

电磁多极场的分析和计算*

西门纪业 陈文雄

(北京大学无线电电子学系)

提 要

多极系统是由几个对称地放置在方位角方向上、并具有一定电(磁)位的电(磁)极所组成的系统。它们所产生的非旋转对称场称为多极场。多极场是一种广泛类型的电磁场。例如包括了各种偏转场,四极、六极、八极透镜场等。它们在电子束器件、电子光学仪器和高能加速器中得到广泛应用。本文采用傅里叶展开法将求解空间(三维)的电磁多极场问题化为求解一系列的二维谐波电(磁)位的问题。这些谐波电(磁)位满足一定的二阶偏微分方程,在一定的边界条件下,可以采用逐次张弛方法进行求解。然后将谐波电(磁)位迭加,便得到所要求的多极场的电(磁)位分布。编制了计算电磁多极场的通用程序。对于几种典型的多极场模型(单个和二单元的四极透镜,以及圆柱环形偏转线圈等)进行了计算与检验。计算实践表明,这种傅里叶展开法适用于计算电子束器件和各种电子光学仪器中的多极场,并可算出其边缘效应(弥散场),因此具有一定的意义。

多极系统是由几个对称地放置在方位角方向上、并具有一定电(磁)位的电(磁)极所组成的系统。这种多极系统所产生的非旋转对称场称为多极场。

现代电子束器件和电子光学仪器中,除了旋转对称场外,还广泛地应用着各种电磁多极场。例如,电子束器件和电子显微镜中的静电偏转器或磁偏转器,四极、六极、八极透镜,消象散器以及高能加速器中的四极透镜组合等。科研和生产中提出了计算和分析多极场的课题,并日益受到了注意。

如果限于近似地研究多极系统,则在一定条件下可以忽略其边缘效应(即弥散场的影响),而作为纵向无穷长的多极场来处理。这种理想化的二维多极场,文献上已经作了讨论,可用解析法^[1,2]、实验法^[3]或数值算法^[4]求解。

但是,实际的多极系统则是纵向有限长的,其边缘效应往往不可忽略。因此,电磁多极场是一种空间(三维)的场分布。虽然可以直接用数值算法求解多极场的三维拉普拉斯方程^[5],但是所需的计算机内存量大、计算时间长。例如,采用逐次张弛法求解,设计算区域沿圆柱坐标 r, θ, z 方向分别划分为 30, 40, 50 格。即使这种不太密的划分,其总格点数就有 67,500 个。

近来,文献 [2, 6, 7] 中提出采用傅里叶展开法,将求解空间(三维)的多极场问题化为求解一系列二维谐波电(磁)位的问题。文献 [8] 报道了这种方法可用于彩色显象管精密静态环形偏转线圈的设计上。

* 1978 年 3 月 27 日收到。

应用傅里叶展开法来分析多极系统,需要探讨与研究一系列有关的问题.本文分析了多极场的对称性问题.通常多极场在方位角方向往往具有若干个对称面和反对称面,因此在傅里叶展开式中只有正弦项或余弦项.但是在有些情况下,多极场也可能没有对称面或反对称面.为了研究更广泛类型的多极场,我们采用了同时包含了正弦项与余弦项的普遍的傅里叶展开式.本文还探讨了如何合理地给出求解各个二维谐波电(磁)位的边界条件问题.根据以上原理,我们编制了计算电磁多极场的通用程序.对于几种典型的多极场模型(单个和二单元的四极透镜,以及圆柱环形偏转线圈等)进行了计算与检验.本文不但得到了与文献上采用其他方法所得的一致结果,而且还分析了上述多极场中的力线和等位线,并分析了傅里叶展开法的精确度.计算结果表明,这种傅里叶展开法,在保证所需的精度下,可以节省计算机内存量,并缩短计算时间.因而这是分析电子束器件和电子光学仪器中的多极场及其弥散场的一种有用的方法.

一、计算原理与计算公式

1. 多极场的傅里叶展开式及其偏微分方程

设采用圆柱坐标系 (r, θ, z) , 其中 z 轴是多极系统的轴线方向, r 是垂直于 z 轴的半径方向, θ 是方位角方向. 在忽略空间电荷的情况下, 多极场的电位(或磁标位) $V(r, \theta, z)$ 满足三维的拉普拉斯方程:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 0, \quad (1.1)$$

Glaser^[9] 已经证明, 电(磁)位 $V(r, \theta, z)$ 可用下述展开式表示:

$$V(r, \theta, z) = \sum_{m=0}^{\infty} [\phi^{(m)}(r, z) \cos m\theta + \psi^{(m)}(r, z) \sin m\theta] \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.2)$$

这里 m 是谐波次数. 对于 $m = 0$, 则 $\phi^{(0)}(r, z)$ 对应于旋转对称场的电(磁)位; 对于 $m \neq 0$, 则 $\phi^{(m)}(r, z) \cos m\theta$, $\psi^{(m)}(r, z) \sin m\theta$ 分别对应于 m 次谐波电(磁)位的余弦项和正弦项. $\phi^{(m)}(r, z)$, $\psi^{(m)}(r, z)$ 是 m 次谐波电(磁)位相应的函数系数, 今后简称它们为 m 次谐波电(磁)位. (1.2) 式就是多极场在圆柱坐标系中普遍的傅里叶展开式.

将 (1.2) 式代入 (1.1) 式, 不难看出 m 次谐波电(磁)位满足以下的二阶偏微分方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi^{(m)}}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi^{(m)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi^{(m)}}{\partial r^2} - \frac{m^2}{r^2} \phi^{(m)} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \psi^{(m)}}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi^{(m)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi^{(m)}}{\partial r^2} - \frac{m^2}{r^2} \psi^{(m)} &= 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

由此可见, 采用傅里叶展开法就可以将空间(三维)的电磁多极场问题化为求解一系列二维谐波电(磁)位问题.

假设 $\theta = 0$ 是电(磁)位的一个反对称面, 即

$$V(r, \theta, z) = -V(r, -\theta, z),$$

则 $\phi^{(m)}(r, z) \equiv 0$, 因而

$$V(r, \theta, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \phi^{(m)}(r, z) \sin m\theta. \quad (1.4)$$

同样, 假设 $\theta = 0$ 是电(磁)位的一个对称面, 即

$$V(r, \theta, z) = V(r, -\theta, z),$$

则 $\phi^{(m)}(r, z) \equiv 0$, 因而

$$V(r, \theta, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \phi^{(m)}(r, z) \cos m\theta. \quad (1.5)$$

在具体问题中, 视多极场边界条件的不同, 可以选择某一适当的展开式进行计算.

2. 同时具有 N 个对称面和 N 个反对称面的多极场

实际的多极系统通常是在 θ 方向上对称地放置 $2N$ 个电极, 并使其电位具有 N 个对称的和 N 个反对称的子午面. 显然, 这种多极系统的电位是以 $2\pi/N$ 为周期的函数, 即

$$V(r, \theta, z) = V\left(r, \theta \pm \frac{2\pi}{N}, z\right). \quad (1.6)$$

于是, $V(r, \theta, z)$ 的傅里叶展开式为

$$V(r, \theta, z) = \phi^{(0)}(r, z) + \sum_{m=0}^{\infty} \phi^{((2m+1)N)}(r, z) \cos[(2m+1)N\theta] \quad m = 0, 1, 2, \dots. \quad (1.7)$$

若令 $(2m+1)N = M$, 则

$$V(r, \theta, z) = \phi^{(0)}(r, z) + \sum_{M=N}^{\infty} \phi^{(M)}(r, z) \cos M\theta \quad M = N, 3N, 5N, \dots, \quad (1.8)$$

$\phi^{(0)}(r, z)$ 和 $\phi^{(M)}(r, z)$ 满足以下的二阶偏微分方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi^{(0)}}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi^{(0)}}{\partial r^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \phi^{(M)}}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi^{(M)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi^{(M)}}{\partial r^2} - \frac{M^2}{r^2} \phi^{(M)} &= 0, \quad M = N, 3N, 5N, \dots. \end{aligned} \quad (1.9)$$

例如, 二极偏转系统, $N = 1$, 有 1 个对称面和 1 个反对称面, 所以只存在 1, 3, 5 次等余弦谐波电位:

$$V(r, \theta, z) = \phi^{(1)}(r, z) \cos \theta + \phi^{(3)}(r, z) \cos 3\theta + \phi^{(5)}(r, z) \cos 5\theta + \dots. \quad (1.10)$$

又如, 四极透镜, $N = 2$, 有 2 个对称面和 2 个反对称面, 所以只存在 2, 6, 10 次等余弦谐波电位:

$$V(r, \theta, z) = \phi^{(2)}(r, z) \cos 2\theta + \phi^{(6)}(r, z) \cos 6\theta + \phi^{(10)}(r, z) \cos 10\theta + \dots. \quad (1.11)$$

其余六极透镜、八极透镜等依此类推.

3. 多极场的边界类型和边界条件

假讨论这样类型的多极场, 其电极(磁极)处在以 z 轴为对称轴的迴转面上, 且迴转面与子午面的交线方程为

$$r = R(z). \quad (1.12)$$

例如,若交线是水平线段、垂直线段、斜线段或双曲线段,则相应的迴转面是圆柱面、圆形(环形)端面、圆锥面或双曲迴转面.

为要求解多极场的拉普拉斯方程(1.1),必须给定 $r = R(z)$ 迴转面上的边界电位分布 $V(R(z), \theta, z)$, 即:

$$V(r, \theta, z)|_{r=R(z)} = V(R(z), \theta, z) \quad (1.13)$$

为已知函数. 再将(1.13)式对 θ 作傅里叶展开,则有

$$V(R(z), \theta, z) = \phi^{(0)}(r, z) + \sum_{m=1}^{\infty} [\phi^{(m)}(R(z), z) \cos m\theta + \psi^{(m)}(R(z), z) \sin m\theta] \quad (1.14)$$

$$m = 1, 2, 3, \dots,$$

其中傅里叶系数如下:

$$\phi^{(m)}(R(z), z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} V(R(z), \theta, z) \cos m\theta d\theta, \quad (1.15a, b)$$

$$\psi^{(m)}(R(z), z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} V(R(z), \theta, z) \sin m\theta d\theta.$$

由此得到的傅里叶系数正是各次谐波电位在 $r = R(z)$ 迴转面上的边界条件,即

$$\phi^{(m)}(r, z)|_{r=R(z)} = \phi^{(m)}(R(z), z) = (1.15a) \text{ 式}, \quad (1.16a, b)$$

$$\psi^{(m)}(r, z)|_{r=R(z)} = \psi^{(m)}(R(z), z) = (1.15b) \text{ 式}.$$

多极场的计算中,如何给定边界电位 $V(R(z), \theta, z)$ 是关键问题之一. 现举例说明如下: 设将 $r = R(z)$ 迴转面的电极面切成相等的 $2N$ 片,各片电极的间隙角为 2δ ; 再将这些电极片轮流加上 $+V_0, -V_0$ 的电位. 这样就形成一个具有 N 个对称面和 N 个反对称面的多极场,其纵向长度为 $2l$. 图1给出这种四极透镜($N=2$)的电极形状及其边界电位.

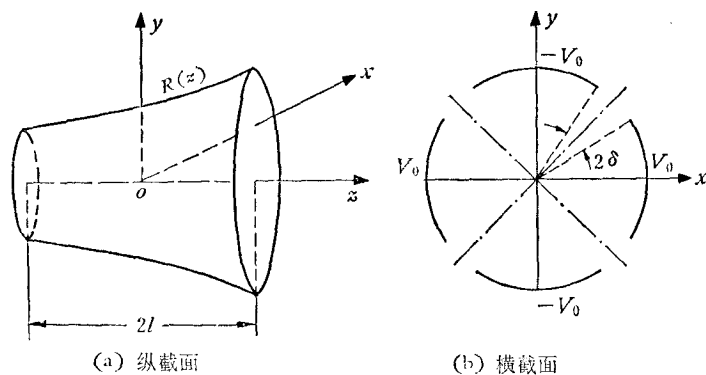


图1 四极透镜的电极形状及其边界电位

根据理论与实验研究^[10],通常在 $2\delta \leq 45^\circ$ 左右可以假设间隙角中边界电位是线性改变的. 于是 $V(R(z), \theta, z)$ 将是以 $2\pi/N$ 为周期的函数,其电位分布是“梯形”曲线,如图2所示. 将这种“梯形”边界电位分布作傅里叶展开,由(1.15a), (1.16a)式可得

$$\phi^{(2m+1)N}(r, z)|_{r=R(z)} = \phi^{(2m+1)N}(R(z), z) = \frac{4V_0}{\pi} \cdot \frac{(-1)^m}{2m+1} \cdot \frac{\sin[(2m+1)N\delta]}{(2m+1)N\delta} \quad (1.17)$$

$$-l \leq z \leq l, m = 0, 1, 2, \dots$$

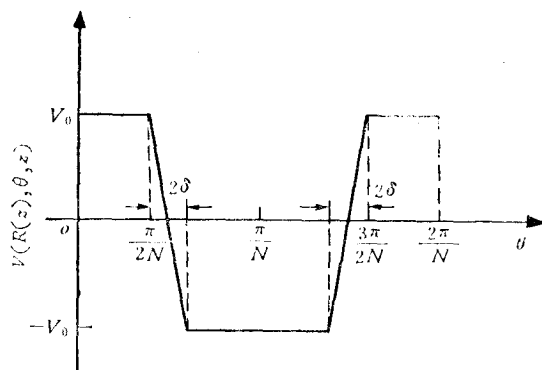


图2 “梯形”边界电位分布

当 $\delta \rightarrow 0$ 时, 则有

$$\begin{aligned} \phi^{(2m+1)N}(r, z)|_{r=R(z)} &= \phi^{(2m+1)N}(R(z), z) = \frac{4V_0}{\pi} \cdot \frac{(-1)^m}{2m+1} \\ &\quad -l \leq z \leq l, m = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.18)$$

以上两式给出了在 $r = R(z)$ 迴转面电极上谐波电位的边界值。

当 $r = R(z)$ 上边界电位分布比较复杂, 不能用近似的解析公式表示时, 则须通过实验测量或其他数值计算方法, 给出边界上各点的电位, 再作傅里叶分析, 就可以求出各次谐波电位的边界值。

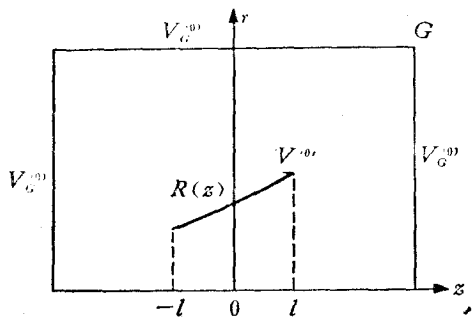
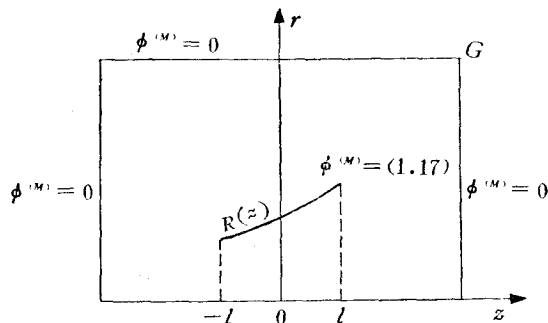
为了使边界封闭化, 可以在子午面即 (r, z) 平面上划出一个远离电极的“矩形”外边界 G , G 内的区域 (即两端封闭的圆柱体内) 就是计算区域。 G 的纵横长度一般可以选为电 (磁) 极纵横尺寸的 3—4 倍。

对于 $m = 0$ 的旋转对称电位分布 $\phi^{(0)}(r, z)$, 其边界条件如下 (见图 3):

$$\begin{aligned} \phi^{(0)}(r, z)|_{r=R(z)} &= V^{(0)} = \text{常数}, \\ \phi^{(0)}(r, z)|_G &= V_G^{(0)} = \text{常数}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

旋转对称电位常数 $V^{(0)}$, $V_G^{(0)}$ 根据具体问题而定。

对于 $M = (2m+1)N$ 的谐波电位 $\phi^{(M)}(r, z)$, 由傅里叶展开式 (1.8) 及其偏微分方程 (1.9) 可见, $\phi^{(M)}(r, z)$ 在外边界 G 和轴上 ($r = 0$ 处) 应该恒等于零。于是谐波电位 $\phi^{(M)}(r, z)$ 其边界条件如下 (见图 4):

图3 $\phi^{(0)}(r, z)$ 的边界条件图4 $\phi^{(M)}(r, z)$ 的边界条件

$$\begin{aligned}\phi^{(M)}(r, z)|_{r=R(z)} &= \phi^{(M)}(R(z), z), \text{ 见 (1.17) 式,} \\ \phi^{(M)}(r, z)|_G &= \phi^{(M)}(r, z)|_{r=0} = 0.\end{aligned}\quad (1.20)$$

4. 逐次张弛法求解多极场的电(磁)位^[6,7]

如上所述, $\phi^{(0)}(r, z)$ 和谐波电位 $\phi^{(M)}(r, z)$ 满足二阶偏微分方程(1.9), 在一定的边界条件下, 可以采用逐次张弛方法求解.

设计算区域内任意点 0, 其坐标为 (r_0, z_0) , 电位为 ϕ_0 . 相邻的 1, 2, 3, 4 点间距为 h_1, h_2, h_3, h_4 , 相应点的电位为 $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$, 如图 5 所示. (本小节中 $\phi^{(0)}(r, z)$ 或 $\phi^{(M)}(r, z)$ 简写为 ϕ .)

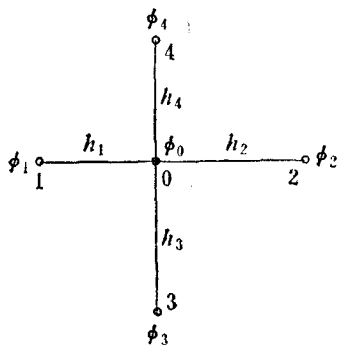


图 5 五点差分公式所
对应的不等距网格

对于谐波电位 $\phi^{(M)}(r, z)$ 五点差分公式如下^[6]:

$$c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + c_3\phi_3 + c_4\phi_4 - c_0\phi_0 = 0, \quad (1.21)$$

其中

$$\begin{aligned}c_1 &= \frac{2}{h_1(h_1 + h_2)}, & c_2 &= \frac{2}{h_2(h_1 + h_2)}, \\ c_3 &= \frac{2r_0 - h_4}{r_0h_3(h_3 + h_4)}, & c_4 &= \frac{2r_0 + h_4}{r_0h_4(h_3 + h_4)}, \\ c_0 &= c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + \frac{M^2}{2r_0^2}.\end{aligned}\quad (1.22)$$

在轴上 $\phi^{(M)}(r_0, z)|_{r_0=0} = 0$, 无需迭代.

对于旋转对称电位 $\phi^{(0)}(r, z)$ 五点差分公式如下^[4]:

$$c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + c_3\phi_3 + c_4\phi_4 - c_0\phi_0 = 0, \quad (1.23)$$

其中

$$\begin{aligned}c_1 &= \frac{2}{h_1(h_1 + h_2)}; & c_2 &= \frac{2}{h_2(h_1 + h_2)}; \\ c_3 &= \begin{cases} \frac{2r_0 - h_4}{r_0h_3(h_3 + h_4)} & r_0 \neq 0 \text{ (轴外)}, \\ 0 & r_0 = 0 \text{ (轴上)}; \end{cases} \\ c_4 &= \begin{cases} \frac{2r_0 + h_4}{r_0h_4(h_3 + h_4)} & r_0 \neq 0 \text{ (轴外)}, \\ \frac{4}{h_4^2} & r_0 = 0 \text{ (轴上)}. \end{cases} \\ c_0 &= c_1 + c_2 + c_3 + c_4.\end{aligned}\quad (1.24)$$

采用逐次张弛法^[4], 引进张弛因子 w , 则五点差分公式为

$$\phi_0^{[n+1]} = (1 - w)\phi_0^{[n]} + \frac{w}{c_0}(c_1\phi_1^{[n+1]} + c_2\phi_2^{[n]} + c_3\phi_3^{[n+1]} + c_4\phi_4^{[n]}), \quad (1.25)$$

其中 $\phi_0^{[n]}$, $\phi_0^{[n+1]}$ 分别表示 0 点处第 $n, n+1$ 次迭代所得的电位值, 其余类推. 上式迭代顺序是沿 z 方向从左到右, 沿 r 方向从下到上.

文献[6]已经证明, 采用适当的超张弛因子 ($1 < w < 2$) 或欠张弛因子 ($0 < w < 1$) 时, 用逐次张弛法进行迭代, 方程(1.25)的解亦即方程(1.9)的近似解收敛于真解. 但

是, w 数值选取得当, 则可加快收敛。只要适当划分网格并选取适当的 w 值, 利用逐次张弛法, 经过几十次到百余次迭代, 谐波电位可以达到足够的精度。至于谐波的个数一般只需取五个左右即可(对于边界电位为“矩形”分布时, 傅里叶展开式收敛较慢, 可以增到十个左右)。

5. 等位线和力线的描绘

对于空间(三维)的多极场, 可以在 $z = \text{常数}$ 的横截面或 $\theta = \text{常数}$ 的纵截面(子午面)中分别加以考察。

我们的程序采用扫描插值法来描绘等位线, 在横截面中沿 r 和 θ 方向扫描, 纵截面中则沿 r 和 z 方向扫描。在扫描过程中如果给定的电位值 V_D 介乎前后两个相邻网格点的电位值之间, 则用线性插值法定出 V_D 电位值所对应的点的坐标值。按此方法可将电位值等于 V_D 的点连成等位线。当迭代到达一定精度时, 这样描绘出的等位线是相当光滑的。

在纵截面和横截面中力线的微分方程如下:

$$\frac{dr}{dz} = \frac{E_r}{E_z}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{E_y}{E_x}, \quad (1.26)$$

式中 E_r, E_z (和 E_x, E_y) 是电位梯度沿 r, z (和 x, y) 方向的分量。对于所求出的电位按照拉格朗日插值公式可以计算电位梯度。程序中利用一次校正的梯形法则^[4]求解上式就可以描绘出力线。当迭代到达一定精度时, 这样描绘出的力线是相当光滑的, 而且力线与等位线处处正交。

二、典型的多极场模型的分析 and 计算

根据第一节的计算原理和计算公式, 编制了计算电磁多极场的通用程序, 并定名为 MP 程序。本程序具有以下的计算功能。

(1) $m = 0$ 时计算旋转对称的电位 $\phi^{(0)}(r, z)$, 并算出等位线、力线、轴上电位及其一、二阶微商。

(2) $m \neq 0$ 时计算各次谐波电位在任何横截面或纵截面的电位分布、等位线和力线。

(3) 计算所有的(不超过 10 个)谐波电位迭加而得的合成电位在任何横截面或纵截面中的电位分布、等位线和力线。

(4) 计算单个多极场或多个多极场的组合。

现将典型的多极场计算结果介绍于下。

1. 单个四极透镜 A

设有单个四极透镜 A, 电极是圆柱面的一部分, 其半径 $R = 1$, 长度 $L = 6$, 间隙角 $\delta = 0$ (见图 6)。 z 方向 $[-8, 8]$ 划分为 52 格, r 方向 $[0, 4]$ 划分为 29 格, θ 方向

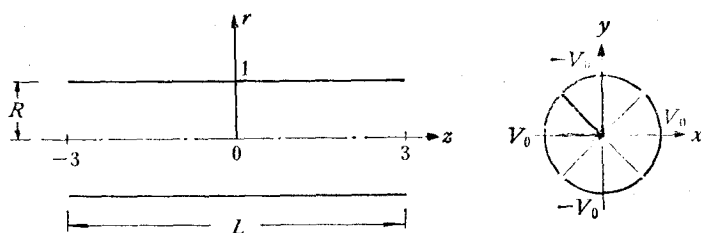


图6 单个四极透镜A

$[0^\circ, 45^\circ]$ 划分为 45 格¹⁾.

由于 $\delta = 0$, 按照 (1.18) 式, 电极上谐波电位的边界值为

$$\phi^{(M)} = \phi^{2^{(2m+1)}} = \frac{4V_0}{\pi} \cdot \frac{(-1)^m}{(2m+1)} \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

设给定 $V_0 = \frac{\pi}{4}$. 这是一种“矩形”边界电位分布, 其傅里叶展开式收敛很慢, 因此采用了

头 10 个谐波, 谐波次数为 $M = 2, 6, 10, \dots, 34, 38$.

无穷长(二维)四极透镜 ($\delta = 0$) 的电位理论值 $V_{th}\left(\frac{r}{R}, \theta\right)$ 由下式给出^[1]:

$$V_{th}\left(\frac{r}{R}, \theta\right) = \frac{2V_0}{\pi} \arctg \frac{2\left(\frac{r}{R}\right)^2 \cos 2\theta}{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^4}. \quad (2.2)$$

MP 程序算出的上述四极透镜 A 在 $z = 0$ 中心平面中的电位计算值 $V_{MP}\left(\frac{r}{R}, \theta, 0\right)$ 与理论值 $V_{th}\left(\frac{r}{R}, \theta\right)$ 作了比较, 见表 1.

计算结果表明, 对于充分长的四极透镜, 当采用头 10 个谐波时, 其中心平面中合成电位计算值与无穷长(二维)四极透镜电位理论值很接近, 在透镜的有用区域, 例如在 $r/R \leq 0.5$ 的范围内, 最大相对误差不超过 1.6×10^{-3} . 根据调和函数的极值原理, 最大误差应在边界上出现. 因此, 虽然在边界上电位分布有较大误差, 但在透镜的有用区域中, 仍可以获得相当好的精确度.

计算了 $\theta = 0$ 纵截面中沿着 $\frac{r}{R} = 0.25, 0.5, 0.75, 1.0$ 四条轴向直线上合成电位分布 $V\left(\frac{r}{R}, 0, z\right)$, 见图 7. (由于电位的对称性, 只画了 $z \geq 0$ 的曲线, 以下一律仿此.) 计算结果列于表 2, 由此可以看出弥散场的分布. 从透镜端面两侧内移 $1R$ 距离的范围内 (即 $-\frac{L}{2} + R \leq z \leq \frac{L}{2} - R$), 电位分布保持平直; 在透镜端面以外, 电位很快下降, 离端面约 $0.25-0.3R$ 处, 电位下降到中心值的一半; 在距离端面 $4R$ 处, 电位已下降到中心

1) z 方向和 r 方向的划分是不等距的, 即在电极范围中网格间距小, 在电极范围外直到 G 边界处网格间距大; 而 θ 方向的划分是等间距的. 以下一律仿此.

表 1 四极透镜 A 中心平面中电位计算值与理论值的比较

$\frac{r}{R}$	θ	理论值 $V_{th}(\frac{r}{R}, \theta)$	MP 计算值 $V_{MP}(\frac{r}{R}, \theta, 0)$
0.0	0°	0	0
	44°	0	0
0.1	0°	9.99967×10^{-3}	9.99941×10^{-3}
	44°	3.49035×10^{-4}	3.49052×10^{-4}
0.2	0°	3.99787×10^{-2}	3.99754×10^{-2}
	44°	1.39822×10^{-3}	1.39855×10^{-3}
0.3	0°	8.97582×10^{-2}	8.97432×10^{-2}
	44°	3.16657×10^{-3}	3.16825×10^{-3}
0.4	0°	0.158635	0.158614
	44°	5.73038×10^{-3}	5.73585×10^{-3}
0.5	0°	0.244979	0.244900
	44°	9.30546×10^{-3}	9.32039×10^{-3}
0.6	0°	0.345556	0.345445
	44°	1.44305×10^{-2}	1.44701×10^{-2}
0.7	0°	0.455616	0.455501
	44°	2.24888×10^{-2}	2.26084×10^{-2}
0.8	0°	0.569313	0.569220
	44°	3.77595×10^{-2}	3.82246×10^{-2}
0.9	0°	0.680809	0.680171
	44°	8.14713×10^{-2}	8.28615×10^{-2}
1.0	0°	0.785398	0.760460
	44°	0.785398	0.339774

表 2 四极透镜 A 的合成电位 $V(\frac{r}{R}, 0, z)$ 的中心值和半宽度

$\frac{r}{R}$	$V(\frac{r}{R}, 0, z)$ 的中心值	$V(\frac{r}{R}, 0, z)$ 的半宽度
0.25	6.24112×10^{-2}	3.266
0.5	0.244900	3.262
0.75	0.512285	3.254
1.0	0.760460	3.228

值的 0.05%。所有这些情况几乎和 $\frac{r}{R}$ 无关。利用图 7 的电位分布 $V\left(\frac{r}{R}, 0, z\right)$ 可以算出四极透镜 A 的等效长度(见附录)。

计算得出的在 $z = 0$ 横截面中二次谐波及合成电位的力线等位线如图 8(a), (b) 所

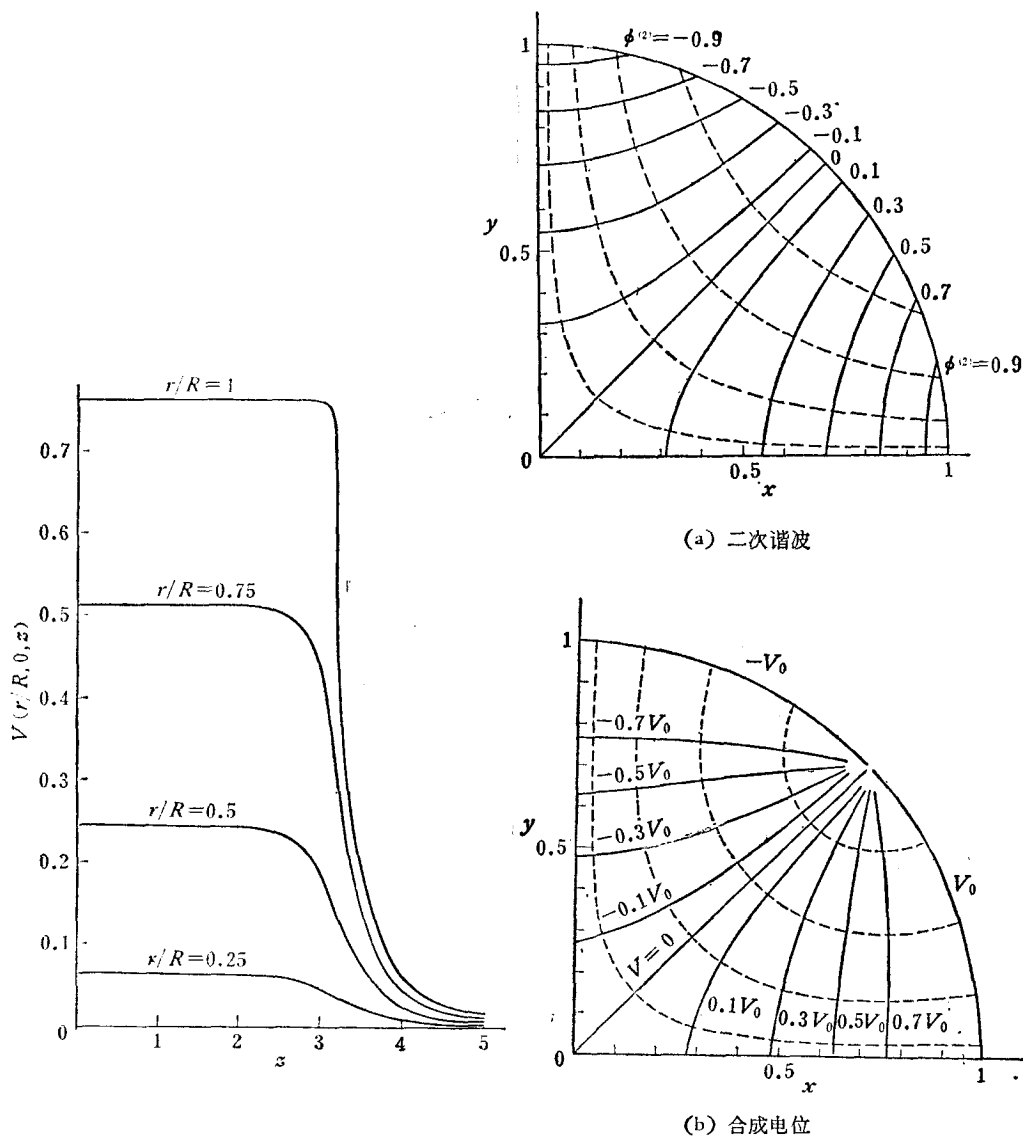


图 7 四极透镜 A 在 $\theta = 0$ 纵截面中合成电位分布 $V\left(\frac{r}{R}, 0, z\right)$ 。

图 8 四极透镜 A 在 $z = 0$ 横截面中的力线(虚线)和等位线(实线)

示(图上只画了第一象限)。按(1.11)式,二次谐波电位基本上是四极透镜场,其等位线在 $\frac{r}{R}$ 较大范围中是双曲线,计算的结果和理论完全符合。而合成电位在 $\frac{r}{R} \leq 0.4$ 的范围中才呈现双曲场的形式。(偏离双曲场的电位误差约为 1%.)

2. 单个四极透镜 B

设有单个四极透镜 B, 电极是圆柱面的一部分, 其半径 $R = 1$, 长度 $L = 2$, 间隙角 $2\delta = 30^\circ$ (见图 9). z 方向 $[-8, 8]$ 划分为 80 格, r 方向 $[0, 4]$ 划分为 26 格, θ 方向 $[0^\circ, 45^\circ]$ 划分为 45 格.

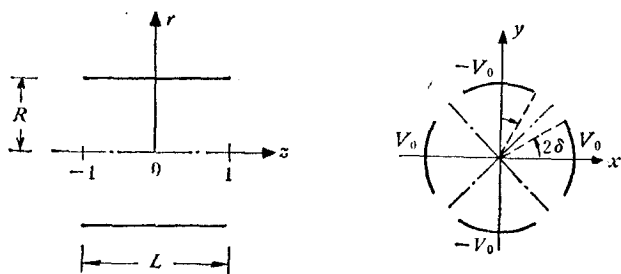


图 9 单个四极透镜 B

由于 $2\delta = 30^\circ$, 按照 (1.17) 式, 电极上谐波电位的边界值为

$$\phi^{(M)} = \phi^{2(2m+1)} = \frac{24V_0}{\pi} \cdot \frac{(-1)^m}{(2m+1)} \cdot \frac{\sin[(2m+1)\pi/6]}{(2m+1)\pi} \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

设 $V_0 = 10^4$, 采用了头六个谐波, 谐波次数为 $M = 2, 6, 10, 14, 18, 22$.

计算了 $\theta = 0$ 纵截面中沿着 $\frac{r}{R} = 0.1, 0.4, 0.5, 1.0$ 四条轴向直线上合成电位分布 $V\left(\frac{r}{R}, 0, z\right)/V_0$. (见图 10). 将这些电位分布用 $z = 0$ 中心平面处的值 $V\left(\frac{r}{R}, 0, 0\right)$

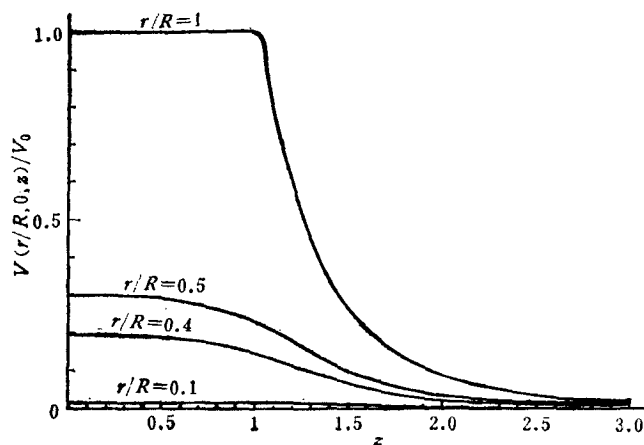


图 10 四极透镜 B 在 $\theta = 0$ 纵截面中的合成电位分布 $V\left(\frac{r}{R}, 0, z\right)/V_0$

进行约化, 得出的电位分布 $V\left(\frac{r}{R}, 0, z\right)/V\left(\frac{r}{R}, 0, 0\right)$ 示于图 11.

图 11 中曲线 I $\left(\frac{r}{R} = 0.1\right)$ 和 II $\left(\frac{r}{R} = 0.4\right)$ 基本重合. 这再次表明, 一个四极透镜

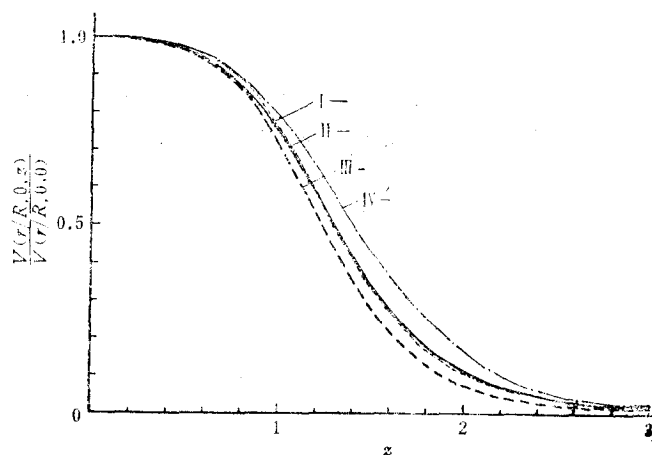


图 11 四极透镜 B, C 在 $\theta = 0$ 纵截面中的合成电位分布 $V\left(\frac{r}{R}, 0, z\right)/V\left(\frac{r}{R}, 0, 0\right)$

的弥散场分布几乎和离轴距离 $\frac{r}{R}$ 无关。

设另一个四极透镜 C , 其 R, L 与透镜 B 相同而间隙角 $\delta = 0$. 对此采用 6 个谐波进行计算. 曲线 III 是四极透镜 C 沿 $\frac{r}{R} = 0.25$ 直线上的电位分布. 可见, 即使 R, L 保持相同的四极透镜, 由于间隙角 δ 不同, 其弥散场尽管变化趋势相同, 但数值仍有差别. 曲线 IV 是文献 [12] 给出的四根圆杆状磁

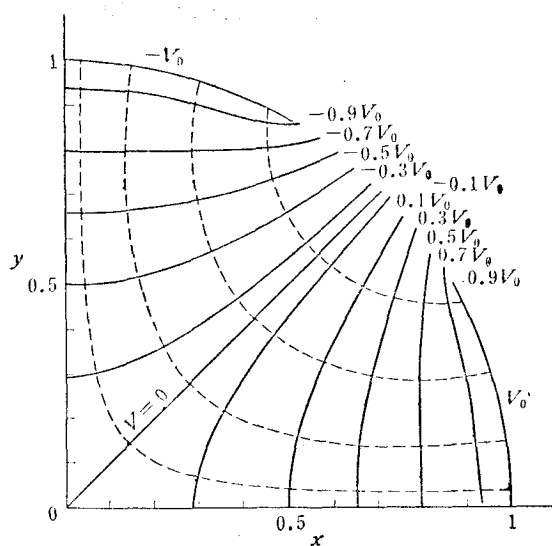


图 12 四极透镜 B 在 $z = 0$ 横截面中合成电位的力线(虚线)和等位线(实线)

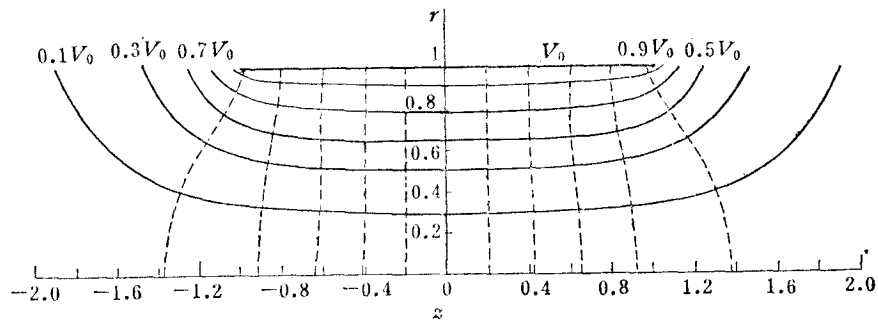
会有 0.5—1% 的误差. 见表 3.

$z = 0$ 横截面中合成电位的力线和等位线见图 12 (图上只画了第一象限). 同 $\delta = 0$ 的情形相似(见图 8(b)), 也仅在 $\frac{r}{R} \leq 0.35$ 的范围内等位线呈双曲线形(偏离双曲场的电位

曲线 IV 是文献 [12] 给出的四根圆杆状磁四极透镜场的纵向分布的逼近曲线. 曲线 IV 和曲线 I, II 的变化趋势一致, 但由于结构上的差异, 两者在数值上理应有差别. 文献 [13] 的透镜结构和本题相同, 但其结果和曲线 IV 基本上是一致的, 而与曲线 I, II 有所差别. 其原因可能由于该文献中假定了透镜的中心平面的电位分布为无穷长(二维)四极透镜横截面上的电位分布. 根据我们的计算, 当透镜长度 $(L/2)$ 和其半径 R 可以比拟时(例如透镜 C), 其中心平面的电位值 $V_{MP}\left(\frac{r}{R}, \theta, 0\right)$ 与无穷长(二维)四极透镜的电位值 $V_{th}\left(\frac{r}{R}, \theta\right)$ (见(2.2)式)

表 3 $R = L/2$ 的四极透镜 C 中心平面中电位值与无穷长四极透镜电位值的比较

$\frac{r}{R}$	θ	无穷长四极透镜 $V_{\text{th}}\left(\frac{r}{R}, \theta\right)$	$R = \frac{L}{2}$ 的四极透镜 $V_{\text{MP}}\left(\frac{r}{R}, \theta, 0\right)$
0	0°	0	0
	44°	0	0
0.05	0°	2.50000×10^{-3}	2.47734×10^{-3}
	44°	8.72543×10^{-5}	8.64611×10^{-5}
0.10	0°	9.99967×10^{-3}	9.90981×10^{-3}
	44°	3.49035×10^{-4}	3.45925×10^{-4}
0.15	0°	2.24962×10^{-2}	2.22979×10^{-2}
	44°	7.85641×10^{-4}	7.78863×10^{-4}
0.20	0°	3.99787×10^{-2}	3.96364×10^{-2}
	44°	1.39822×10^{-3}	1.38672×10^{-3}
0.25	0°	6.24188×10^{-2}	6.19048×10^{-2}
	44°	2.18976×10^{-3}	2.17290×10^{-3}
0.30	0°	8.97582×10^{-2}	8.90543×10^{-2}
	44°	3.16657×10^{-3}	3.14420×10^{-3}
0.35	0°	0.121893	0.120992
	44°	4.34022×10^{-3}	4.31291×10^{-3}
0.40	0°	0.158655	0.157562
	44°	5.73038×10^{-3}	5.69910×10^{-3}
0.45	0°	0.199798	0.198531
	44°	7.36881×10^{-3}	7.33573×10^{-3}
0.50	0°	0.244979	0.243569
	44°	9.30546×10^{-3}	9.27381×10^{-3}

图 13 四极透镜 B 在 $\theta = 0$ 纵截面中合成电位的力线(虚线)和等位线(实线)

误差约 1%), 随着离轴距离增加, 等位线较快地偏离双曲线。

图 13 是 $\theta = 0$ 纵截面中合成电位的力线和等位线。由此可以看出纵截面中透镜内

及其两侧的场分布状况。

3. 二单元四极透镜

设有二单元四极透镜, 电极是圆柱面的一部分, 其半径 $R = 1$, 长度 $L_1 = L_2 = 2$, 相距 $S = 1$, 间隙角 $2\delta = 60^\circ$. 两个透镜彼此在方位角方向转过 90° , 即所加电压极性相反(见图 14). z 方向 $[-8, 8]$ 划分为 80 格, r 方向 $[0, 4]$ 划分为 25 格, θ 方向 $[0^\circ, 45^\circ]$ 划分为 45 格.

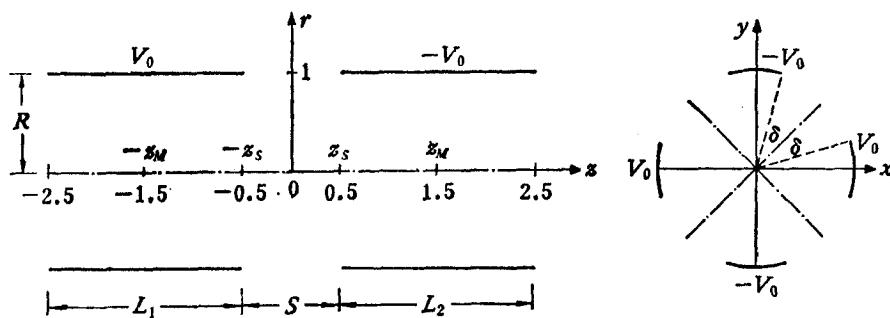


图 14 二单元四极透镜

由于 $2\delta = 60^\circ$, 按照 (1.17) 式, 电极上谐波电位的边界值为

$$\phi^{(M)} = \phi^{2(2m+1)} = \frac{12V_0}{\pi} \cdot \frac{(-1)^m}{(2m+1)} \cdot \frac{\sin[(2m+1)\pi/3]}{(2m+1)\pi} \quad (2.4)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

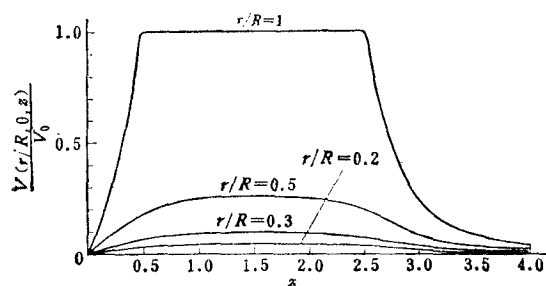
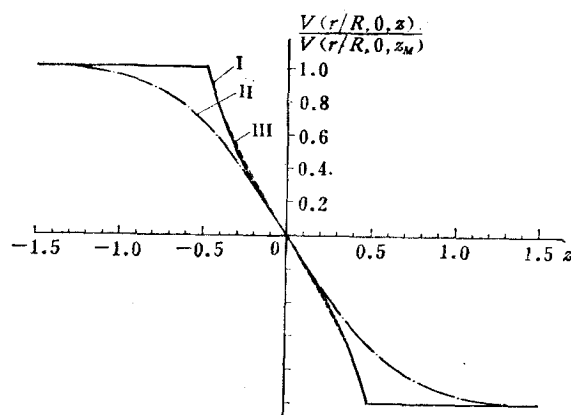
设给定 $V_0 = 2 \times 10^4$, 采用了头 10 个谐波, 谐波次数为 $M = 2, 10, 14, 22, 26, 34, 38, 46, 50, 58$.

设 $\pm z_M$ 是各个透镜中心对称平面坐标, $z_M = 1.5$, $\pm z_s$ 是各个透镜相邻的内端面坐标, $z_s = 0.5$. 对于 $\frac{r}{R} = 0.2, 0.3, 0.5$; $\theta = 0^\circ, 15^\circ, 37.5^\circ$ 几组坐标值下计算了相对的电位值 $V\left(\frac{r}{R}, \theta, z_s\right) / V\left(\frac{r}{R}, \theta, z_M\right)$. MP 计算结果与文献[14]的比较见表 4. 由表可见, 相对偏离约为 3% 左右. 这可能是由于该文献对于 $\frac{r}{R} = 1$ 圆柱面上两四极透镜之间电位分布作了一定假定, 而且还假定 z_M 平面上电位分布是无穷长(二维)四极透镜电位分布. 这就要靠求解二维场(如前所述, 当 R 和 $\frac{L}{2}$ 可以比拟时, 误差约为 0.5—1%)或借助电解槽或电阻网实验来求得. 而在我们的计算方法中不需要附加这些边界条件, 也无需作相应的处理, 因而计算更为简捷.

计算了 $\theta = 0$ 纵截面中沿着 $\frac{r}{R} = 0.2, 0.3, 0.5, 1.0$ 四条轴向直线上合成电位分布 $V\left(\frac{r}{R}, 0, z\right) / V_0$, 见图 15. 再将这些电位分布用 $\pm z_M = 1.5$ (对称平面) 的值 $V\left(\frac{r}{R}, 0,$

表 4 二单元四极透镜 MP 计算结果与文献[14]的比较

θ	$\frac{r}{R}$	MP 计算值	文献[14]计算值
		$V\left(\frac{r}{R}, \theta, z_s\right) / V\left(\frac{r}{R}, \theta, z_M\right)$	$V\left(\frac{r}{R}, \theta, z_s\right) / V\left(\frac{r}{R}, \theta, z_M\right)$
0°	0.2	0.673165	0.69211
0°	0.3	0.680348	0.70013
0°	0.5	0.706120	0.73036
15°	0.2	0.673165	0.69214
15°	0.3	0.680345	0.70016
15°	0.5	0.706122	0.73051
37.5°	0.2	0.673164	0.69232
37.5°	0.3	0.680347	0.70023
37.5°	0.5	0.706118	0.73031

图 15 二单元四极透镜在 $\theta = 0$ 纵截面中合成电位分布 $V\left(\frac{r}{R}, 0, z\right) / V_0$ 图 16 二单元四极透镜在 $\theta = 0$ 纵截面中合成电位分布 $V\left(\frac{r}{R}, 0, z\right) / V\left(\frac{r}{R}, 0, z_M\right)$

z_M) 进行约化, 得出相对电位分布 $V\left(\frac{r}{R}, 0, z\right) / V\left(\frac{r}{R}, 0, z_M\right)$, 如图 16 中曲线 I ($\frac{r}{R} = 1$) 和 II ($\frac{r}{R} = 0.3$) 所示. 图中曲线 III 是文献 [14] 所假定的 $\frac{r}{R} = 1$ 圆柱面上边界电位分布, 与我们的曲线 I 很好符合. 此外还计算了 $\theta = 0$ 纵截面中等位线与力线分布(见

图 17). 由此可以看到二单元四极透镜间的电位分布及其边缘弥散场影响.

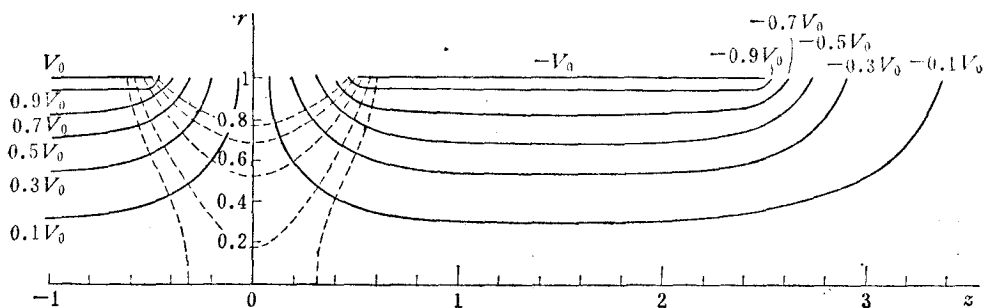
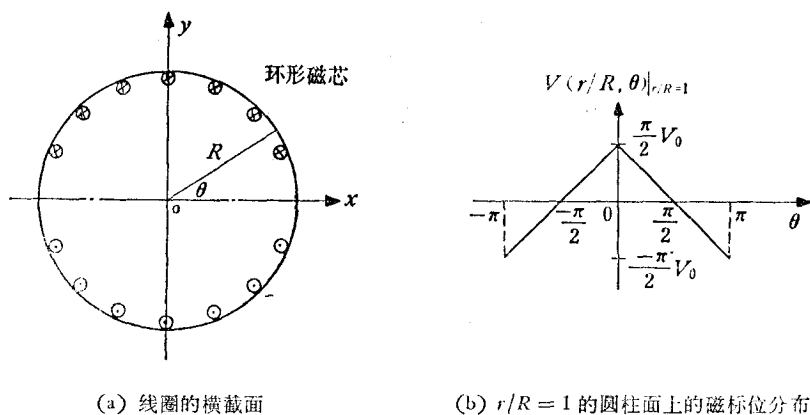


图 17 二单元四极透镜在 $\theta = 0$ 纵截面中合成电位的力线(虚线)和等位线(实线)

4. 圆柱环形偏转线圈

设有一个圆柱环形磁芯(半径为 R), 其上绕有均匀的单层绕组. 上半圆周上电流是垂直纸面向内($\otimes$), 下半圆周上电流则向外($\odot$), 如图 18(a) 所示(环形磁芯外的线圈回折线没有画出). 根据安培回路定理, 在 $\frac{r}{R} = 1$ 的圆柱面上磁标位 $V\left(\frac{r}{R}, \theta\right)\Big|_{r/R=1}$ 是方位角 θ 的线性变化函数, 见图 18(b).



(a) 线圈的横截面

(b) $r/R = 1$ 的圆柱面上的磁标位分布

图 18 圆柱环形偏转线圈

设圆柱环形磁芯是纵向无穷长的, 则磁标位的理论值由下式给出:

$$V_{th}\left(\frac{r}{R}, \theta\right) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \left(\frac{r}{R}\right)^{2m+1} \cos(2m+1)\theta$$

$$m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

由于级数收敛得很慢, 我们选取了 $m = 0, 1, 2, \dots, 20$ 共 21 个谐波迭加作为磁标位的理论值; 并假定 $V_0 = 10^4$.

设圆柱环形偏转线圈, 其半径 $R = 1$, 长度 $L = 6$, 间隙角 $\delta = 0$ (见图 19). z 方向 $[-8, 8]$ 划分为 96 格, r 方向 $[0, 4]$ 划分为 24 格, θ 方向 $[0^\circ, 90^\circ]$ 划分为 45 格.

按照 (2.5) 式, 在 $\frac{r}{R} = 1$ 圆柱面上谐波磁标位边界值为

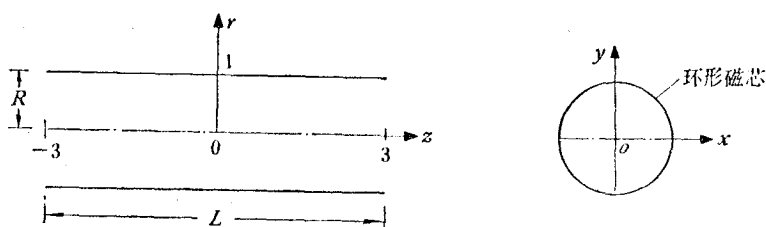


图 19 圆柱环形偏转线圈

$$\phi^{(M)} = \phi^{(2m+1)} = \frac{4V_0}{\pi} \cdot \frac{1}{(2m+1)^2} \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.6)$$

计算中采用了头 6 个谐波, 谐波次数为 $M = 1, 3, 5, 7, 9, 11$.

表 5 圆柱环形偏转线圈中心平面磁标位计算值与理论值的比较

$\frac{r}{R}$	θ	理论值 $V_{th}(\frac{r}{R}, \theta)$	MP 计算值 $V(\frac{r}{R}, \theta, 0)$
0.0	0°	0	0
	88°	0	0
0.1	0°	1.27466×10^3	1.27483×10^3
	88°	4.42884×10	4.42708×10
0.2	0°	2.55796×10^3	2.55833×10^3
	88°	8.77153×10	8.76866×10
0.3	0°	3.85921×10^3	3.85985×10^3
	88°	1.29516×10^2	1.29486×10^2
0.4	0°	5.18919×10^3	5.19021×10^3
	88°	1.69091×10^2	1.69068×10^2
0.5	0°	6.56155×10^3	6.56295×10^3
	88°	2.06044×10^2	2.06026×10^2
0.6	0°	7.99399×10^3	7.99636×10^3
	88°	2.40168×10^2	2.40117×10^2
0.7	0°	9.51451×10^3	9.51710×10^3
	88°	2.71419×10^2	2.71133×10^2
0.8	0°	1.116998×10^4	1.116690×10^4
	88°	2.99875×10^2	2.98530×10^2
0.9	0°	1.306237×10^4	1.301473×10^4
	88°	3.25733×10^2	3.20426×10^2
1.0	0°	1.555642×10^4	1.517866×10^4
	88°	3.52652×10^2	3.31209×10^2

我们将 MP 程序算出的在 $z = 0$ 横截面中磁标位 $V_{MP}\left(\frac{r}{R}, \theta, 0\right)$ 与上述无穷长圆柱环形偏转线圈的理论值 $V_{th}\left(\frac{r}{R}, \theta\right)$ 作了比较, 见表 5.

计算结果表明, 对于充分长的圆柱环形偏转线圈, 如果采用 6 个谐波, 则其中心平面中合成磁标位分布与无穷长(二维)圆柱环形偏转线圈磁标位分布理论值很接近. 例如在 $\frac{r}{R} \leq 0.7$ 的范围中, 最大相对误差约为 1×10^{-3} .

计算了中心平面 $z = 0$ 和端面 $z = \pm 3$ 中 $M = 1, 3, 5, 7, 9$ 各次谐波磁场及合成磁场的力线分布, 见图 20(a)–(h). 其中一次谐波表示均匀的两极偏转场, 三次谐波表示 6 极偏转场等. 这些图形与理论分析完全一致, 与文献[8]结果也相同. 计算表明, 在

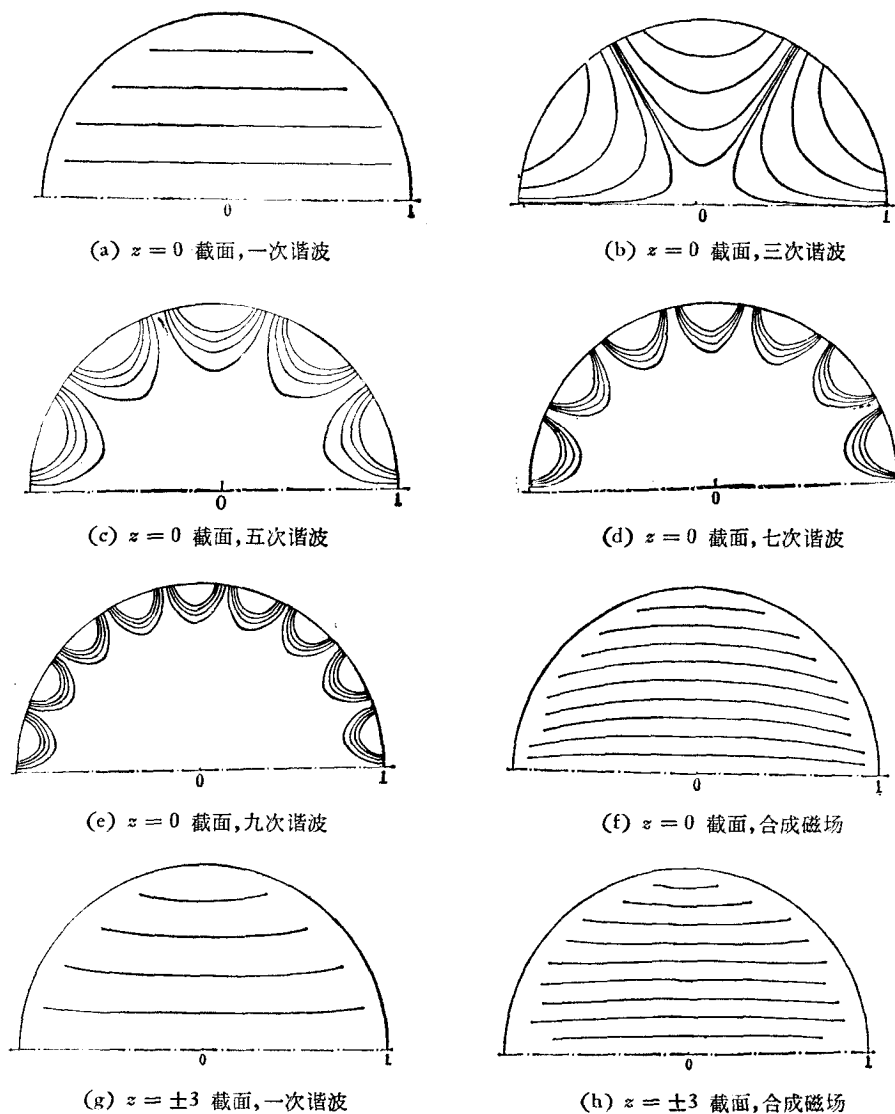


图 20 圆柱环形偏转线圈的力线分布(上半平面图)

中心平面 ($z = 0$) 中, $\frac{r}{R} \leq 0.35$ 的范围中, 合成磁场是沿 x 轴 (水平) 方向的均匀场 (误差在 5% 以内); 而在端面 ($z = \pm 3$) 中, 只有 $\frac{r}{R} \leq 0.25$ 的范围中, 合成磁场才是均匀场 (误差在 5% 以内). 这表明从中心平面移向两端时, 偏转磁场的均匀区逐渐缩小, 比较图 20(f) 和 20(h) 可以看到, 在中心平面中合成磁场是桶形分布, 而从中心平面移向两端面时, 这种性质逐渐发生变化; 比较图 20(a) 和 20(g) 则可以看出, 一次谐波的力线性质的变化.

结 语

本文利用傅里叶展开法、借助逐次张弛方法进行了电磁多极场的分析和计算, 并编制了计算电磁多极场的通用程序. 对于单个和二单元四极透镜和圆柱环形偏转线圈等典型的多极场模型作了分析和计算, 给出了不同横截面和纵截面中的力线和等位线, 探讨了计算的精确度.

计算实践表明, 这种方法在理论上是合理的, 具有相当的通用性, 可以研究各种不同类型的多极场, 特别能够求得边缘弥散场的影响. 我们的计算对于边界条件的处理上比较文献上已有的计算方法更为简捷. 此外, 这种方法能够节省内存, 缩短时间, 因而实用上是可行的.

附 录

现在计算四极透镜场的等效宽度.

由图 7 可见, 在 $(-\frac{L}{2} + R) \leq z \leq (\frac{L}{2} - R)$ 的范围中, 四极透镜 A 的电位分布 $V(\frac{r}{R}, 0, z)$ 保持常数, 约等于其中心值 $V(\frac{r}{R}, 0, 0)$. 我们可以在 $[-8, 8]$ 计算区域中把 $V(\frac{r}{R}, 0, z)$ 曲线下的面积约化成为高度等于 $V(\frac{r}{R}, 0, 0)$ 的矩形, 则矩形的长度就是四极透镜场的等效长度 L_{eff} .

$$\begin{aligned} L_{\text{eff}} &= \left\{ \int_{-8}^{-\frac{L}{2}+R} + \int_{-\frac{L}{2}+R}^{\frac{L}{2}-R} + \int_{\frac{L}{2}-R}^8 V\left(\frac{r}{R}, 0, z\right) dz \right\} / V\left(\frac{r}{R}, 0, 0\right) \\ &= (L - 2R) + \left\{ \int_{-8}^{-\frac{L}{2}+R} + \int_{\frac{L}{2}-R}^8 V\left(\frac{r}{R}, 0, z\right) dz \right\} / V\left(\frac{r}{R}, 0, 0\right). \end{aligned} \quad (\text{A1})$$

数值积分结果为

$$\frac{\int_{-8}^{-\frac{L}{2}+R} V\left(\frac{r}{R}, 0, z\right) dz}{V\left(\frac{r}{R}, 0, 0\right)} = \frac{\int_{\frac{L}{2}-R}^8 V\left(\frac{r}{R}, 0, z\right) dz}{V\left(\frac{r}{R}, 0, 0\right)} = 1.33R. \quad (\text{A2})$$

这个结果几乎和 $\frac{r}{R}$ 无关; 而且对于不同形状、不同 $\frac{L}{R}$ 值的四极透镜结果也基本相同. 将 (A2) 式代入 (A1) 式, 得到等效长度

$$L_{\text{eff}} = (L - 2R) + 2.66R, \quad (\text{A3})$$

式中 $(L - 2R)$ 是电位分布曲线平直段的长度。

Reisman (转引自文献 [15]) 假设四极透镜平直段长度为 $L - 2R$; 并认为 $(-\infty, -\frac{L}{2} + R]$, $[\frac{L}{2} - R, \infty)$ 两侧场分布是半宽度为 R 的钟形场的左右两叶。这样 Reisman 的等效宽度为

$$L_{\text{Reff}} = (L - 2R) + R \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\left(\frac{z}{R}\right)}{1 + \left(\frac{z}{R}\right)^2} = (L - 2R) + \pi R. \quad (\text{A4})$$

(A3), (A4) 式给出的等效宽度的差别可能是由于我们采用有限的计算区域所致。四极透镜 A 的计算中 $L = 6$, $R = 1$, 因此积分 (A2) 式是在 $[-8, -2]$, $[2, 8]$ 即宽度为 6 的二个区域中求积的。对于钟形场, 结果积分界限不是 $(-\infty, \infty)$, 而是 $[-6, 6]$ 则有

$$L'_{\text{Reff}} = (L - 2R) + R \int_{-6}^6 \frac{d\left(\frac{z}{R}\right)}{1 + \left(\frac{z}{R}\right)^2} = (L - 2R) + 2.81R. \quad (\text{A5})$$

可见, MP 计算的等效宽度与有限界限钟形场的等效宽度基本上是符合的。

参 考 文 献

- [1] A. M. Страшкевич, Электронная оптика электро-статических полей необладающих осевой симметрией, 1959.
- [2] A. M. Страшкевич, Электронная оптика электро-статических систем (1966).
- [3] M. Szilágyi, in "Image Processing and Computeraided Design in Electron Optics" (Ed. P. W. Hawkes), A. P., (1973), 416.
- [4] C. Weber, *Philips Res. Repts., Suppl.*, No. 6 (1967).
- [5] K. Yamamoto, K. Nagami, *Optik*, **48**(1) (1977), 69.
- [6] W. Schwertfeger, E. Kasper, *Optik*, **41**(2) (1974), 160.
- [7] E. Kasper, *Optik*, **46**(3) (1976), 271.
- [8] M. E. Carpenter, R. A. Momberger, T. N. Schultz, *IEEE Trans.*, **CE-23**(1) (1977), 22.
- [9] W. Glaser, *Grundlagen der Elektronenoptik*, (1952) Wien.
- [10] L. P. Ovsyannikova, S. Ya. Yavor, *et al.*, *Nucl. Instrum. and Meth.*, **74**(2) (1969), 185.
- [11] 清华大学、北京大学《计算方法》编写组,《计算方法》(上册), 第7章 §2 (1974), 科学出版社.
- [12] H. Kawakatsu, K. G. Vosburgh, B. M. Siegel, *J. Appl. Phys.*, **39**(1) (1968), 245.
- [13] M. Ueda, M. T. Noda, *Japan. J. Appl. Phys.*, **12**(2) (1973), 323.
- [14] M. Ueda, M. T. Noda, *IEEE Trans.*, **ED-20**(7) (1973), 662.
- [15] P. W. Hawkes, Quadrupoles in Electron Lens Design, *Advances in Electronics and Electron Phys.*, Suppl.7 (1970).

ON THE ANALYSIS AND CALCULATION OF STATIC ELECTRO-MAGNETIC MULTIPOLE FIELDS

XIMEN JI-YE CHEN WEN-XIONG

(Department of Radio Electronics, Beijing University)

ABSTRACT

The multipole fields are widely used in electron-optical devices and instruments. The multipole fields are generated by several azimuthally-arranged electrodes or pole-pieces and, are thereby not rotational symmetric. They generally possess some planes of symmetry or anti-symmetry.

The Fourier-transform method is used to decompose the three dimensional potential distribution into a series of independent two dimensional potentials, which can be calculated easily by the relaxation method. For this purpose, the three dimensional boundary values must be expressed in Fourier-series with respect to the azimuth θ in cylindrical coordinates. After these treatments, the corresponding two dimensional potentials can be calculated and superimposed.

A computer program has been worked out for calculation of the properties of the multipole fields and its fringe fields. Some examples of importance such as quadrupole lens or doublet, and a toroidal deflection coil have been treated in detail. The numerical results show that the Fourier-transform method for multipole field is a useful means for analysis and design of electron-optical devices.