

研究简报

矢引力子场度规场引力理论*

钱 尚 武

(北京大学物理系)

一、矢引力子场张量

Schwartz^[1]已经证明,单单根据库仑定律和洛伦兹不变性这一要求,就可导出麦克斯韦方程.由于牛顿引力定律和库仑定律形式上完全相似,因此,我们认为有一种矢引力子场,用反对称张量 $H^{\mu\nu}$ 描述.对平直空间中观察者说,

$$H^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & F_x & F_y & F_z \\ -F_x & 0 & Q_z & -Q_y \\ -F_y & -Q_z & 0 & Q_x \\ -F_z & Q_y & -Q_x & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $\mathbf{F}$ 是一般所谓的引力场强度, $\mathbf{Q}$ 是 Carstou^[2] 1969年所引入的引力场涡度.在平直空间中, $H^{\mu\nu}$ 满足和麦克斯韦方程相类似的方程:

$$H^{\mu\nu}_{;\nu} = -4\pi G k^{\mu},$$

$$\{H_{\mu\nu}, \lambda\} = 0,$$

式中 k^{μ} 是四维质量流密度矢量, G 是引力恒量,光速 c 取为1,曲括号 $\{\}$ 表示按 μ, ν 和 λ 这三个指标求反对称和.写成广义协变形式,为

$$H^{\mu\nu}_{;\nu} = -4\pi G k^{\mu}, \quad (1)$$

$$\{H_{\mu\nu}, \lambda\} = 0 \quad (2)$$

需要强调的是, $H^{\mu\nu}$ 并不是和度规场 $g^{\mu\nu}$ 等效的引力场,它的作用和其他物质的作用一样,都是影响度规,而不直接决定质点的运动,质点在度规场作用下的运动仍是黎曼空间中短程线运动.

二、矢引力子场能量动量张量

对光子场说,能量动量张量为^[3]

$$T^{\mu\nu}_{(em)} = F^{\mu}_{\alpha} F^{\alpha\nu} + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta},$$

* 1978年1月12日收到.

其中 $F^{\mu\nu}$ 为电磁场张量,

$$T_{(em)}^{00} = \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2}{2}$$

是电磁场能量密度. 一个物体的矢引力子场和一个负电荷的电磁场相对应, 都具有正的能量密度, 因而具有正的惯性质量. 类似地, 矢引力子场能量动量张量为

$$T_{(gr)}^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi G} \left(H_a^\mu H^{\alpha\nu} + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} H^{\alpha\beta} H_{\alpha\beta} \right), \quad (3)$$

而且协变散度也等于零, 即

$$T_{(gr);\nu}^{\mu\nu} = 0.$$

在爱因斯坦场方程中, 将 $T_{(gr)}^{\mu\nu}$ 考虑进去后, 得到

$$G_{\mu\nu} = -8\pi G [T_{\mu\nu(m)} + T_{\mu\nu(gr)}], \quad (4)$$

式中 $T_{\mu\nu(m)}$ 是除矢引力子场 $H^{\mu\nu}$ 以外所有其他各种物质的能量动量张量, 即爱因斯坦场方程中原来的 $T_{\mu\nu}$. (4) 式就是我们所引入的度规场方程. (1), (2), (3) 和 (4) 式再加上 $T_{\mu\nu(m)}$ 的表达式, 就是我们求解度规场 $g^{\mu\nu}$ 的方程组, 即矢引力子场度规场引力理论的方程组. 这在本质上是一种矢量张量场理论, 但和其他作者^[4]所引进的矢量场是不同的. 在无其他物质存在的区域中, $T_{\mu\nu(m)} = 0$, $k^\mu = 0$, 这时 (1) 式变为

$$H_{;\nu}^{\mu\nu} = 0, \quad (1')$$

(4) 式变为

$$G_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu(gr)}. \quad (4')$$

(1'), (2), (3) 和 (4') 式就是求真空中度规场 $g^{\mu\nu}$ 的方程组, 相当于爱因斯坦真空场方程. 度规场 $g^{\mu\nu}$ 求得后, 就可由短程线方程求得质点在引力场中运动规律.

三、球对称静止质量的外部解

根据球对称性和静场这两个特点,

$$ds^2 = e^\nu dx^{0^2} - e^\lambda dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2.$$

考虑到 r 很大时 $\lambda = \nu = 0$, $H_{12} = H_{13} = 0$, 由 (1) 式求得 $H_{\mu\nu}$ 不为零的分量为

$$H_{10} = -H_{01} = \frac{GM}{r^2} e^{\frac{1}{2}(\lambda+\nu)},$$

从而由 (3) 式求得

$$T_{\mu\nu(gr)} = \frac{1}{8\pi G} \left(\frac{GM}{r} \right)^2 \begin{pmatrix} e^\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}.$$

解方程 (4), 并考虑到要得出正确的牛顿极限, 最后得到

$$ds^2 = \left(1 - \frac{GM}{r} \right)^2 dx^{0^2} - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{GM}{r} \right)^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (5)$$

四、广义相对论四大实验验证

将度规(5)式和 Schwarzschild 度规相比,可以看出,在准到 $\frac{GM}{r}$ 级时两者完全一致. 因此,对于光线在引力场中弯曲和雷达回波延迟这两个实验验证,两者完全一致. 对于引力红移,(5)式所得结论为

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{1 - \frac{GM}{r_1}}{1 - \frac{GM}{r_2}},$$

和 Schwarzschild 度规所得结论为

$$\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)_s = \sqrt{\frac{1 - \frac{2GM}{r_1}}{1 - \frac{2GM}{r_2}}}.$$

在弱场近似下完全一致,在强场区域两者明显不同. 在我们的理论中,无限红移面在 $r = r_c = GM$ 处,在 Schwarzschild 理论中,在 $r = r_s = 2GM = 2r_c$ 处. 对于水星近日点的进动,因要准到 G^2M^2/r^2 ,两者有明显差别, Schwarzschild 度规给出的进动值为 $43''03/\text{百年}$, (5) 式给出的进动值为 $35''86/\text{百年}$,比前者减小近 17%. 进动值最新修正数据为 $41''4/\text{百年}^{[9]}$. 这个数据是从 $5600''73/\text{百年}$ 的观测值中减剩下来的,其中 $532''$ 是考虑了其它行星的摄动计算出来的,但主要计算了金星、地球和木星的摄动,而且是用牛顿理论计算出来的. 至于太阳扁率的影响, Dicke 和 Goldenberg^[6] 1966 年曾作实验,原来估计可能有 $3.4''/\text{百年}$ 的影响,但 1973 年已有实验^[7] 否定他们的结果,说明不可能有那么大的值,然而 $1''/\text{百年}$ 左右的值是可能的. 因此,即使不考虑金星、地球和木星之外其他行星的微小摄动,即使仍用牛顿理论计算摄动,只考虑太阳扁率可能有的影响,这理论已可预言 $37''/\text{百年}$ 左右的进动值,和 $41''4/\text{百年}$ 只差 10%,爱因斯坦理论的计算值 $43''03/\text{百年}$ 比 $41''4/\text{百年}$ 大 5%. 考虑到 $41''4$ 是从观察值 $5600''73$ 中减剩下来的,以及忽略的各种因素和计算时的近似性,这种小的差异目前还不能决定两种理论的好坏.

五、无限红移面内外情况

首先考虑原时间隔 $d\tau$, 根据 (5) 式,静止地放在 r 处的钟所指示的原时间隔 $d\tau$ 的平方为

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{GM}{r}\right)^2 dx^{0^2}.$$

因此,由无限远处观察者看来,当钟沿径向移向球对称静止质量时,钟不断变慢,在无限红移面 $r = r_c = GM$ 处,钟走得无限缓慢,越过无限红移面后钟又不断走快. 在 Schwarzschild

度规情形下, $d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dx^0{}^2$, 这时当 $r < r_s = 2GM$ 时右端项为负, 上式不能用, 类时坐标 x^0 成为类空坐标.

其次考虑空间间隔 dl , 由文献[8]可知,

$$dl^2 = \left(\frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}} - g_{\alpha\beta} \right) dx^\alpha dx^\beta,$$

式中重复出现的希腊字母都由 1 至 3 求和, 根据(5)式

$$dl^2 = \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{GM}{r}\right)^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2.$$

对于沿径向放置的尺来说

$$dl^2 = \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{GM}{r}\right)^2}.$$

因此, 由无限远处观察者看来, 当尺沿径向移向球对称静止质量时, dr 不断减小, 尺不断缩短, 在 $r = r_c = GM$ 处无限缩短, 再往里又不断增长. 需要指出的是, dl 是在局部惯性系中测得的长度元. 在 Schwarzschild 度规情形下,

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{r}},$$

这时当 $r < r_s = 2GM$ 时上式不能用, 径向坐标 r 要成为类时坐标.

由(5)式可知, 光讯号的径向速度为

$$\frac{dr}{dx^0} = \left(1 - \frac{r_c}{r}\right)^2. \quad (6)$$

在 $r \rightarrow r_c$ 时它趋于零. 因此, 无限红移面也就是径向光速等于零的曲面. 当光沿径向向着静止质量传播时, 光速不断减小, 在 $r = r_c$ 处减为零, 越过无限红移面后又不断增大, 在 $r = \frac{r_c}{2}$ 处光速已增为 1, r 再减小时可比 1 大, 从而可在强引力场区域产生超光速信号. 需要指出的是, 在局部惯性系中光速始终为 1, 因而从自由降落的飞船中观察者看来, 光速始终为 1.

十分重要的是, 度规(5)式在 $r < r_c$ 情形下 $g_{00} = \left(1 - \frac{r_c}{r}\right)^2$ 仍是正的,

$$g_{11} = -\left(1 - \frac{r_c}{r}\right)^{-2}$$

仍是负的, 不象 Schwarzschild 度规那样, 在 $r < r_s$ 时要改变正负号, 所以 x^0 始终是类时坐标, r 始终是类空坐标, 度规始终和时间无关. 在 Schwarzschild 度规情形下, $r > r_s$ 时将来光锥朝向 t 增大的方向, 但在 $r < r_s$ 时将来光锥要突然变为朝向 r 减小的方向, 将来光锥形状的这种突变, 使曲面 $r = r_s$ 内部的物体只能向 r 减小的方向运动, 逆向运动是不可能的, 从而使无限红移面成为单向膜, 只能进不能出. 在度规(5)式情形下, 将来光锥的形状在越过 $r = r_c$ 曲面时不发生这种突变, 始终朝向 t 增大的方向, 每一将来光锥, 不

管在无限红移面外部还是内部,始终都是横跨曲面 $r = \text{const}$ 两边的,因而物体可从相反两个方向通过曲面 $r = \text{const}$,在无限红移面内部不会发生 r 只能减小不能增大的现象.所以无限红移面不是单向膜,光既可以进入也可以越出(在无限远处观察者看来,这两种过程都需要无限长的时间).

由此可见,当球体半径缩小到比 $r_c = GM$ 还小时,在 $r = r_c$ 附近,我们的理论与爱因斯坦理论有很大差别,得出了与 Schwarzschild 黑洞性质根本不同的结论.

参 考 文 献

- [1] M. Schwartz, Principles of Electrodynamics (1972).
- [2] J. Carstou, *Compt Rend.*, **268** (1969), 201.
- [3] Adler, Bazin, Schiffer, Introduction to General Relativity (1965), p. 273—275.
- [4] C. M. Will, K. Nordtvedt, *Ap. J.*, **177** (1972), 757.
- [5] Misner, Thorne and Wheeler, Gravitation (1973).
- [6] R. H. Dicke and H. M. Goldenberg, *Phys. Rev. Lett.*, **18** (1967), 313.
- [7] H. A. Hill et al., *Phys. Rev. Lett.*, **33** (1974), 1497.
- [8] 朗道、栗弗席兹,场论, §10-4, 科学出版社.

A THEORY OF GRAVITATION BY CONSIDERING THE VECTOR GRAVITON FIELD AND THE METRIC FIELD

Qian Shang-wu

(Beijing University)