第 28 卷 第 3 期 物 理 学 报 Vol. 28, No. 3
1979 年 5 月 ACTA PHYSICA SINICA May, 1979

关于广义线性相干光处理系统的讨论*

詹 达 三
(中国科学院物理研究所)

提 要

本文讨论了文献[1]和[2]所提出的广义线性系统[1)]的性质，并指出对于这一系统，存在与它等效的系统．此外，进而证明了模片(mask)之间的间距 z_1 不是一个实质性的参量．

一

任何光学系统在某种程度上都不是空间不变的，如果对系统作适当的限制的话[3]，在许多情况下空间不变性假定还是适用的．然而，一般说来，由于许多类型的问题的点扩展函数不是空间不变的，因此广义线性系统的研究是十分重要的．而线性不变系统可以看成是广义线性系统的特例[3]．这类广义线性系统的研究对于发掘光学处理系统的潜力具有十分重要的意义．至于广义线性系统对那一类变换核有效，目前尚难于作出有根据的判断[2]．本文的目的，只限于根据这类广义线性系统的特性，给出文献[1]和[2]中相应系统的等效系统，也许从物理上看，它更清楚一些．

我们讨论问题的出发点与文献[1]和[2]相同．我们所做基本假定是：(i) 系统的任何一个元件可用复数振幅透射函数来表示；(ii) 瑞利-索末菲积分在傍轴近似下化为费涅耳积分．大家都知道，自由空间的传播过程是空间不变的[5]，而平面上入射光场与模片函数的乘积运算是对应的傅里叶平面上的卷积运算，因此它们都可以在傅里叶光学的框架内加以处理．对于么正变换，这过程是能量守恒的[1,6]．但是，考虑到衍射的存在，严格地说任何现实的光学系统不可能是能量守恒的．然而，如果过程的损耗较小或是均匀的，它对于光学过程并不重要．既便是对么正变换，广义线性系统的变换核是否能任意逼近它，也不能说已被严格证明．

在下面各节的讨论中，我们将直接引用文献[2]的表达式．第二节中我们对广义变换核的表达式进行分析，并指出文献[1]和[2]中的广义线性系统 A 可以用等效系统 B 来代替．在 B 系统中，很容易证明逆系统是存在的，而且比较直观．在第三节中，我们可以证明，系统 B 中的透镜焦距可以化为用等焦距的等效系统 C 来代替，此时只要对系统 B 中的模片函数作适当的变量变换即可．第四节中，我们对结果作一些讨论．

---

* 1978 年 3 月 8 日收到．

1) 为简明起见，文中广义线性相干光处理系统简称为广义线性系统．

二

文献[1]和[2]给出的广义线性系统如图1所示．如果系统的输入用 $e_1(x_1, y_1)$ 来表

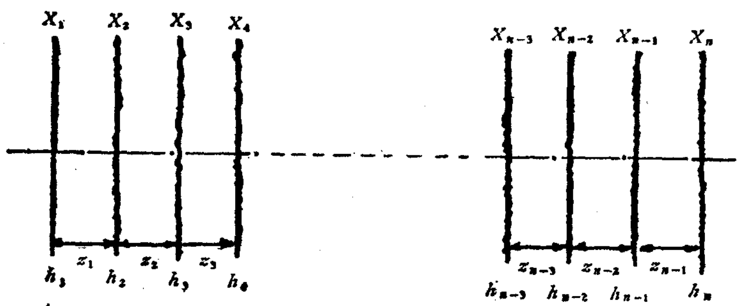

图1　一个 n 平面的广义线性相干光处理系统(系统 A)

示，而用 $e_n(x_n, y_n)$ 表示输出平面后的光场．那么，用文献[1]和[2]中给出的表达式，在傍轴近似条件下，$e_n(x_n, y_n)$ 与 $e_1(x_1, y_1)$ 之间的关系如下：

$$
\begin{aligned}
e_n(x_n,y_n) = \iint_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int e_1(x_1,y_1)\Big\{&h_1(x_1, y_1)\phi(x_1, y_1;s_1)h_n(x_n, y_n)\phi(x_n, y_n;s_n)\\
&\times\left[\prod_{l=1}^{n-1}(j\lambda z_l)^{-1}\exp(ikz_l)\right]\times\left[\prod_{m=2}^{n-1}h_m(x_m, y_m)\phi(x_m, y_m;s_{m-1}+s_m)\right]\\
&\times\prod_{p=1}^{n-1}\exp[-js_pk(x_px_{p+1}+y_py_{p+1})]dx_2dy_2\cdots dx_{n-1}dy_{n-1}\Big\}dx_1dy_1,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

其中

$$
\phi(x,y;s_l)\equiv\exp\left[j\frac{k}{2}s_l(x^2+y^2)\right],\quad s_l=z_l^{-1}. \tag{2}
$$

由于常数衰减因子和常数位相因子对于最后的结果并不产生任何带实质性的影响，因此可以略去(以后对于等式都作这样的理解)．于是(1)式可写为

$$
\begin{aligned}
e_n(x_n, y_n) = \iint_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int e_1(x_1, y_1)\Big\{&h_1(x_1, y_1)\phi(x_1, y_1; s_1)h_n(x_n, y_n)\phi(x_n, y_n; s_n)\\
&\times\left[\prod_{m=2}^{n-1}h_m(x_m, y_m)\phi(x_m, y_m; s_{m-1}+s_m)\right]\\
&\times\prod_{p=1}^{n-1}\exp[-js_pk(x_px_{p+1}+y_py_{p+1})]\,dx_2dy_2\cdots dx_{n-1}dy_{n-1}\Big\}dx_1dy_1.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

如果注意到，$h_i(x_i, y_i)$ $(i=1, 2, \cdots n)$ 是待定函数，而 $\phi(x_i, y_i; s_i)$ 是自由空间传播函数在傍轴近似下引入的二次位相因子．当 s_i 给定后，ϕ_i 是已知函数．所以可以定义函数 $H_i(x_i, y_i)$ 为

$$
H_i(x_i, y_i) = h_i(x_i, y_i)\phi(x_i, y_i;s_{i-1}+s_i)\quad (i\neq 1, n), \tag{4a}
$$

$$
H_1(x_1, y_1) = h_1(x_1, y_1)\phi(x_1, y_1;s_1), \tag{4b}
$$

$$H_n(x_n, y_n) = h_n(x_n, y_n)\phi(x_n, y_n; s_n). \tag{4c}$$

那么 H_i 是待定函数，一旦 H_i 知道了，可求出 $h_i(x_i, y_i)$. 因此，用(4)式可把(3)式改写为

$$e_n(x_n, y_n) = \iint_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int e_1(x_1, y_1)\Big\{H_1(x_1, y_1)H_m(x_n, y_n)\prod_{m=2}^{n-1}[H_m(x_m, y_m)] \times \prod_{p=1}^{n-1}\exp[-js_pk(x_px_{p+1} + y_py_{p+1})]dx_2dy_2\cdots dy_{n-1}dy_{n-1}\Big\}dx_1dy_1. \tag{5}$$

为了看清(5)式所代表的系统，我们把(5)式改写成

$$\begin{aligned} e_n(x_n, y_n) = \iint_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int &\{e_1(x_1, y_1)H_1(x_1, y_1)\exp[-js_1k(x_1x_2 + y_1y_2)] \\ &\times H_2(x_2, y_2)\exp[-js_2k(x_2x_3 + y_2y_3)] \times H_3(x_3, y_3)\exp[-js_3k(x_3x_4 + y_3y_4)] \\ &\times \cdots\cdots \times H_{n-2}(x_{n-2}, y_{n-2})\exp[-js_{n-2}k(x_{n-2}x_{n-1} + y_{n-2}y_{n-1})] \\ &\times H_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1})\exp[-js_{n-1}k(x_{n-1}x_n + y_{n-1}y_n)]\}dx_1dy_1dx_2dy_2 \\ &\cdots dx_{n-1}dy_{n-1}\cdot H_n(x_n, y_n) \end{aligned} \tag{5a}$$

从 (5a) 式可知，它是图 2 所示的广义线性系统的数学表达式. 当然系统 B 的长度比系统

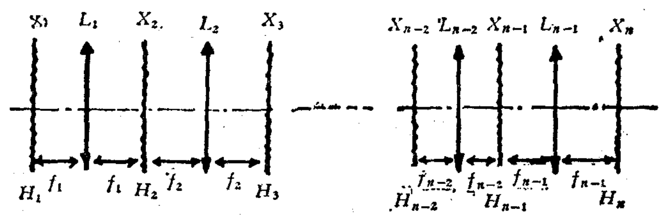

图 2　与系统 A 等效的广义线性相干光处理系统(系统 B)

A 大一倍. 图 2 中 $f_m = z_m$，它是透镜 L_m 的焦距. 这就表明由图 1 所示的系统可以完全用图 2 的系统来替代. 这样做的时候只要在相应的平面上把系统 A 的 h_i 换成 H_i 就可以了. 因此在系统 B 中待求模片函数为 H_i 而不再是 A 系统中的 h_i 了.

此外(5a)式可写成

$$e_n(x_n, y_n) = \iint_{-\infty}^{+\infty} e_1(x_1, y_1)G_n(x_1, y_1; x_n, y_n)dx_1dy_1, \tag{6}$$

其中 $G_n(x_1, y_1; x_n, y_n)$ 的表达式为

$$G_n(x_1, y_1; x_n, y_n) = H_1(x_1, y_1)\iint_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int\Big\{\Big[\prod_{m=2}^{n-1} H_m(x_m, y_m)\Big] \times \Big[\prod_{p=1}^{n-1}\exp(-js_pk(x_px_{p+1} + y_py_{p+1})\Big] \times dx_2dy_2\cdots dx_{n-1}dy_{n-1}\Big\}H_n(x_n, y_n). \tag{7}$$

从图 2 可以十分清楚看出，广义线性系统的特点是由乘积运算和傅里叶变换来实现的. 这两个条件也许是我们现在讨论的广义线性系统所可能受到的最主要和最本质的限制. 下面我们将证明图 2 的系统存在逆系统是十分显然的；其次，我们将证明系统 B 可以进一步化为等焦距的透镜组成的广义线性系统.

三

1）由于系统 A 的子过程是空间不变的，因此逆系统必定存在，但是这一点在系统 A 中也容易证明，但并不是一目了然的．但是，如果从等效系统 B 出发，则十分容易看出逆系统存在[1)]，如图 3 所示，图 3 中的 H_i^{-1} 是 H_i 的逆[2)]．

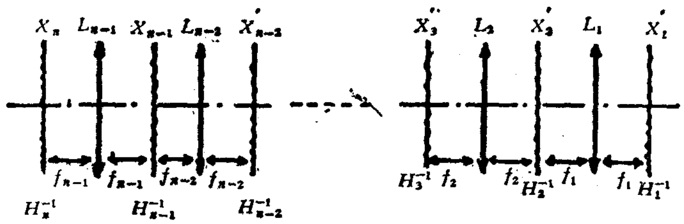

图 3　系统 B 的逆系统 C

因此，在系统 B 中分析广义线性系统的性质，也许从物理上看是更清楚些．由于它十分直观，我们不打算给出具体的证明步骤，而只是稍作说明．当光场分布 $e_n(x'_n, y'_n)$ 投射到 x'_n 平面上，透过模片 H_n^{-1} 后的光场分布正好是图 2 中 x_{n-1} 平面后的光场分布的傅里叶变换式；经过透镜 L_{n-1} 进行傅里叶变换后，投射到 x'_{n-1} 平面上，透过模片 H_{n-1}^{-1} 后的出射光场，正好等于图 2 中透过 x_{n-2} 平面的光场的傅里叶变换式，…余此类推．那么，最后透过 x'_1 平面的输出光场正好就是 $e(x_1, y_1)$．从这个证明，进一步说明了文献[1]和[2]所讨论的广义线性系统的主要运算是乘积（或卷积）和傅里叶变换，这是逆系统必定存在的根本原因．应当指出，H_i 不必是么模函数．

2）从图 2 中大家都看到，透镜的焦距是互不相同的，也就是说 z_l 并不一定都是相等的．那么人们自然要问，模片之间的间距是否具有根本的意义？换句话说，假定已知某个广义线性变换可以用 n 个模片的系统在某种意义上实现，那么最优解的存在与 z_l 是否有关？这个问题的回答具有重要的实际意义．我们将通过对系统 B 的分析，对这个问题作出答复．

可以证明，系统 B 完全可以用等焦距的透镜来替代各个透镜，此时只需对模片函数 $H_i(x_i, y_i)$ 中的变量作适当的变换来得到．为了方便起见，我们假定所有透镜的焦距都取为 $f_1 = s_1^{-1}$．作如下的坐标变换：

$$x'_p = c_p x_p \qquad (p \neq 1, 2), \tag{8a}$$

其中

$$c_p = \begin{cases} A_{2l} = \left(\dfrac{s_3}{s_2}\right)\left(\dfrac{s_5}{s_4}\right)\cdots\left(\dfrac{s_{2l-1}}{s_{2l-2}}\right) & 当\ p = 2l \quad (l \neq 1); \\ B_{2l+1} = \left(\dfrac{s_2}{s_1}\right)\left(\dfrac{s_4}{s_3}\right)\cdots\left(\dfrac{s_{2l}}{s_{2l-1}}\right) & 当\ p = 2l+1 \quad (l \neq 1). \end{cases} \tag{8b}$$

1）透镜的傅里叶变换及其逆变换是相同的，因此对逆系统的坐标取向要考虑到这个因素．我们假定已经考虑到了这一性质．其实，我们不妨就认为透镜可以实现真实的逆变换，对结果也不会有实际的影响．

2）我们假定 H_i^{-1} 存在．

而对于 $p=1, 2$，有

$$x_1' = x_1,\ x_2' = x_2. \tag{8c}$$

对于 y_i 也有完全类似的式子．在作了这样的坐标变换(8)式之后，系统 B 变为图4所示

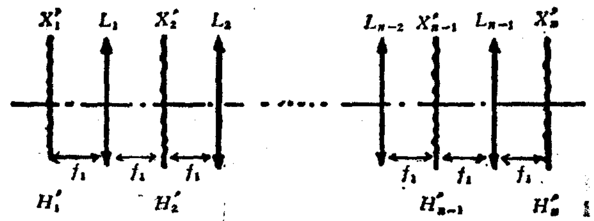

图4 由包含等焦距透镜组成的等效广义线性系统 C

的系统 C．在系统 C 中所有的模片函数 $H_n'(x_n')$ 按顺序分别放置在透镜的前后焦面上(与系统 B 相同)，而且各透镜的焦面分别互相重合．$H_n'(x_n')$ 与 $H_n(x_n')$ 的关系如下

$$H_1'(x_1', y_1') = H_1(x_1', y_1'), \tag{9a}$$

$$H_2'(x_2', y_2') = H_2(x_2', y_2'), \tag{9b}$$

$$H_n'(x_n', y_n') = H_n\left(\frac{x_n'}{c_n}, \frac{y_n'}{c_n}\right) \quad (n \neq 1,2). \tag{9c}$$

那么，可以证明这时系统 C 的 $G_n'(x_1', y_1'; x_n', y_n')$ 为

$$G_n'(x_1', y_1'; x_n', y_n') = c_0 G_n\left(x_1', y_1'; \frac{x_n'}{c_n}, \frac{y_n'}{c_n}\right). \tag{10}$$

所以系统 C 的输出 $e_n'(x_n', y_n')$ 为

$$\begin{aligned} e_n'(x_n', y_n') &= \iint_{-\infty}^{+\infty} e_1(x_1', y_1') G_n'(x_1', y_1'; x_n', y_n') dx_1' dy_1' \\ &= \iint e_1(x_1', y_1') G_n(x_1', y_1'; x_n'/c_n, y_n'/c_n) dx_1' dy_1'. \end{aligned} \tag{11}$$

由(6)式可知

$$e_n'(x_n', y_n') = e_n\left(\frac{x_n'}{c_n}, \frac{y_n'}{c_n}\right). \tag{12}$$

因此，从(12)式可知，对于系统 C 的输出为 $e_n(x_n'/c_n, y_n'/c_n)$，它只不过是系统 A(或 B)输出图象的放大或缩小，而这一点对于我们是不重要的．因此我们的结论是，在给定的条件下，理论上并不存在最优的模片之间的间距选择的问题． 各种可能的选择在理论上应当是等效的，对于各种选择 H_i 当然是不同的．

四

从前面的讨论中，我们可以十分明显地看到，本文所讨论的广义线性变换是由空间不变的子系统序列构成的．此类广义线性系统的基本运算是乘积运算和傅里叶变换运算．虽然在原系统中作了傍轴近似，但是由于自由空间传播是空间不变的，因此即使不做傍轴近似，估计也应当有类似的等效系统与原系统相对应． 只不过是，这时的等效系统会变得复

杂一些，但其基本运算仍然不变．其次，在等效系统中，我们可以非常直观地看出逆变换是存在的．第三，对于么正变换，它表明过程是能量守恒的，因而是可逆的．但是从前面的分析中，我们可以十分明显地看到，广义线性变换是由它的各个不变子系统综合得出的．对于逆变换存在的证明中根本没有涉及能量是否应当守恒的问题[1]，也就是说并不要求 H_i 是么模函数，而空间不变的线性相干光系统也不要求滤波函数是纯位相型的．因此一般地说，目前我们所讨论的广义线性系统不必限于只讨论么正变换．原则上可以推广到一般广义线性变换．当然，相应模片的设计问题尚需进一步研究．第四，从理论上来说，在傍轴近似下，模片之间的间距的选择存在任意性，对广义线性变换不会带来实质性的影响．因此针对实际问题可作任意选择不会影响结果．第五，所有上述讨论中没有考虑到现实光学系统中存在的有限孔径的截断效应，因此在讨论具体问题时必须加以考虑．

参　考　文　献

[1] 霍裕平、杨国桢、顾本源，物理学报，**24** (1975)，438.
[2] F. Paul Carlson, *Proc. IEEE*, **65**(1) (1977), 10.
[3] 参看文献[1]的实例讨论.
[4] J. W. 顾德门，傅里叶光学导论，科学出版社 (1976)，第 21 页.
[5] 见文献[3]中，第 60 页.
[6] H. J. Butterwek, *J. Opt. Soc. Am.*, **67**(1) (1977), 60.

A DISCUSSION ON THE GENERALIZED LINEAR COHERENT OPTICAL-PROCESSING SYSTEM

ZHAN DA-SAN

(*Institute of Physics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

In this article, we discuss the properties of the generalized linear coherent optical-processing system proposed in [1] and [2], and show that the equivalent system exists. We further show that the parameter z_i is of little importance.

1) 只要 H_i^{-1} 存在.