

不均匀等离子体片流的磁流不稳定性*

石 长 和

(北京大学地球物理系)

1. 当均匀等离子体流的流速超过折合阿尔芬波速时, 等离子体流将是不稳定的^[1,2]. 由这类不稳定性所激发的磁流波, 成为在地面上所观测到的地磁脉动的机制之一^[3]. 近来, 轨道地球物理观测卫星 OGO-5 测定的结果表明^[4]在磁层内, 阿尔芬波速 V_A 的分布, 并不是距离的单调函数, 而是在四个地球半径附近有一极小值, 约为 300—400 公里/秒左右. 有意义的是: 正是在这区域内, 卫星所观测到的地磁脉动最为频繁. 这一观测结果有利于用磁流不稳定性来说明地磁脉动的激发, 因为在 V_A 有最小值的区域内, 产生这类不稳定性的“阈”为最低. 随着距离的增加, V_A 值也逐渐增加, 在磁层顶附近 V_A 约有 10^3 公里/秒左右的量级^[5]. 我们知道, 磁层顶附近区域是太阳风和地球磁场相互作用的交接区域, 也有频繁的脉动磁场存在, 但是典型的太阳风的流速为 500 公里/秒, 即小于介质的阿尔芬波速, 因此, 以均匀等离子体流的模式作为磁流波的激发机制将不再合适了.

本文主要讨论在弱不均匀性的条件下, 在等离子体片流中产生磁流不稳定性条件, 采用的方法是在几何光学近似下的“玻耳量子化法则”. 结果表明, 如果在片流中等离子体密度是距离的单值下降函数时, 虽然流速小于阿尔芬波速, 但可能引起不稳定性, 这时的扰动增长率将正比于不均匀性的梯度. 这可以作为在磁层顶区域附近所观测到的低频磁脉动的一种可能激发机制.

2. 在准流体近似下, 线性化后的基本方程为^[6]

$$i\omega\rho\mathbf{v} = \frac{1}{c} [\mathbf{j}\mathbf{H}_0], \quad (1)$$

$$\mathbf{j} = \hat{\sigma} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}_0] \right), \quad (2)$$

$$i(\omega - kv_0)\rho_B\mathbf{v}_B = \frac{1}{c} [\mathbf{j}_B\mathbf{H}_0], \quad (3)$$

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_0\mathbf{h}] + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_B\mathbf{H}_0] = 0, \quad (4)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{i\omega}{c} \mathbf{h}, \quad (5)$$

$$\text{rot } \mathbf{h} = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j}_B + \mathbf{j}), \quad (6)$$

$$\text{div } \mathbf{h} = 0, \quad (7)$$

式中除通用的符号外, ρ 是均匀背景等离子体密度; $\mathbf{v}$ 为背景等离子体的质量输运速度,

* 1978年3月27日收到.

它等于

$$\mathbf{v} = \frac{M\mathbf{v}_i + m\mathbf{v}_e}{M + m}, \quad (8)$$

而 $\mathbf{v}_i$, $\mathbf{v}_e$ 分别为离子分量与电子分量的宏观运动速度; $\mathbf{j}$ 是背景等离子体中的电流密度; $\mathbf{v}_0$ 是等离子体片流的流速; $\mathbf{E}$, $\mathbf{h}$ 分别为波内的电场与磁场分量; $\hat{\sigma}$ 是背景等离子体中的电导率张量, 它有如下形式^[2]:

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & -\sigma_2 & 0 \\ \sigma_2 & \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

我们所用的模式简述如下: 在均匀的背景等离子体介质中流动着一股空间非均匀的等离子体片流, 而对应于这片流中的各物理量我们都以脚标 B 表示. 例如 ρ_B 则表示片流中的等离子体密度, 并以此类推.

在给出以上各式时, 我们作了以下几点假设: (i) 除电磁力, 碰撞阻力外, 忽略其他外力的影响; (ii) 我们所要讨论的是低频扰动, 因此可以忽略位移电流项; (iii) 存在沿 z 轴方向的固定磁场 $\mathbf{H}_0$, 而且其强度远大于扰动磁场 $\mathbf{h}$; (iv) 等离子体片流是完全电离并具有无限电导率的, 且以速度 $\mathbf{v}_0$ 沿磁场方向作定向匀速运动; (v) 背景等离子体也认为是完全电离的, 而且是均匀的; (vi) 各扰动量对时间的依赖关系为 $e^{i\omega t}$. 因认为在 z 方向上, 无论是背景等离子体介质或是等离子体片流都是均匀的, 因此各物理量中对坐标 z 的依赖关系可设为 e^{-ikz} , 这里 $k = 2\pi/\lambda$, 而 λ 定为给定的扰动尺度; (vii) 假定介质是准中性的.

在方程(1)–(7)中, 消除电场外的其他各量后, 可得

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}(\Delta \mathbf{E} - \text{grad div } \mathbf{E}) - \frac{4\pi i \omega}{c^2} \hat{\alpha} \hat{\pi} \hat{\sigma} \mathbf{E} \\ + \frac{\omega(\omega - v_0 k)}{V_{AB}^2} \left(\mathbf{E} - \frac{1}{i\omega} [\mathbf{v}_0 \text{rot } \mathbf{E}] \right) = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

其中算符 $\hat{\alpha}$, $\hat{\pi}$ 分别等于

$$\hat{\alpha} = \hat{I} - \hat{\theta}, \quad (11)$$

$$\hat{\pi} = \left(\hat{I} + \frac{4\pi V_A^2}{i\omega c^2} \hat{\sigma} \hat{\alpha} \right)^{-1}, \quad (12)$$

而

$$V_A = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi\rho}} \quad (13)$$

为在背景等离子体中的阿尔芬波速;

$$V_{AB} = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi\rho_B}} \quad (14)$$

为在等离子体流中的阿尔芬波速; $\boldsymbol{\tau}$ 为定磁场的单位方向矢量, 且有 $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}\{0, 0, 1\}$; $\hat{I}$ 为 Kronecker 符号; $\hat{\theta}$ 为 $\boldsymbol{\tau}$ 的并矢.

在一般情况下, 方程(10)很难求解, 但是对于外层空间的特定环境来说, 我们还可作进一步的简化假设. 由于磁层顶的曲率半径很大, 在某一局部区域, 可以假设等离子体流为一平面模型, 即只考虑一维不均匀的情况, 认为流内浓度的不均匀性只出现在垂直方向

上,并定此方向为坐标 y 轴的方向,而忽略沿磁层顶的水平向不均匀性. 其次,如果我们不讨论关于波的耗散问题,那么背景等离子体的电导率也可假设为无穷大. 从方程(4)中可看出,如果在定磁场方向上没有电流分量,则

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0. \quad (15)$$

这是产生横波的条件,而阿尔芬波则属于横波. 这样方程(10)就简化为

$$\frac{d^2 E}{dy^2} + \left(\frac{(\omega - v_0 k)^2}{V_{AB}^2(y)} + \frac{\omega^2}{V_A^2} - k^2 \right) E = 0, \quad (16)$$

其中 E 代表 E_x 或 E_y 的任意一分量. 方程(16)和量子力学中一维运动的波动方程相同,而在讨论电波在不均匀介质中传播问题时也曾遇到这类方程. 在给定的扰动尺度范围内,当介质的性质变化并不很大(即存在弱不均匀的情况),这类方程就有几何光学近似解,即电场分量 E 有下列形式^[6]

$$E = E_0 \exp \left(-i \int K(y) dy \right), \quad (17)$$

其中 E_0 为变量 y 变化缓慢的函数. 把上式代入方程(16),便得

$$\frac{(\omega - v_0 k)^2}{V_{AB}^2(y)} + \frac{\omega^2}{V_A^2} - \left(k^2 + K^2(y) + i \frac{dK(y)}{dy} \right) = 0. \quad (18)$$

将 $K(y)$ 及 ω 分为实部和虚部

$$K(y) = K_0(y) + iK_1(y) \quad (19)$$

及

$$\omega = \omega' + i\omega'', \quad (20)$$

并且有 $K_1/K_0 \ll 1$, $\omega''/\omega' \ll 1$. ω' 和 ω'' 分别为实数,而扰动增长率将由圆频率 ω 的虚部 ω'' 所决定.

把(19), (20)式代入方程(18),在忽略二级小量后,使方程的实部和虚部分别等于零,便得对应于 K_0 , K_1 的方程:

$$K_0^2 = \frac{(\omega' - v_0 k)^2}{V_{AB}^2(y)} + \frac{\omega'^2}{V_A^2} - k^2, \quad (21)$$

$$K_1 = \frac{1}{K_0} \left[\left(\frac{1}{V_{AB}^2(y)} + \frac{1}{V_A^2} \right) \omega' \omega'' - \frac{v_0 k}{V_{AB}^2(y)} \omega'' \right] - \frac{d \ln \sqrt{K_0}}{dy}, \quad (22)$$

在我们所讨论的区域内, K_0 一般不等于零,因为 $K_0 = 0$ 恰好是在均匀介质情况下等离子体流产生磁流不稳定性的色散方程^[2], 现在我们所要讨论的正是在不满足这一色散方程时的情况,也就是流速小于阿尔芬波速时的情况.

根据 Силин 的讨论, $K(y)$ 应满足类似于“玻耳量子化法则”的条件^[7]

$$\int K(y) dy = n\pi \quad (23)$$

或应有(设 L 为不均匀尺度)

$$\int_0^L K_0(y) dy = n\pi, \quad (24)$$

$$\int_0^L K_1(y) dy = 0. \quad (25)$$

这里的 n 是正整数,在我们所采用的“准经典”近似条件下,它只能取较大的值. 利用(24),

(25)式便能求得 ω' 和 ω'' 所可能有的值。

由于 ρ_B 是 y 变化缓慢的函数,对(24)式用中值定理求积,便得 ω' 的表达式为

$$\omega' = \frac{V_A^2}{\bar{V}_{AB}^2 + V_A^2} k v_0 \pm \sqrt{\left(\frac{V_A^2}{\bar{V}_{AB}^2 + V_A^2} k v_0\right)^2 + \frac{V_A^2}{\bar{V}_{AB}^2 + V_A^2} \left[\bar{V}_{AB}^2 \left(k^2 + \frac{n^2 \pi^2}{L^2}\right) - k^2 v_0^2\right]}, \quad (26)$$

其中 $\bar{V}_{AB}$ 表示等离子体片流中阿尔芬波速的平均值。取¹⁾

$$K_1(y) = 0, \quad (27)$$

这样从(22)式中就可求得扰动增长率 ω'' 的表达式:

$$\omega'' = \frac{1}{4} \left[\frac{(\omega' - k v_0)^2}{\bar{V}_{AB}^2} + \left(\frac{\omega'^2}{V_A^2} - k^2 \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \frac{(\omega' - k v_0)^2 \frac{df}{dy}}{\frac{V_A^2 + \bar{V}_{AB}^2}{V_A^2} \omega' - k v_0}, \quad (28)$$

这里 $f(y) = \rho_B / \bar{\rho}_B$, $\bar{\rho}_B$ 为等离子体片流中的平均密度。这样,原点就取在等离子体片流密度有其平均值处,因而 $f(0) = 1$ 。

流速 v_0 小于阿尔芬波速时,(28)式中的分母部分总大于零,因此从(28)式可以看到,如果等离子体片流中密度是坐标的单值下降函数时,例如有

$$f = \exp(-y/L), \quad (29)$$

这时 $\frac{df}{dy} < 0$, 则系统将是不稳定的,并且扰动增长率将正比于 $\frac{df}{dy}$, 即正比于等离子体片流中密度的梯度。

为了保证 ω' 为实数,在(26)式中,根式内的值必须大于零,这样便得条件

$$\sqrt{\bar{V}_{AB}^2 + V_A^2} \left(1 + \frac{n^2 \pi^2}{k^2 L^2} \right)^{1/2} > v_0. \quad (30)$$

这是能产生振幅随时间增长的扰动所加于数 n 的条件。

3. 取磁层外边界区域内的一些典型参数,根据所求得的公式,我们来估算一下 ω'' 的量级。例如取不均匀片流的不均匀尺度 $L \approx R_E$, R_E 为地球半径;波数 $k \approx 10^{-3}$ 1/公里; $n \approx 10$; 阿尔芬波速 $V_A \approx \bar{V}_{AB} \approx 10^3$ 公里/秒;而 $v_0 \approx 500$ 公里/秒。这样从(26)式中可求得 $T = 2\pi/\omega' \approx 1.3$ 秒,即相当周期有秒量级的磁脉动。再根据(28)式可得扰动增长时间为 $\tau = 2\pi/\omega'' \approx 3.3 \times 10^2$ 秒,即约为5分钟的量级,这和ATS-1卫星在磁层亚暴时所观测到的数据相符^[5]。当然以上数字只是粗略的估算,但不难看到,所得 T 和 τ 的值在量级上还是合理的。

总之,从上述分析中表明,在磁层外边界区域,除了其他类型的不稳定性机制外,磁流体不稳定性仍可作为解释产生地磁脉动的可能激发机制之一,但在磁层的其他区域相比,这时的等离子体片流中密度的不均匀性将起决定性的作用。

参 考 文 献

- [1] В. П. Докучаев Астр. ж. **39** (1962), 1009.
- [2] 石长和, 物理学报, **21** (1965), 1700.

1) 显然在这里我们应用了“定域近似”的限制,即在整个积分区间内,总能找到一点 y^* , 在此点上满足(27)式。也就是说,随时间增长的扰动波包是带有定域性的。详见文献[8]中的§4。

-
- [3] D. Orr, *J. Atm. Terr. Phys.*, **35** (1973), 1.
[4] R. K. Burton, C. T. Russell, C. D. Chappell, *J. Geophys. Res.*, **75** (1970), 5582.
[5] О. М., Пубовкин Н. Г., Распопов, Н. Г., Клейменова Возмущения электромагнитного поля Земли, 2 (1976).
[6] V. L. Ginzburg, *The Propagation of Electromagnetic Waves in Plasma* (1970).
[7] В. П. Силин., *ЖЭТФ*, **44** (1963), 1271.
[8] А. Б. Михайловский, *Вопросы теории плазмы*, Вып. 3 (1963).

MAGNETOHYDRODYNAMIC INSTABILITY OF A NONHOMOGENEOUS PLASMA LAMINAR STREAM

SHI CHANG-HE

(Department of Geophysics, Beijing University)