

关于等离子体川流激发回旋 不稳定性的尼奎斯特判据*

陆 全 康

(复 旦 大 学)

提 要

本文分析沿外磁场方向的等离子体川流激发回旋不稳定性的尼奎斯特图。阐述包含变量 n (川流等离子体的电子密度), n_0 (静止等离子体的电子密度), B (外磁场强度), k (波数), v (川流速度) 与 T (体系温度) 的不稳定性判据的计算方法。具体算出氢等离子体的定量结果。为探讨不稳定区域的特征, 还分析了有两支川流时的回旋与静电不稳定性。

一、回旋波色散关系的尼奎斯特图

关于由川流激发不稳定性的问题已作了相当广泛的研究^[1,2]。利用尼奎斯特图^[3]可求得全面和严格的不稳定性判据。文献[4]给出分布函数各向异性的回旋波色散关系。本节考虑由 i 支等离子体川流与静止等离子体所组成的体系。设川流速度 V_i , 波矢 k 与外磁场强度 B 均沿 z 方向, 则回旋波色散关系成为

$$\begin{aligned} k^2 = W\left(\frac{\omega}{k}, k\right) &= Y\left(\frac{\omega}{k}, k\right) / \left(c^2 - \frac{\omega^2}{k^2}\right) \\ &= \left\{ \omega_{pe}^2 \left[\frac{\omega}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_e(v_z) dv_z}{v_z - \frac{\omega}{k} \pm \frac{\omega_{ce}}{k}} + \sum_i \frac{n_i}{n_0} \left(\frac{\omega}{k} - V_i \right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_e(v_z - V_i) dv_z}{v_z - \frac{\omega}{k} \pm \frac{\omega_{ce}}{k}} \right] \right. \\ &\quad + \omega_{pi}^2 \left[\frac{\omega}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_i(v_z) dv_z}{v_z - \frac{\omega}{k} \mp \frac{\omega_{ci}}{k}} \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_i \frac{n_i}{n_0} \left(\frac{\omega}{k} - V_i \right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_i(v_z - V_i) dv_z}{v_z - \frac{\omega}{k} \mp \frac{\omega_{ci}}{k}} \right] \right\} / \left(c^2 - \frac{\omega^2}{k^2}\right) \quad \left(\text{Im } \frac{\omega}{k} > 0\right), \end{aligned} \quad (1)$$

式中具有 $\pm$ (或 $\mp$) 的项, 取上面的符号时, 对应于反常波; 取下面的符号时, 对应于正常波。(1) 式中 ω 为复频率, 波数 k 为实数, ω_{pe} 和 ω_{pi} 各为电子和离子等离子体频率, ω_{ce}

* 1977年10月31日收到; 1978年1月17日收到修改稿; 8月22日收到第二次修改稿。

和 ω_{ci} 各为电子和离子回旋频率, n_{si} 为第 i 支川流的电子(离子)密度(为叙述简便, 本文设离子是一次电离的). (1) 式中

$$f_{e,i}(v_z - V_i) = \left(\frac{m_{e,i}}{2\pi kT} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{m_{e,i}(v_z - V_i)^2}{2kT} \right], \quad (2)$$

$m_{e,i}$ 为电子、离子质量, T 为体系温度, k 为玻耳兹曼常数.

将色散关系写成不同形式, 可作出不同的尼奎斯特分析. 本节先采用文献 [5] 的分析方法, 文献 [5] 中分析了静电与电磁波, 现在这里分析回旋波. 将 (1) 式改写成

$$M(\omega, k) \equiv k^2 c^2 - \omega^2 - Y(\omega, k) = 0. \quad (3)$$

由 (3) 式 [并参考 (1) 式] 可知, $M(\omega, k)$ 是在 ω 的上半平面中的解析函数. 沿图 1 所示的围道, 由辐角原理得出回旋波的 $M(\omega, k)$ 在上半平面的零点个数 N 为

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{2\pi i} \oint \left(\frac{1}{M} \frac{dM}{d\omega} \right) d\omega = \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{C_R} \left(\frac{1}{M} \frac{dM}{d\omega} \right) d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{M} \frac{dM}{d\omega} \right) d\omega \right] \\ &= 1 + \frac{1}{2\pi} [\omega \text{ 沿实轴从 } -\infty \text{ 变向 } \infty \text{ 时, } M(\omega, k) \text{ 的辐角变化值}]. \end{aligned} \quad (4)$$

这里利用了, 由 (1) 与 (3) 式, 当 ω 沿 $C_R (R \rightarrow \infty)$ 时, $M(\omega, k) \approx -\omega^2$. 当 $N \geq 1$ 时, 色散关系有解, 即体系中有回旋不稳定性存在.

当 ω 沿实轴时, 由解析延拓得

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} Y &= \omega_{pe}^2 \left[\frac{\operatorname{Re} \omega}{k} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_e(v_z) dv_z}{v_z - \frac{\operatorname{Re} \omega}{k} \pm \frac{\omega_{ce}}{k}} + \sum_i \frac{n_{si}}{n_0} \left(\frac{\operatorname{Re} \omega}{k} - V_i \right) P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_e(v_z - V_i) dv_z}{v_z - \frac{\operatorname{Re} \omega}{k} \pm \frac{\omega_{ce}}{k}} \right] \\ &\quad + \omega_{pi}^2 \left[\frac{\operatorname{Re} \omega}{k} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_i(v_z) dv_z}{v_z - \frac{\operatorname{Re} \omega}{k} \mp \frac{\omega_{ci}}{k}} + \sum_i \frac{n_{si}}{n_0} \left(\frac{\operatorname{Re} \omega}{k} - V_i \right) P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_i(v_z - V_i) dv_z}{v_z - \frac{\operatorname{Re} \omega}{k} \mp \frac{\omega_{ci}}{k}} \right], \end{aligned} \quad (5a)$$

与

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} Y &= \pi \omega_{pe}^2 \left[\frac{\operatorname{Re} \omega}{k} f_e \left(\frac{\operatorname{Re} \omega}{k} \mp \frac{\omega_{ce}}{k} \right) + \sum_i \frac{n_{si}}{n_0} \left(\frac{\operatorname{Re} \omega}{k} - V_i \right) f_e \left(\frac{\operatorname{Re} \omega}{k} - V_i \mp \frac{\omega_{ce}}{k} \right) \right] \\ &\quad + \pi \omega_{pi}^2 \left[\frac{\operatorname{Re} \omega}{k} f_i \left(\frac{\operatorname{Re} \omega}{k} \pm \frac{\omega_{ci}}{k} \right) + \sum_i \frac{n_{si}}{n_0} \left(\frac{\operatorname{Re} \omega}{k} - V_i \right) f_i \left(\frac{\operatorname{Re} \omega}{k} - V_i \pm \frac{\omega_{ci}}{k} \right) \right], \end{aligned} \quad (5b)$$

式中 $P \int$ 表示积分取柯西主值.

当川流不存在 ($n_{si} = 0$), 由 (5b) 式得出 $\operatorname{Im} Y = 0$ 的根为 $\operatorname{Re} \omega = 0$, 此时有 $\operatorname{Re} Y = 0$. 从而由 (3) 式得出, 当 ω 沿实轴从 $-\infty$ 变向 ∞ 时, 在 M 平面上, M 与实轴的交点为 $M = k^2 c^2 > 0$. 这样, M 的尼奎斯特图如图 2 所示. 此时由 (4) 式得出 $N = 1 + (-1) = 0$, 所以体系是稳定的. 当川流不存在, 但当沿外磁场方向的动力温度 $T_{\parallel}$ 与垂直外磁场方向的动力温度 $T_{\perp}$ 不等时, 这里采用与文献 [6] 不同的尼奎斯特分析方法. 仅需分析

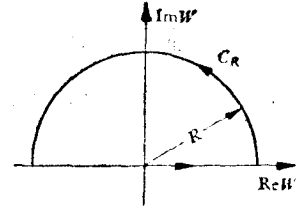


图 1

反常波,因为正常波的情况类似. 为与文献[6]比较,仅考虑电子等离子体. 色散关系可化成

$$M = k^2 c^2 - \omega^2 - \omega_{pe}^2 \left[-1 + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} v_z + \frac{\omega_{ce}}{k} \right) \frac{f_e(v_z) dv_z}{v_z - \left(\frac{\omega}{k} - \frac{\omega_{ce}}{k} \right)} \right]. \quad (6)$$

当 ω 沿实轴时,由解析延拓得

$$\operatorname{Re} M = k^2 c^2 - (\operatorname{Re} \omega)^2 - \omega_{pe}^2 \left[-1 + P \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} v_z + \frac{\omega_{ce}}{k} \right) \frac{f_e(v_z) dv_z}{v_z - \left(\frac{\operatorname{Re} \omega}{k} - \frac{\omega_{ce}}{k} \right)} \right], \quad (7a)$$

$$\operatorname{Im} M = -\pi \omega_{pe}^2 \left[\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} \frac{\operatorname{Re} \omega - \omega_{ce}}{k} + \frac{\omega_{ce}}{k} \right] f_e \left(\frac{\operatorname{Re} \omega - \omega_{ce}}{k} \right). \quad (7b)$$

$\operatorname{Im} M = 0$ 的根为

$$\operatorname{Re} \omega = -\omega_{ce} \left(\frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}} - 1 \right). \quad (8)$$

将(8)式代入(7a)式得出 M 与实轴相交处的 $\operatorname{Re} M$, 再由 $\operatorname{Re} M < 0$ 得出当

$$\operatorname{Re} M = k^2 c^2 - \omega_{ce}^2 \left(\frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}} - 1 \right)^2 - \omega_{pe}^2 \left(\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} - 1 \right) < 0 \quad (9)$$

时,尼奎斯特图如图3所示. 此时,由(4)式得 $N = 1 + 0 = 1$, 即有不稳定性存在. 判据(9)式首先由文献[6, 7]用不同方法得出. 这里采用的方法比较简便.

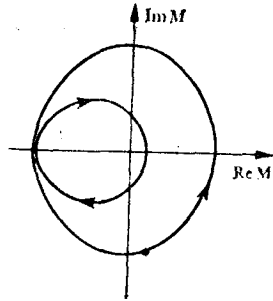


图 2

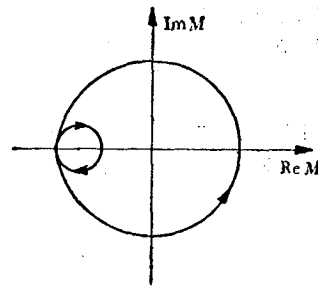


图 3

现在回到温度均匀体系中的川流不稳定性问题. 实验中常见的主要是仅有一支川流的情况, 即(1)式中仅取 $j = 1$. 当 M 与实轴的交点可写出像(9)式一类的解析公式时, 上述基于辐角原理的尼奎斯特图分析方法较易给出完整的不稳定性判据. 对于需要借助数值计算的情况, 这种方法就不够方便. 为此, 改用文献[8]曾经使用过的尼奎斯特图方法. 这种方法需要把色散关系写成形式(1). 利用等离子体色散函数^[9]

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2} dt}{t - x} + i\pi e^{-x^2} \right],$$

令其实部为

$$Z(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2} dt}{t - x} \quad (10)$$

和引入无量纲量:

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{m_e}{m_i}, & x &= \frac{\text{Re } \omega}{k} \left(\frac{m_e}{2kT} \right)^{1/2}, \\ \alpha &= V \left(\frac{m_e}{2kT} \right)^{1/2}, & \beta &= \frac{\omega_{ce}}{k} \left(\frac{m_e}{2kT} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (11)$$

当 ω 沿实轴时, 对于反常波, (1) 式中的函数 W 成为

$$\begin{aligned} \text{Re } W(\xi + i0 | \beta, \alpha) &= \frac{\omega_{pe}^2}{c^2 - \xi^2} \left\{ x Z(x - \beta) + \frac{n_s}{n_0} (x - \alpha) Z(x - \alpha - \beta) \right. \\ &\quad \left. + e^{1/2} x Z(e^{-1/2} x + e^{1/2} \beta) + \frac{n_s}{n_0} e^{1/2} (x - \alpha) Z(e^{-1/2} x - e^{-1/2} \alpha + e^{1/2} \beta) \right\} \end{aligned} \quad (12a)$$

与

$$\begin{aligned} \text{Im } W(\xi + i0 | \beta, \alpha) &= \frac{\sqrt{\pi} \omega_{pe}^2}{c^2 - \xi^2} \left\{ x e^{-(x-\beta)^2} + \frac{n_s}{n_0} (x - \alpha) e^{-(x-\alpha-\beta)^2} \right. \\ &\quad \left. + e^{1/2} x e^{-(x+e\beta)^2/e} + \frac{n_s}{n_0} e^{1/2} (x - \alpha) e^{-(x+e\beta-\alpha)^2/e} \right\}, \end{aligned} \quad (12b)$$

式中 $\xi = \text{Re } \omega/k$. 令 $\rho = \omega/k$, 对于每个给定的 α, β 值 (12a, b 式), 将 ρ 平面上的实轴 R 映照成 W 平面上的曲线 $W(R)$; $W(R)$ 左方的区域即为 ρ 的上半平面通过 $W(\rho)$ 所映照成的区域. 若此区域包含正实轴, 则 (1) 式有解, 即有不稳定的反常波存在. 曲线 $W(R)$ 和实轴的交点所对应的 ξ_{i_0} 由方程 $\text{Im } W = 0$ 确定, 做与文献 [8] 类似的讨论, 得出 $W(R)$ 中 ξ 为 $(-\infty \rightarrow -c)$ 与 $(c \rightarrow \infty)$ 两段的形状如文献 [8] 的图 6(c) 所示的一样. 因而位于这两段曲线左方的区域不可能包含正实轴. 仅需考察 ξ 自 $-c \rightarrow c$ 时, 连续曲线 $W(R)$ 的左方区域是否包含正实轴. 由 (12b) 式具体算出 $\text{Im } W = 0$ 具有一个或三个实数根 ξ_{i_0} , 且 $|\xi_{i_0}| < c$. 曲线 $W(R)$ ($\xi = -c \rightarrow c$) 的实际图形并不重要, 重要的是它与实轴相交的情况. 由 ξ_{i_0} 和 (12a) 式所算得的 $\text{Re } W(\xi_{i_0} + i0 | \beta, \alpha)$ 值, 便能确定

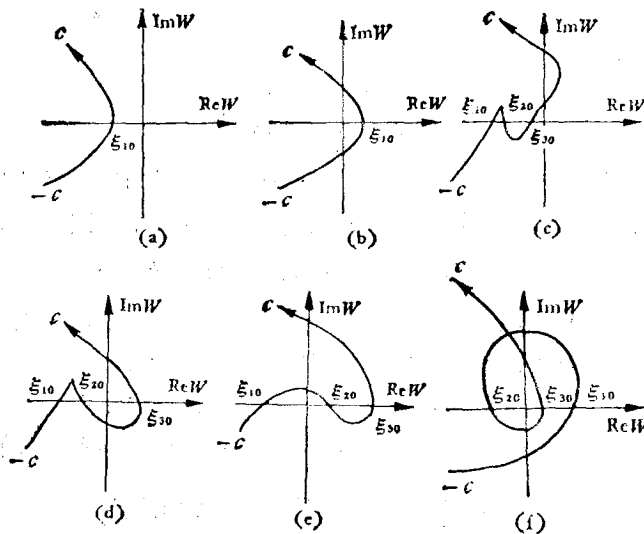


图 4 $W(R)(\xi: -c \rightarrow c)$ 与实轴相交的典型示例, 在曲线旁表示的是 ξ 的数值

$W(R)$ 属于图 4 所列举的哪一类典型图形. 根据图形所含正实轴的情况, 便能确定不稳定区域. 图 4(a)(c) 所对应的情况没有不稳定性, 而其余诸图所对应的不稳定区域分别为: 图 4(b)(d)(f), $0 < k^2 < \operatorname{Re} W(\xi_{l_0} + i0|\beta, \alpha)$, ($l = 1$ 或 3); 图 4(e), $\operatorname{Re} W(\xi_{20} + i0|\beta, \alpha) < k^2 < \operatorname{Re} W(\xi_{30} + i0|\beta, \alpha)$. 引入函数

$$A(x|\beta, \alpha) = xZ(x - \beta) + \frac{n_s}{n_0}(x - \alpha)Z(x - \alpha - \beta) + \epsilon^{1/2}xZ(\epsilon^{-1/2}x + \epsilon^{1/2}\beta) + \frac{n_s}{n_0}\epsilon^{1/2}(x - \alpha)Z(\epsilon^{-1/2}x - \epsilon^{-1/2}\alpha + \epsilon^{1/2}\beta), \quad (13)$$

则 (12a) 式可写成

$$\operatorname{Re} W(\xi + i0|\beta, \alpha) = \frac{\omega_{pe}^2}{c^2 - \xi^2} A(x|\beta, \alpha). \quad (14)$$

综合上述分析, 不稳定区域的计算程序可归结为: 1) 选定 n_s/n_0 的比值. 2) 选定 α , β 的值为 α_0, β_0 . 由 $\operatorname{Im} W = 0$ 解得 x_{l_0} 与 ξ_{l_0} , 并将它们代入 (13) 与 (14) 式, 算出相应的 $A(x_{l_0}|\beta_0, \alpha_0)$ 与 $\operatorname{Re} W(\xi_{l_0} + i0|\beta_0, \alpha_0)$. 由此确定曲线 $W(R)$ 与实轴相交的类型(参看图 4). 对于不稳定情况, 令 $\epsilon^{1/2}\beta_0 = \mathcal{D}_0$ 与 $V_A = B/(4\pi n_0 m_i)^{1/2}$ (Alfvén 速度), 并利用 $c^2 - \xi_{l_0}^2 \approx c^2$, 不稳定区域可表示为[参看 (16) 式]

$$0 < V_A(m_e/2kT)^{1/2} < \mathcal{D}_0[A(x_{l_0}|\beta_0, \alpha_0)]^{1/2} \quad (l = 1 \text{ 或 } 3),$$

或

$$\mathcal{D}_0[A(x_{20}|\beta_0, \alpha_0)]^{1/2} < V_A(m_e/2kT)^{1/2} < \mathcal{D}_0[A(x_{30}|\beta_0, \alpha_0)]^{1/2}. \quad (15)$$

3) 对于选定的 β_0 , 改变 α_0 , 按程序 2) 算出 $0 \leq \alpha_0 < c\sqrt{\frac{m_e}{2kT}}$ 的各种情况(参看图 5).

由

$$\beta = \frac{\omega_{ce}}{k} \left(\frac{m_e}{2kT} \right)^{1/2} \text{ 与 } \epsilon^{1/2}\beta = \mathcal{D}$$

得出, B 与 k 符合下列关系:

$$k = \frac{1}{\sqrt{2m_i kT}} \frac{e}{c\mathcal{D}} B. \quad (16)$$

4) 改变 β_0 的值, 按程序 2) 与 3) 算出 $\beta = 0 \rightarrow \infty$ 时的各个 $V_A(m_e/2kT)^{1/2}-\alpha$ 平面中的不稳定区域. 5) 由程序 4) 的各个不稳定区域图, 选定 n_0 , 即可求得 (1) 当 α 一定(即 $V/\sqrt{T}$ 一定)时, $B/\sqrt{T}-k$ 平面中的不稳定区域. (2) 当 k 一定时, $B/\sqrt{T}-V/\sqrt{T}$ 平面中的不稳定区域. (3) 当 $B/\sqrt{T}$ 一定时, $V/\sqrt{T}-k$ 平面中的不稳定区域. 6) 改变 n_0 的值, 重复程序 5). 7) 改变比值 n_s/n_0 , 按程序 1) 至 6) 计算.

这里具体讨论了川流速度 $\mathbf{V}$ 与磁场 $\mathbf{B}$ 方向一致时的反常波不稳定性. 当 $\mathbf{V}$ 与 $\mathbf{B}$ 方向相反 ($\alpha < 0$), 以及正常波 (β 改成 $-\beta$) 的情况均可类似地按此程序计算.

二、氢等离子体的不稳定区域

本节具体算出氢等离子体的不稳定区域, 作为示例, 写出 $n_s = n_0 = n$ 情况的定量结

果. 首先证明, 在此情况, 对于反常波与正常波, $\mathbf{V}$ 与 $\mathbf{B}$ 平行或反平行的四种情况, 关于变量 n_0 , B , k , V 与 T 的不稳定区域是类同的.

1. 反常波

1) $\mathbf{V}$ 与 $\mathbf{B}$ 平行 当 $n_0 = n_s$ 时, 方程 $\text{Im } W = 0$ 成为

$$\eta(x_1) + \eta(x_1 - \alpha) = 0, \quad (17a)$$

式中

$$\eta(x_1) = x_1 \left\{ e^{-(x_1 - \beta)^2} + \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon'}} e^{-(\epsilon^{-1/2} x_1 + \epsilon^{1/2} \beta)^2} \right\}.$$

而

$$\begin{aligned} A_1(x_1 | \beta, \alpha) &= x_1 Z(x_1 - \beta) + (x_1 - \alpha) Z(x_1 - \alpha - \beta) \\ &+ \epsilon^{1/2} x_1 Z(\epsilon^{-1/2} x_1 + \epsilon^{1/2} \beta) + \epsilon^{1/2} (x_1 - \alpha) Z[\epsilon^{-1/2} (x_1 - \alpha) + \epsilon^{1/2} \beta]. \end{aligned} \quad (17b)$$

2) $\mathbf{V}$ 与 $\mathbf{B}$ 反平行 此时相应地有

$$\eta(x_2) + \eta(x_2 + \alpha) = 0, \quad (18a)$$

式中

$$\eta(x_2) = x_2 \left\{ e^{-(x_2 - \beta)^2} + \epsilon^{1/2} e^{-(\epsilon^{-1/2} x_2 + \epsilon^{1/2} \beta)^2} \right\}.$$

而

$$\begin{aligned} A_2(x_2 | \beta, -\alpha) &= x_2 Z(x_2 - \beta) + (x_2 + \alpha) Z(x_2 + \alpha - \beta) \\ &+ \epsilon^{1/2} x_2 Z(\epsilon^{-1/2} x_2 + \epsilon^{1/2} \beta) + \epsilon^{1/2} (x_2 + \alpha) Z[\epsilon^{-1/2} (x_2 + \alpha) + \epsilon^{1/2} \beta]. \end{aligned} \quad (18b)$$

2. 正常波

1) $\mathbf{V}$ 与 $\mathbf{B}$ 平行 此时有

$$\eta(x_3) + \eta(x_3 - \alpha) = 0. \quad (19a)$$

式中

$$\eta(x_3) = x_3 \left\{ e^{-(x_3 + \beta)^2} + \epsilon^{1/2} e^{-(\epsilon^{-1/2} x_3 - \epsilon^{1/2} \beta)^2} \right\}.$$

而

$$\begin{aligned} A_3(x_3 | -\beta, \alpha) &= x_3 Z(x_3 + \beta) + (x_3 - \alpha) Z(x_3 - \alpha + \beta) \\ &+ \epsilon^{1/2} x_3 Z(\epsilon^{-1/2} x_3 - \epsilon^{1/2} \beta) + \epsilon^{1/2} (x_3 - \alpha) Z[\epsilon^{-1/2} (x_3 - \alpha) - \epsilon^{1/2} \beta]. \end{aligned} \quad (19b)$$

2) $\mathbf{V}$ 与 $\mathbf{B}$ 反平行 此时有

$$\eta(x_4) + \eta(x_4 + \alpha) = 0, \quad (20a)$$

式中

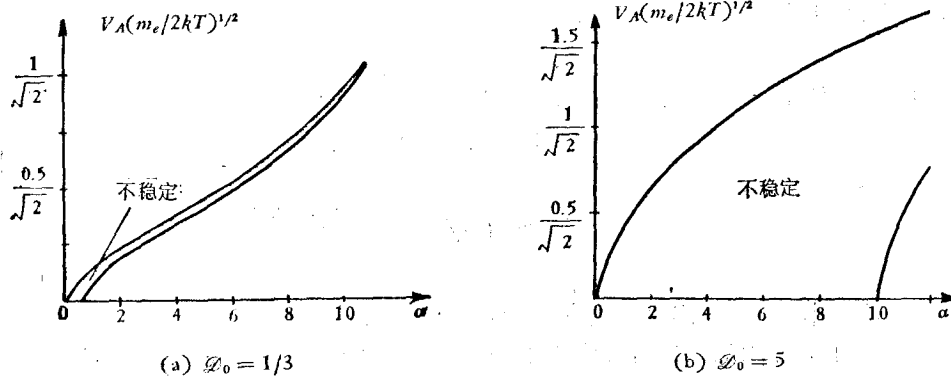
$$\eta(x_4) = x_4 \left\{ e^{-(x_4 + \beta)^2} + \epsilon^{1/2} e^{-(\epsilon^{-1/2} x_4 - \epsilon^{1/2} \beta)^2} \right\}.$$

而

$$\begin{aligned} A_4(x_4 | -\beta, -\alpha) &= x_4 Z(x_4 + \beta) + (x_4 + \alpha) Z(x_4 + \alpha + \beta) \\ &+ \epsilon^{1/2} x_4 Z(\epsilon^{-1/2} x_4 - \epsilon^{1/2} \beta) + \epsilon^{1/2} (x_4 + \alpha) Z[\epsilon^{-1/2} (x_4 + \alpha) - \epsilon^{1/2} \beta]. \end{aligned} \quad (20b)$$

若分别令 $x_2 + \alpha = x_1$, $\alpha - x_3 = x_1$ 与 $x_4 = -x_1$, 则 (18a, b) — (20a, b) 式均可化成 (17a, b) 式. 这表明四种情况的不稳定区域类同.

依上节程序 2, 3 的数值计算结果如图 5 所示. 由图 5 可见, 当 $\mathcal{D}_0$ 较大, 不稳定区域的展布范围较宽, 而当 $\mathcal{D}_0$ 较小时, 不稳定区域变小. 当 $\mathcal{D}_0 < 0.05$ 时没有不稳定区域. 这是因为当磁场 B 足够弱时, 回旋波退化为电磁波. 第四节中导出由川流激发电磁

图5 $V_A \left(\frac{m_e}{2kT} \right)^{1/2} - \alpha$ 平面上的不稳定区域

波不稳定性的必要条件,指出温度均匀的川流与静止等离子体体系中,不论 n_s/n_0 , V 及其它宏观参量取什么数值均不能激发沿川流方向传播的电磁不稳定性。这里所得结果与此必要条件符合。

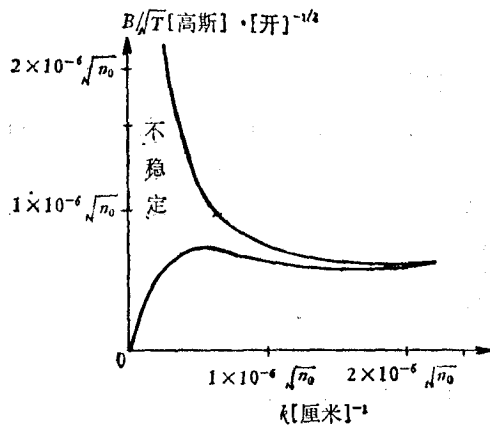
由 Alfvén 速度的定义得 $B/\sqrt{T} = \sqrt{8\pi k/e} V_A (m_e/2kT)^{1/2} \sqrt{n_0}$ 与由 (16) 式得

$$k = \frac{c}{D_0} \frac{1}{\sqrt{2m_i k}} \left(\frac{B}{\sqrt{T n_0}} \right) \sqrt{n_0}$$

当 α 的值一定时,在 $B/\sqrt{T} - k$ 平面上的不稳定区域如图 6 所示。[本文采用高斯单位制, B 的单位为高斯, T 的单位为开, k 的单位为 (厘米) $^{-1}$ 与 n_0 的单位为 (厘米) $^{-3}$] 图 6 表明,不稳定区域主要在长波区域。由于与德拜波长 λ_D 相应的波数为

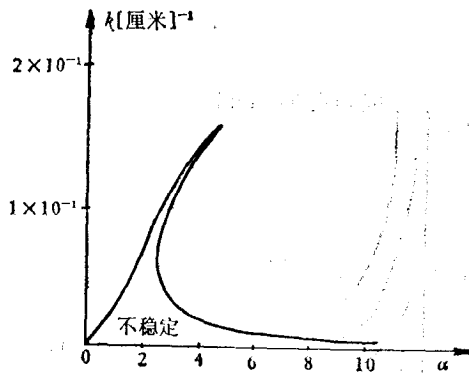
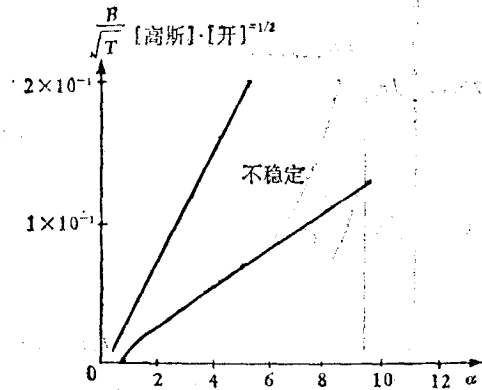
$$k_D = 9.1 \times 10^{-1} \sqrt{\frac{n_0}{T}} \quad (21)$$

例如当 $T = 10^6$ 开时, $k_D = 9.1 \times 10^{-4} \sqrt{n_0}$, 所以不稳定区域主要分布在 $k < k_D$ 的范围, 这是应有的结果。由图 6 还可得到下列相似关系: (1) 当温度 T 一定时, 不稳定区域与 $\sqrt{n_0}$ 成正比。 (2) 当密度 n_0 一定时, 不稳定区域决定于 $B/\sqrt{T}$ 与 $V/\sqrt{T}$, 即若温度增加 10^2 , 对于同一不稳定区域图, B 与 V 的值应该相应地增加 10^1 。

图6 $\alpha = 5$

当 $B/\sqrt{T}$ 的数值一定时, $k - \alpha$ 平面上的不稳定区域如图 7 所示。当 k 的数值一定, $B/\sqrt{T} - \alpha$ 平面上的不稳定区域如图 8 所示。这两个图所包含的相似关系很容易看出。

最后指出,当川流与静止等离子体的温度不等,或电子与离子温度不等时,分析过程与计算程序完全类似。

图7 $\frac{B}{\sqrt{T}} = 4 \times 10^{-1} \left[\frac{\text{高斯}}{\sqrt{\text{开}}} \right], n_0 = 10^{10} [\text{厘米}^{-3}]$ 图8 $k = 3 \times 10^{-2} [\text{厘米}^{-1}], n_0 = 10^{10} [\text{厘米}^{-3}]$

三、有两支川流时的回旋波不稳定性

虽然在实验上还较少有两支川流同时穿越静止等离子体,但为了了解多个川流^[10]对稳定区域的影响,本节从理论上计算这个问题。程序与第一节所给出的类似。

令 $\alpha_j = V_j(m_e/2kT)^{1/2}$, ($j = 1, 2$)。数值计算表明,当取定 β , α_1 与 α_2 的值时,方程 $\text{Im } W(\xi + i0 | \beta, \alpha_1, \alpha_2) = 0$ 一般有三个或五个根: 可算出关于八个变量 $n_0, n_{s1}, n_{s2}, B, k, V_1, V_2$ 与 T 的不稳定区域。作为示例,这里给出 $n_0 = n_{s1} = n_{s2}$ 情况的氢等离子体的反常波的结果。

图9表示当 β 与 α_1 值取定时,在 $V_A(m_e/2kT)^{1/2} - \alpha_2$ 平面上的不稳定区域。由图9看出不稳定区域的特征为: 当 α_1 取定为5时,在 $e^{1/2}\beta$ 取不同值时,不稳定区域为以 $\alpha_2 = 5$ 为中心而“辐射”出的三支或四支。另一方面,当 β 减小时,不稳定区域的范围缩小。数值计算表明,当 β 与零接近时,没有不稳定性。这与第四节导出的必要条件符合。

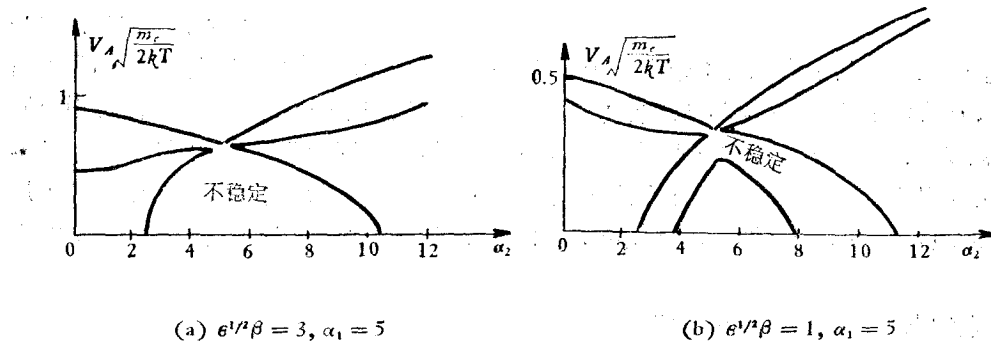


图 9

当 α_1 与 α_2 取确定值,在 $B/\sqrt{T} - k$ 平面上的不稳定区域如图10所示。当 $\alpha_1 = \alpha_2$ 时,即归结为前述单支川流的情况,而在两个川流速度不等时,不稳定区域呈现出新的型式,当 α_1 与 α_2 差别不大时,出现具有“共振”形的两支不稳定区域或连通的一支不稳定区域。

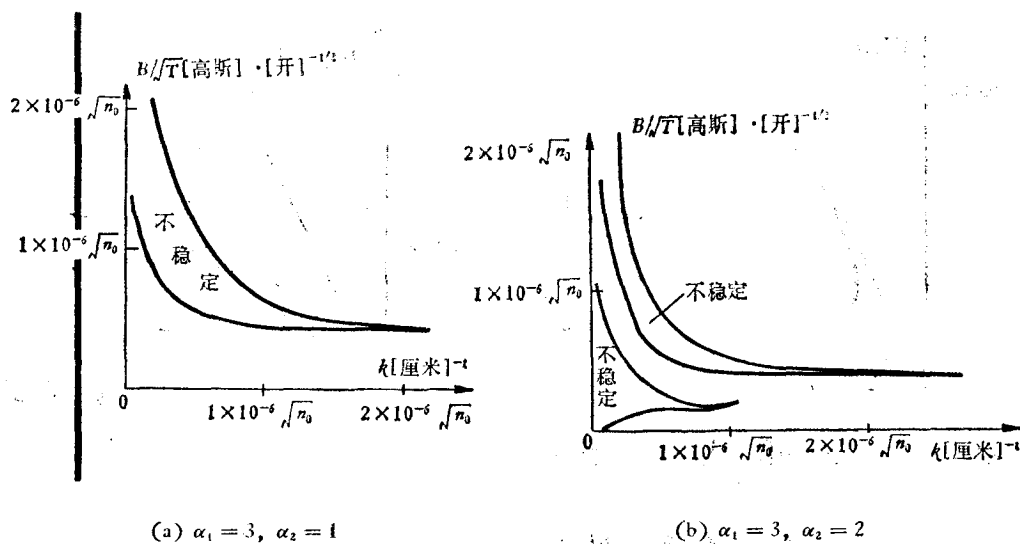


图 10

与前节类似,可画出其它变量平面上的不稳定区域,借以看出各物理量间所具有的相似关系.

四、川流激发电磁不稳定性的一个必要条件

当振荡频率充分高,或当外磁场充分弱时,回旋波归结成电磁波.试考虑由多种带电粒子川流(电子、离子或等离子体川流)所组成的体系,而且各川流的动力温度可以各向异性,它们的定态速度分布为

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_i(\mathbf{v}) &= n_i F_i(v_z, v_\perp) = n_i f_{iz}(v_z - V_i) f_{i\perp}(v_\perp) \\ &= n_i \left(\frac{m_i}{2\pi k T_{i\parallel}} \right)^{1/2} \left(\frac{m_i}{2\pi k T_{i\perp}} \right) \exp \left[-\frac{m_i}{2k T_{i\parallel}} (v_z - V_i)^2 - \frac{m_i}{2k T_{i\perp}} v_\perp^2 \right] \end{aligned}$$

($j = 1, 2, \dots, N$), (22)

式中 $v_\perp^2 = v_x^2 + v_y^2$, i 表示各类带电粒子川流, n_i 与 m_i 各为粒子的密度与质量, V_i 为川流速度, $\mathbf{v}$ 为粒子速度, $T_{i\parallel}$ 与 $T_{i\perp}$ 各为平行与垂直于波传播(z)方向的温度. 各川流的 V_i , $T_{i\parallel}$, $T_{i\perp}$, n_i 与 m_i 可以各不相等. 对于这一般情况,现在证明:“当所有 $T_{i\perp} \leq T_{i\parallel}$ 时,不论各川流的其余宏观量取什么值(限于非相对论情况),沿波传播方向的带电粒子川流不可能激发电磁不稳定性. 而激发电磁波的必要条件为至少具有一支 $T_{i\perp} > T_{i\parallel}$ 的川流”.

体系的电磁波色散关系可写成

$$k^2 = W(\rho) = - \sum_{j=1}^N \frac{\omega_{pj}^2}{c^2 - \rho^2} \left\{ 1 + \frac{k T_{j\perp}}{m_j} \int \frac{df_{jz}(v_z - V_j)/dv_z}{v_z - \rho} dv_z \right\} \quad (\text{Im } \rho > 0), \quad (23)$$

式中 $\rho = \omega/k$, ω 为复频率, k 为实数. 当 $\rho = \xi/k + i\eta/k$ 趋向实轴时,由(23)式解析延拓得

$$\operatorname{Re} W = \sum_{j=1}^N \operatorname{Re} W_j \left(\frac{\xi}{k} + i0 \right) = \sum_{j=1}^N \frac{-\omega_{pj}^2}{c^2 - \left(\frac{\xi}{k} \right)^2} \left\{ 1 + \frac{k T_{j\perp}}{m_j} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df_{jz}(v_z - V_j)}{v_z - \xi/k} dv_z \right\}, \quad (24)$$

$$\operatorname{Im} W = \sum_{j=1}^N \operatorname{Im} W_j \left(\frac{\xi}{k} + i0 \right) = \sum_{j=1}^N \frac{-\omega_{pj}^2}{c^2 - \left(\frac{\xi}{k} \right)^2} \frac{k T_{j\perp}}{m_j} \pi \frac{d}{dv_z} f_{jz}(v_z - V_j) \Big|_{v_z = \xi/k}. \quad (25)$$

函数

$$F \left(\frac{\xi}{k} \right) = -P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df_{jz}(v_z - V_j)}{v_z - \xi/k} dv_z - \pi i \frac{d}{dv_z} f_{jz}(v_z - V_j) \Big|_{v_z = \xi/k} \quad (26)$$

的尼奎斯特图如图 11 所示。当 $|\xi/k| < c$ 和 $T_{j\perp} \leq T_{j\parallel}$ 时, 由图 11 可见

$$\begin{aligned} -P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df_{jz}(v_z - V_j)}{v_z - \xi/k} dv_z &\leq -P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df_{jz}(v_z - V_j)}{v_z - V_j} dv_z \\ &= \frac{m_j}{k T_{j\parallel}}, \end{aligned} \quad (27)$$

因而

$$\operatorname{Re} W_j \left(\frac{\xi}{k} + i0 \right) \leq \frac{\omega_{pj}^2}{c^2 - \xi^2/k^2} \left(-1 + \frac{T_{j\perp}}{T_{j\parallel}} \right) \leq 0. \quad (28)$$

$W_j(\xi/k + i0)$ 的尼奎斯特图如图 12 所示。当 $-\infty < \xi/k < -c$ 时, 所有 $\operatorname{Im} W_j > 0$; 而当 $c < \xi/k < \infty$ 时, 所有 $\operatorname{Im} W_j < 0$ 。因而 $\operatorname{Im} W_j(\xi/k + i0) = 0$, 没有 $|\xi/k| > c$ 的根, $|\xi/k| < c$ 的根显然存在, 但当所有 $T_{j\perp} \leq T_{j\parallel}$ 时, $\operatorname{Re} W_j(\xi/k + i0) \leq 0$, 所以没有不稳定性存在。仅当至少有一支川流的 $T_{j\perp} > T_{j\parallel}$ 时, 在一定条件下, 才可能有 $\operatorname{Re} W((\xi/k)_0 + i0) > 0$, 这里 $(\xi/k)_0$ 是 $\operatorname{Im} W(\xi/k + i0) = 0$ 的根。这就证明了必要条件。

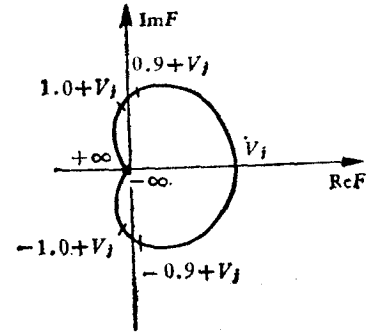


图 11 函数 (26) 式的尼奎斯特图, 在曲线旁所表示的是 ξ/k 的数值

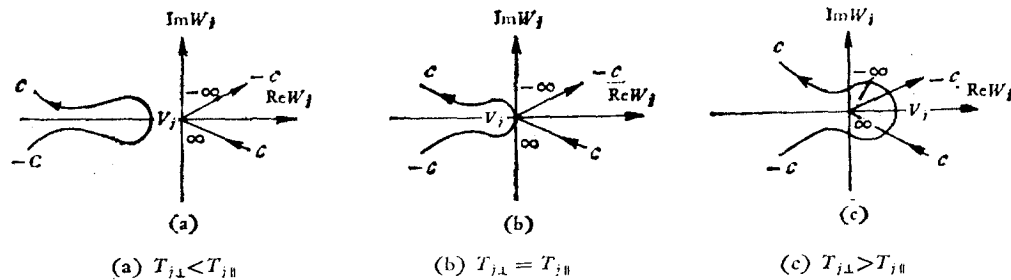


图 12 $W_j(\xi/k + i0)$ 的尼奎斯特图, 曲线旁表示的是 ξ/k 的数值

五、静电不稳定性

本节考虑沿磁场方向的多等离子体川流的电中性体系。沿磁场方向传播的静电波色散关系为

$$k^2 = W(\rho) = \frac{-\omega_{pe}^2 m_e}{kT} \left\{ \rho \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_e(v_z)}{v_z - \rho} dv_z + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_i(v_z)}{v_z - \rho} dv_z + 2 \right] \right. \\ \left. + \sum_j \frac{n_{sj}}{n_0} (\rho - V_j) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_e(v_z - V_j)}{v_z - \rho} dv_z + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_i(v_z - V_j)}{v_z - \rho} dv_z + 2 \right] \right\} \\ (\text{Im } \rho > 0). \quad (29)$$

当 ρ 趋向实轴, 由解析延拓, 函数 W 可化成

$$\text{Re } W(x + i0 | \alpha_1, \alpha_2) = \frac{-\omega_{pe}^2 m_e}{kT} \left\{ xZ(x) + e^{-1/2} xZ(e^{-1/2}x) + 2 \right. \\ \left. + \sum_j \frac{n_{sj}}{n_0} [(x - \alpha_j)Z(x - \alpha_j) + (x - \alpha_j)e^{-1/2}Z[e^{-1/2}(x - \alpha_j)] + 2] \right\} \quad (30a)$$

与

$$\text{Im } W(x + i0 | \alpha_1, \alpha_2) = \frac{-\omega_{pe}^2 m_e \sqrt{\pi}}{kT} \left\{ x e^{-x^2} + e^{-1/2} x e^{-(e^{-1/2}x)^2} \right. \\ \left. + \sum_j \frac{n_{sj}}{n_0} (x - \alpha_j) [e^{-(x - \alpha_j)^2} + e^{-1/2} e^{-(e^{-1/2}(x - \alpha_j))^2}] \right\}. \quad (30b)$$

在(29)式中的各积分项是柯西型积分, 而被积函数分子中的分布函数 $f_{e,i}$ 是连续函数, 因此定义在 $\text{Im } \rho > 0$ 半平面上的 $W(\rho)$ 是解析函数。当 ρ 沿实轴由 $-\infty$ 变向 ∞ 时, 在 W 平面上映照成一条从原点出发而最后回到原点的封闭曲线 $W(R)$ 。 $W(\rho)$ 将 ρ 的上半平面映照成封闭曲线 $W(R)$ 内部的区域。对于有两支川流穿越静止等离子体的情况, 计算静电不稳定区域的程序如下: 1) 选定 n_{s1}/n_0 与 n_{s2}/n_0 的值。2) 选定 α_1 与 α_2 的值, 由方程 $\text{Im } W = 0$ 解得 x_{l_0} , 将 x_{l_0} 代入(30a)式, 算出相应的 $\text{Re } W(x_{l_0} + i0 | \alpha_1, \alpha_2)$ 。由此确定 $W(R)$ 与实轴相交的类型。图 13 画出 $W(R)$ 的尼奎斯特图的典型示例。不稳定波数的范围为

$$0 < k^2 < \max \{ \text{Re } W(x_{l_0} + i0 | \alpha_1, \alpha_2) \}. \quad (31)$$

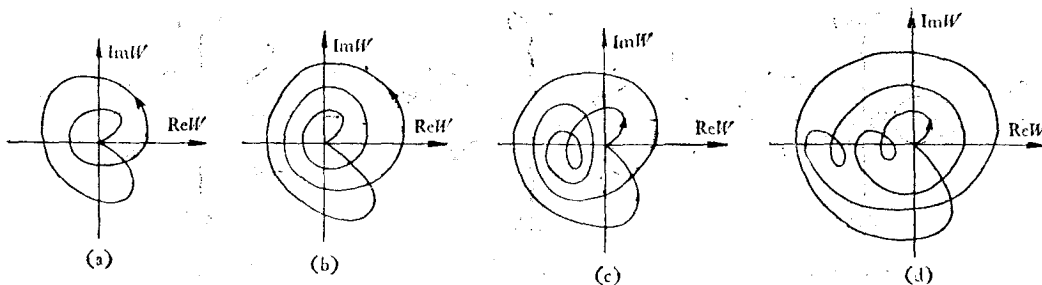


图 13 曲线 $W(R)$ 的尼奎斯特图的典型示例

3) 对于固定的 α_1 值, 改变 α_2 , 按程序 2) 算出 k - α_2 平面上的不稳定区域. 4) 改变 α_1 的值, 按程序 2), 3) 进行计算. 这样就算得关于七个变量 n_{s1} , n_{s2} , n_0 , V_1 , V_2 , k 与 T 的不稳定区域.

图 14 给出氢等离子体关于 $n_{s1} = n_{s2} = n_0$ 情况的数值计算结果. 从图 14(a) 的情况说明 $\alpha_1 = 1$ 的一支川流还未能激发静电波, 不稳定性主要依赖第二支川流, 因而不稳定区域与单支川流情况类似. 文献 [11] 考虑带电粒子川流情况的静电不稳定性, 得出的图形与图 14(a) 类似. 这表明等离子体川流与带电粒子川流激发的静电不稳定性区域在定性上类似.

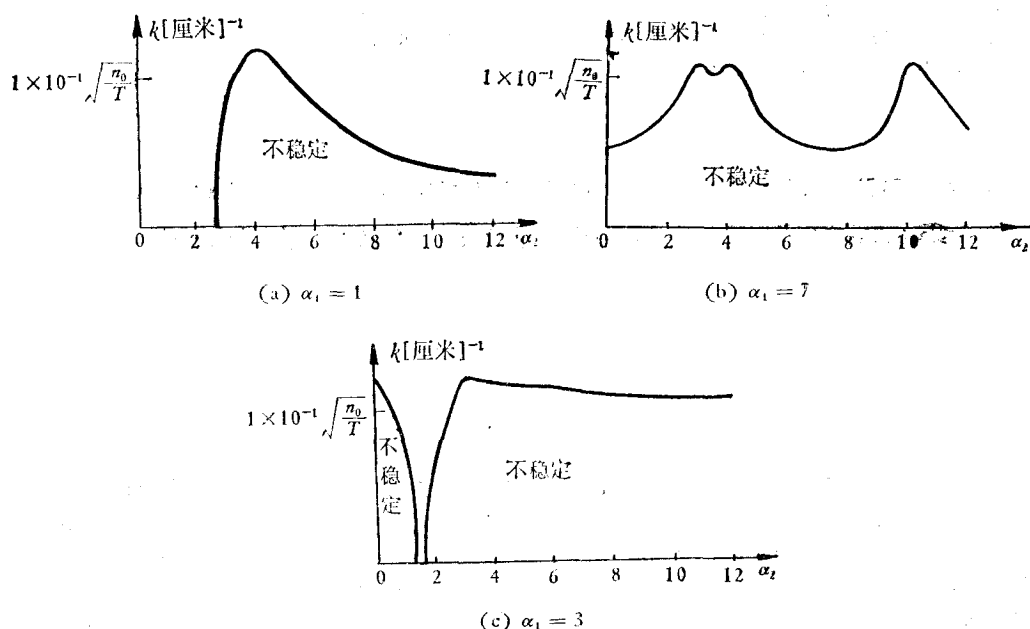


图 14 当 α_1 值取定时, k - α_2 平面上的不稳定区域

图 14(b), (c) 的特征可作如下解释: (1) 当 α_2 足够大, $k_{\max}$ 值几乎保持不变, 且数值与 $\alpha_2 = 0$ 时的 $k_{\max}$ 值接近. 这表明此时不稳定性主要由第一支川流 ($\alpha_1 = 7$ 或 3) 所引起, 第二支川流的作用已很小. (2) 图 14(c) 中在 $\alpha_2 = \alpha_1/2$ 附近没有不稳定区域. 这可从速度分布函数的特征来解释. 文献 [3] 指出, 仅当分布函数的峰值与极小值相比充分大时, 不稳定性才显著. 因而从图 15 可见, 当 $\alpha_2 = \alpha_1/2$ 时, 由于分布函数平坦, 峰值与极小值的差很小, 这相应于稳定情况. 由此还可解释图 14(b) 中 $k_{\max}$ 一般在 $\alpha_2 = \alpha_1/2$ 附近下降的原因. 此外, $k_{\max}$ 的数值 (图 14) 在 $10^{-1} \sqrt{\frac{n_0}{T}}$ 附近, 这表明不稳定性位于 $k < k_D$ 的区域, 这是应有的结果.

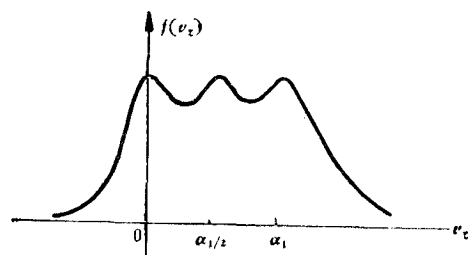


图 15 粒子速度分布函数

许丽敏、庄志英与单莉英参加本文的数值计算,徐正惠参加讨论与孙惠娟协助制图,谨此致谢。

参 考 文 献

- [1] M. Yamada, S. Seiler, H. W. Hendel, H. I. Kezi, *Phys. Fluids*, **20** (1977), 450.
- [2] F. W. Perkins, *Phys. Fluids*, **19** (1976), 1012.
- [3] O. Penrose, *Phys. Fluids*, **3** (1960), 258.
- [4] 陆全康、徐正惠、许丽敏、庄志英, 华东地区物理学会联合年会论文与工作报告摘要集(1964), 74.
- [5] N. A. Krall, A. W. Trivelpiece, *Principles of Plasma Physics*, McGraw-Hill (1973).
- [6] R. N. Sudan, *Phys. Fluids*, **6** (1963), 57.
- [7] P. D. Nordlinger, *Annals of Phys.* (N.Y.), **22** (1963), 12.
- [8] 陆全康, 物理学报, **20** (1964), 289; **26** (1977), 64.
- [9] B. D. Fried, S. D. Conte, *The Plasma Dispersion Function*, Academic (1961).
- [10] 陆全康、许丽敏, 华东地区物理学会联合年会论文与工作报告摘要集(1964), 76.
- [11] E. A. Jackson, *Phys. Fluids*, **3** (1960), 786.

ON THE NYQUIST CRITERIONS OF CYCLOTRON INSTABILITIES CAUSED BY PLASMA STREAMS

LU QUAN-KANG

(Fudan University)

ABSTRACT

In this paper, Nyquist diagrams of cyclotron instabilities caused by plasma streams are analysed. The calculation method on instability criterions of n_s (the electron density of plasma stream), n_0 (the electron density of static plasma), B (the applied magnetic field strength), k (the wave number), V (the stream velocity) and T (the temperature) are developed. The numerical results of hydrogen plasma are given. Finally, the cyclotron and electrostatic instabilities caused by two plasma streams are also analysed.