-\frac{1}{2}e^{-(\mu+\nu)}(e^\mu)'.$$

由于 $\beta_0=0$, 有

$$g=-\frac{1}{2}(e^\mu)'=-\frac{\alpha(1+\epsilon)}{2r^2}(1+\epsilon_0\ln r),$$

式中 $\epsilon_0=\epsilon/(1+\epsilon)$. 为了获得牛顿近似,必须令

$$\alpha(1+\epsilon)=2G_0M,$$

式中 M 为引力源质量. 由此得到下列场强公式:

$$g=-GM/r^2, \tag{39}$$

式中 G 为所谓引力系数,它不再是常数,

$$G=G_0(1+\epsilon_0\ln r). \tag{40}$$

此式与 Long 关于万有引力系数变化的经验公式的形式完全一致[6]. 在该经验公式中,当 r 以厘米为单位时, $\epsilon_0=0.002$. 这里积分常数 ϵ_0 还可能与引力源质量 M 有关.

采用通常的时间单位,在写出度规表达式时应将 G_0 换为 G_0/c^2 (c 为光速); 考虑到 ϵ_0 非常小时, $\epsilon\approx\epsilon_0$, $\alpha\approx 2G_0M/c^2$, 由 $\beta_0=0$ 及 (38) 式求得全部场度规解为

$$g_{44}=1-\frac{2G_0M}{c^2r}(1+\epsilon_0\ln r),\quad g_{4s}=0,$$
$$g_{rs}=-\delta_{rs}-\frac{2G_0M(1+\epsilon_0\ln r)}{c^2r-2G_0M(1+\epsilon_0\ln r)}\chi_r\chi_s. \tag{41}$$

利用这个度规表达式,对行星近日点进动问题进行了计算,得到行星公转一周近日点的进动值为

$$\Delta\varphi=\frac{6\pi G_0M}{c^2p}(1+\epsilon_0\ln p)-\frac{2\epsilon_0\pi}{1+\epsilon_0\ln p}.$$

当 $\epsilon_0=0$ 时此式与爱因斯坦的结果相同. 由该式不难看出,对于太阳, ϵ_0 必须取比 0.002 小得多的数值才能符合实际. 由此看来, ϵ_0 应与引力源质量有一定的反变关系. 可以对不同质量的引力源重复 Long 经验公式所依据的实验,以确定 ϵ_0 与 M 之间的相依关系.

对于光线在重力场中的偏折问题. 我们求得

$$\Delta\varphi = \frac{4G_0M}{c^2R}(1 + \epsilon_0 \ln R),$$

当 $\epsilon_0 = 0$ 时，与爱因斯坦结果一致．当 R 取为太阳半径时，若采用 $\epsilon_0 = 0.002$ 按此式计算得到经过太阳表面的光线偏折角为 1.84″．

对光谱线引力移动问题，我们求得引力位移为

$$\delta\nu = \frac{G_0M}{c^2R}(1 + \epsilon_0 \ln R)\nu_0,$$

式中 R 为恒星半径，当 $\epsilon_0 = 0$，上式化为爱因斯坦的结果．

参　考　文　献

[1] 爱因斯坦，«相对论的意义»．
[2] R. H. Dicke, ''The Theoretical Significance of Experimental Relativity''.
[3] P. G. 柏格曼，相对论引论．
[4] A. Я. 福克，«时间、空间和重力的理论»．
[5] E. G. Harris, ''Introduction to Modern Theoretical Physics'', Vol. 1.
[6] D. R. Long, *Science News*, **109** (1976), 244.

A GRAVITATIONAL FIELD EQUATION WITH HIGHER ORDER DERIVATIVES AND IT'S SPHERICALLY SYMMETRIC STATIC SOLUTIONS

Shey Young-cheng