

自发辐射的线宽与原子能级移位*

邓 从 豪

(山东大学光学系)

提 要

在本文中,我们对二能级原子的自发辐射问题进行了讨论。我们用原子自发辐射的实际场代替自由场同原子相互作用,并由自治的条件计算谱线的线宽与原子能级的移位。计算方法也不同于前人的方法。计算的能级移位不出现发散的困难。

一、引 言

Weisskopf 与 Wigner^[1] 最早从唯象理论出发研究了二能级原子自发辐射的线宽。之后,不少工作者由量子光学理论研究了这个问题^[2]。Stenholm^[3] 与 Milonni^[4] 把前人的工作做了综合,给出了线宽与原子能级移位的表达式。但是前人的工作都把辐射场认为是自由场。因此,得到的能级移位的表达式是三次方发散的,经过消除极化、真空极化及电子质量的重整化得到对数发散的原子能级移动表达式,取上截止能,才最后克服了发散的困难。我们对这个问题进行了研究。分析了原子自发辐射场,并给出了自发辐射场的算符表达式。由此辐射场及自协的条件再计算了自发辐射的线宽与能级移位。我们的计算方法与前人的不同。我们计算得到的能级移位是有限的,并且不出现发散困难。

光子场是由原子(或分子)发射的。其它的粒子场也都是由另一种粒子发射的。所有发射粒子场的粒子,同发射光子场的原子相类似,都有一定的寿命。因此,我们相信克服光子场发散的问题将为目的理论中存在的发散困难提供一种可能的克服途径。

二、自发辐射场的算符

我们讨论二能级原子的自发辐射问题。前人在讨论这个问题时,都认为同原子相互作用的是自由场,其矢量势算符为

$$\mathbf{A} = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \left(\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{\frac{1}{2}} (\eta_{\mathbf{k}\lambda} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \boldsymbol{\epsilon}_{\lambda} + \eta_{\mathbf{k}\lambda}^{\dagger} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \boldsymbol{\epsilon}_{\lambda}), \quad (1)$$

式中 V 为场分布的体积, $\boldsymbol{\epsilon}_{\lambda}$ 为场的 λ 偏振的单位矢量, $\eta_{\mathbf{k}\lambda}$, $\eta_{\mathbf{k}\lambda}^{\dagger}$ 分别为波矢为 $\mathbf{k}$, 偏振为 λ 的场粒子的湮灭与产生算符。由此得到场的能量算符为

$$H_f = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \hbar\omega_{\mathbf{k}} \eta_{\mathbf{k}\lambda}^{\dagger} \eta_{\mathbf{k}\lambda}. \quad (2)$$

* 1977年6月17日收到; 1978年10月20日收到修改稿。

这里省略了真空场的自能。忽略场的二次幂的作用,场同原子的相互作用可以写为

$$H_I = -\frac{e}{mc} \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}, \quad (3)$$

$\mathbf{P}$ 为电子的动量,其算符表示式为

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_{ba} a^\dagger b, \quad (4)$$

$a^\dagger$ 为原子 a 能态的产生算符, b 为原子上能态的湮灭算符。矩阵元 $\mathbf{p}_{ba}$ 为

$$\mathbf{p}_{ba} = i\omega_{ba} \frac{m}{e} \boldsymbol{\mu}_{ba}, \quad (5)$$

ω_{ba} 为在原子 a, b 二能态间跃迁的玻尔圆频率, $\boldsymbol{\mu}_{ba}$ 为跃迁电偶矩。将 (5) 式代入 (3) 式并取旋转波近似,可得

$$H_I = \sum_{\kappa\lambda} (g_{\kappa\lambda} b^\dagger a \eta_{\kappa\lambda} + g_{\kappa\lambda}^* a^\dagger b \eta_{\kappa\lambda}^*), \quad (6)$$

耦合常数 $g_{\kappa\lambda}$ 的表达式为

$$g_{\kappa\lambda} = \left(\frac{2\pi\hbar}{V\omega_\kappa} \right)^{\frac{1}{2}} \omega_{ba} (\boldsymbol{\epsilon}_\lambda \cdot \boldsymbol{\mu}_{ba}) e^{+i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}. \quad (7)$$

由 (1) 式所表示的自由场,其总能量 (2) 式是无穷大的。辐射场既然是由原子(或分子)发射的,除非发射的系统是无穷多,否则辐射场的总能量为无穷大是难于理解的。

我们认为,自发辐射场不是如 (1) 式所表示的自由场,因为原子自发辐射是一种衰减振荡。这种衰减振荡联系的电场强为^[5]

$$\mathbf{E}_- = \mathbf{E}_0 \exp\left(-i\omega_0 t - \frac{r}{2} t\right),$$

其中 ω_0 为峰值频率, r 为谱线的全线宽。将上式按频率解谱得到

$$\mathbf{E}_- = \mathbf{E}_0 \exp\left(-i\omega_0 t - \frac{r}{2} t\right) = \frac{i\mathbf{E}_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t} d\omega}{(\omega - \omega_0) + \frac{ir}{2}}. \quad (8a)$$

同理可得

$$\mathbf{E}_+ = \mathbf{E}_0 \exp\left(i\omega_0 t - \frac{r}{2} t\right) = -\frac{i\mathbf{E}_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t} d\omega}{(\omega - \omega_0) - \frac{ir}{2}}. \quad (8b)$$

因此可以写

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_-}{2i} \\ &= -\frac{\mathbf{E}_0}{4\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t} d\omega}{(\omega - \omega_0) + \left(\frac{ir}{2}\right)} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t} d\omega}{(\omega - \omega_0) - \left(\frac{ir}{2}\right)} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

假设发射原子不止一个,并且置于球形容器中,则辐射为球面波。在离原点为 R 处的时间 t_R 为延迟时间

$$t_R = t - \frac{R}{c}.$$

(9) 式应写为

$$\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{E}'_0}{(4\pi)^{3/2}R} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t} d\omega}{(\omega - \omega_0) + \left(\frac{ir}{2}\right)} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t} d\omega}{(\omega - \omega_0) - \left(\frac{ir}{2}\right)} \right). \quad (10)$$

经过长时间, 全部原子均已发出辐射, 辐射分布在大的空间中. 由(10)式可以算得总辐射能为

$$\int \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}}{4\pi} dV = \frac{c E_0'^2}{8\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2}. \quad (11)$$

此处已忽略了 ω 自 $-\infty \rightarrow 0$ 的部分, 因为它很小. (10)式表明场算符应具有如下的形式:

$$A_{\mu} = \sum_{n\lambda} A_{\omega} e_{\lambda\mu} \left\{ \frac{b_{n\lambda} e^{ikx}}{(\omega - \omega_0) + \frac{ir}{2}} + \frac{b_{n\lambda}^* e^{-ikx}}{(\omega - \omega_0) - \frac{ir}{2}} \right\}, \quad (12)$$

式中各量的意义见文献[6], $kx = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t$. A_{ω} 为 ω 的函数, 需选择函数形式使由(12)式计算的场能具有如(11)式的表示式. 设场分布的体积为 V , 则由(12)式得到的总场能算符为

$$\begin{aligned} \int d^3x \mathcal{H} &= \int \frac{d^3x}{2c} \left\{ c^2 \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x_i} \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x_i} + \pi_{\mu} \pi_{\mu} \right\} \\ &= \sum_{n\lambda} \frac{2V\omega^2 A_{\omega}^2}{c^2} \times \frac{\left(n_{\lambda} + \frac{1}{2}\right)}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2}. \end{aligned} \quad (13)$$

对于球面发射, n_{λ} 只同 ω 有关, 同 $\mathbf{k}$ 的方向无关, 上式可以写成

$$\frac{8\pi V^2}{c^2 (2\pi c)^3} \sum_{\lambda} \int_0^{\infty} \frac{\omega^4 A_{\omega}^2 d\omega}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2} \left(n_{\omega\lambda} + \frac{1}{2}\right). \quad (14)$$

显然, 总场能正比于发射辐射的原子数, 可以写为

$$A_{\omega} = \sqrt{\frac{N_0}{V^2} \frac{A_0 c}{\omega^2}},$$

N 为发射辐射的原子数. 记原子数密度 $N/V = n$, 则

$$A_{\omega} = \frac{A_0 c}{\omega^2} \sqrt{\frac{n}{V}}, \quad (15)$$

A_0 为与 ω 无关的数. 将(15)式代入(14)式, 则总场能具有如(11)式的表示式.

把总场能算符(13)式写成

$$H_f = \sum_{n\lambda} P_{\omega} \left(n_{\lambda} + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega, \quad (16)$$

则有

$$P_{\omega} = \frac{2nA_0^2}{\hbar \omega^5 \left[(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 \right]}. \quad (17)$$

(16)与(17)式说明在实际的辐射场中, 高频率的场量子出现的几率是迅速减少的, 这同

(2) 式所表示的自由场是迥然不同的。将 (15) 式代入 (12) 式得到场算符为

$$A_{\mu} = \sum_{\kappa\lambda} \frac{A_0 c}{\omega^2} \sqrt{\frac{n}{V}} e_{\lambda\mu} \left\{ \frac{b_{\kappa\lambda} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{(\omega - \omega_0) + \frac{ir}{2}} + \frac{b_{\kappa\lambda}^* e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{(\omega - \omega_0) - \frac{ir}{2}} \right\}. \quad (18)$$

记偶极子的动量矩阵元 $\mathbf{p}_{ba}$ 为

$$\mathbf{p}_{ba} = i\omega \left(\frac{m}{e} \right) \boldsymbol{\mu}_{ba}, \quad (19)$$

ω 为偶极子的发射频率, 即场的频率。又记原子同辐射场相互作用的哈密顿量 H_I 为

$$H_I = \sum_{\kappa\lambda} (g_{\kappa\lambda} b^+ a \eta_{\kappa\lambda} + g_{\kappa\lambda}^* a^+ b \eta_{\kappa\lambda}^*). \quad (20)$$

由 (18), (19) 及 (3) 式, 可得

$$g_{\kappa\lambda} = -i \sqrt{\frac{n}{V}} \frac{A_0 (\boldsymbol{\epsilon}_{\lambda} \cdot \boldsymbol{\mu}_{ba}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{\omega \left[(\omega - \omega_0) + \frac{ir}{2} \right]}, \quad (21a)$$

$$g_{\kappa\lambda}^* = i \sqrt{\frac{n}{V}} \frac{A_0 (\boldsymbol{\epsilon}_{\lambda} \cdot \boldsymbol{\mu}_{ba}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{\omega \left[(\omega - \omega_0) - \frac{ir}{2} \right]}. \quad (21b)$$

在上面由经典场能的表达式, 我们得到了 $A_{\omega} \propto \omega^{-2}$, 但没有全部地推导 A_{ω} 的表示式, 宁愿保留 A_0 作为由实验待定的参数。因为全部由经典表示式推导的可靠性尚须考虑。以后我们将在原子范围内计算, 在此情况下, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} \ll 1$, 因而 $e^{\pm i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \doteq 1$, 而且 n 约等于原子体积的倒数, 是一个常数, 因此, 我们把 n 吸收到 A_0^2 中去。

三、二能级原子自发辐射的公式化推导

我们由薛定谔图象讨论二能级原子的自发辐射。哈密顿量为

$$H = H_a + H_f + H_I,$$

其中 H_a 为原子的哈密顿量, H_f 为场的哈密顿量, H_I 为相互作用量。用算符表示, 哈密顿量为

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \hbar\omega_a a^+ a + \hbar\omega_b b^+ b + \sum_{\kappa\lambda} P_{\omega_{\kappa}} \hbar\omega_{\kappa} \eta_{\kappa\lambda}^+ \eta_{\kappa\lambda} \\ & + \sum_{\kappa\lambda} (g_{\kappa\lambda} b^+ a \eta_{\kappa\lambda} + g_{\kappa\lambda}^* a^+ b \eta_{\kappa\lambda}^*), \end{aligned} \quad (22)$$

式中的 $\hbar\omega_a$ 和 $\hbar\omega_b$ 分别为原子 a 能态和 b 能态的能量。其它各符号的意义同前。

设 b 能态为原子的上能态。在辐射场中, 辐射场同原子上能态没有相互作用的波矢记为

$$|\psi_b\rangle = |b\rangle \prod_{\kappa\lambda} |n_{\kappa\lambda}\rangle, \quad (23a)$$

原子在下能态 a 并同辐射场没有相互作用的波矢记为

$$|\psi_{a\kappa\lambda}\rangle = |a\rangle|n_{\kappa\lambda} + 1\rangle \prod_{\kappa'\lambda' \neq \kappa\lambda} |n_{\kappa'\lambda'}\rangle, \quad (23b)$$

原子同辐射相互作用的波矢记为

$$|\phi\rangle = \rho_b |\phi_b\rangle + \sum_{\kappa\lambda} \rho_{a\kappa\lambda} |\phi_{a\kappa\lambda}\rangle. \quad (24)$$

由薛定谔方程

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\phi\rangle = \mathcal{H} |\phi\rangle \quad (25)$$

可以得到

$$i\dot{\rho}_b = Q_b \rho_b + \sum_{\kappa\lambda} \left(\frac{g_{\kappa\lambda}}{\hbar} \right) \sqrt{n_{\kappa\lambda} + 1} \rho_{a\kappa\lambda}, \quad (26a)$$

$$i\dot{\rho}_{a\kappa\lambda} = Q_{a\kappa} \rho_{a\kappa\lambda} + \left(\frac{g_{\kappa\lambda}^*}{\hbar} \right) \sqrt{n_{\kappa\lambda} + 1} \rho_b, \quad (26b)$$

其中

$$Q_b = \omega_b + \sum_{\kappa\lambda} P_{\omega_{\kappa}} n_{\kappa\lambda} \omega_{\kappa}, \quad (27a)$$

$$Q_{a\kappa} = \omega_a + \sum_{\kappa'\lambda'} P_{\omega_{\kappa'}} n_{\kappa'\lambda'} \omega_{\kappa'} + P_{\omega_{\kappa}} \omega_{\kappa}. \quad (27b)$$

记

$$\rho_b(t) = \underline{\rho}_b(t) e^{-iQ_b t}, \quad (28a)$$

$$\rho_{a\kappa\lambda}(t) = \underline{\rho}_{a\kappa\lambda}(t) e^{-iQ_{a\kappa} t}, \quad (28b)$$

则 (26a), (26b) 式化为

$$i\dot{\underline{\rho}}_b(t) = \sum_{\kappa\lambda} \left(\frac{g_{\kappa\lambda}}{\hbar} \right) \sqrt{n_{\kappa\lambda} + 1} e^{i\Delta_{\kappa} t} \underline{\rho}_{a\kappa\lambda}(t), \quad (29a)$$

$$i\dot{\underline{\rho}}_{a\kappa\lambda}(t) = \left(\frac{g_{\kappa\lambda}^*}{\hbar} \right) \sqrt{n_{\kappa\lambda} + 1} e^{-i\Delta_{\kappa} t} \underline{\rho}_b(t), \quad (29b)$$

其中 Δ_{κ} 为

$$\Delta_{\kappa} = Q_b - Q_{a\kappa} = \omega_{ba} - \omega_{\kappa} P_{\omega_{\kappa}}. \quad (30)$$

在我们讨论的问题中, 时间 t 总是正的 (即 $t \geq 0$). 几率振幅 $\rho_b(t)$ 与 $\rho_{a\kappa\lambda}(t)$, 因而 $\underline{\rho}_b(t)$ 与 $\underline{\rho}_{a\kappa\lambda}(t)$ 都是时间的连续函数, 并且随时间的增加不比指数函数增加得更快. 因此可以将它们用拉普拉斯变换展开,

$$\underline{\rho}_b(t) = \frac{1}{2\pi i} \int \underline{\rho}_b(z) e^{zt} dz, \quad (31a)$$

$$\underline{\rho}_{a\kappa\lambda}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int \underline{\rho}_{a\kappa\lambda}(z_1) e^{z_1 t} dz_1, \quad (31b')$$

记 $z_1 = z - i\Delta_{\kappa}$, 则

$$\underline{\rho}_{a\kappa\lambda}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int \underline{\rho}_{a\kappa\lambda}(z - i\Delta_{\kappa}) e^{i(z - i\Delta_{\kappa})t} dz. \quad (31b)$$

将 (31a) 与 (31b) 式代入 (29b) 式得到

$$(iz + \Delta_{\kappa}) \underline{\rho}_{a\kappa\lambda}(z - i\Delta_{\kappa}) = \left(\frac{g_{\kappa\lambda}^*}{\hbar} \right) \sqrt{n_{\kappa\lambda} + 1} \underline{\rho}_b(z)$$

或

$$\rho_{a\kappa l}(z - i\Delta_\kappa) = \frac{\left(\frac{g_{\kappa l}^*}{\hbar}\right) \sqrt{(n_{\kappa l} + 1)} \rho_b(z)}{\Delta_\kappa + iz}. \quad (32)$$

将 (31a) 与 (31b) 式代入 (29a) 式, 因为 $\rho_b(t=0) = 1$, 利用 (32) 式可得

$$i(z\rho_b(z) - 1) = \sum_{\kappa l} \left| \frac{g_{\kappa l}}{\hbar} \right|^2 (n_{\kappa l} + 1) \frac{\rho_b(z)}{\Delta_\kappa + iz}.$$

记 $Z = iz$, 上式可以写成

$$\rho_b(-iZ) \left(Z - \sum_{\kappa l} \left| \frac{g_{\kappa l}}{\hbar} \right|^2 \frac{n_{\kappa l} + 1}{\Delta_\kappa + Z} \right) = i$$

或

$$\rho_b(-iZ) = \frac{i}{Z - \sum_{\kappa l} \left| \frac{g_{\kappa l}}{\hbar} \right|^2 \frac{(n_{\kappa l} + 1)}{\Delta_\kappa + Z}}. \quad (33)$$

在后面我们将由 (33) 式与 (31a) 式计算谱线的线宽与能级移位.

四、谱线的半宽与能级移位

将 (33) 式改写成

$$\rho_b(-iZ) = i/(Z - Z_0), \quad (34)$$

则有

$$Z_0 = \sum_{\kappa l} \left| \frac{g_{\kappa l}}{\hbar} \right|^2 \frac{(n_{\kappa l} + 1)}{\Delta_\kappa + Z_0}. \quad (35)$$

对于纯自发辐射系统, $n_{\kappa l} = 0$. 因此, 在我们的讨论中,

$$Z_0 = \sum_{\kappa l} \left| \frac{g_{\kappa l}}{\hbar} \right|^2 \frac{1}{\Delta_\kappa + Z_0}. \quad (36)$$

由 (21a), (21b) 及 (30) 式, 上式可以写成

$$\begin{aligned} Z_0 &= \sum_l \int \frac{|\epsilon_l \cdot \mu_{ba}|^2}{2\hbar(2\pi c)^3} d\Omega \int_0^\infty \frac{(2A_0^2/\hbar)d\omega}{\left[(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2\right] (\omega_{ba} - \omega P_\omega + Z_0)} \\ &= PI, \end{aligned} \quad (37)$$

$$P = \sum_{l=1}^4 \int \frac{|\epsilon_l \cdot \mu_{ba}|^2 d\Omega}{2\hbar(2\pi c)^3} = \frac{|\mu_{ba}|^2}{3\hbar\pi^2 c^3}, \quad (38)$$

$$I = \int_0^\infty \frac{(2A_0^2/\hbar)d\omega}{\left[(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2\right] (\omega_{ba} + Z_0 - \omega P_\omega)}. \quad (39)$$

为了使因果关系得到保证并符合自协的要求, 必须有

$$Z_0 = \delta - \frac{i\gamma}{2}, \quad (40a)$$

$$\omega_0 = \omega_{ba} + \delta, \quad (40b)$$

δ 为能级移位, 因为 γ 比 ω_0 小很多, 在 (39) 式中, 我们忽略 γ , 并记

$$\beta^4 = \frac{2A_0^2}{\hbar\omega_0}. \quad (41)$$

利用 (17) 式关于 P_ω 的表示, 可以将 (39) 式写成

$$I = \beta^4 \int_0^\infty \frac{\omega^2 d\omega}{\omega^2 \left[(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{\gamma}{2} \right)^2 \right] - \beta^4}. \quad (42)$$

$(\gamma/2)$ 比 ω_0 小很多, 可以将 (42) 式的 $(\gamma/2)^2$ 忽略, 于是

$$I = \beta^4 \int_0^\infty \left(\frac{R_1}{\omega - \omega_1} + \frac{R_2}{\omega - \omega_2} + \frac{R_3}{\omega - \omega_3} + \frac{R_4}{\omega - \omega_4} \right) d\omega, \quad (43)$$

式中的 $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ 是 (42) 式分母的解,

$$\omega_1 = \frac{\omega_0 + \sqrt{\omega_0^2 + 4\beta^2}}{2}, \quad (43a)$$

$$\omega_2 = \frac{\omega_0 - \sqrt{\omega_0^2 + 4\beta^2}}{2}, \quad (43b)$$

$$\omega_3 = \frac{\omega_0 + \sqrt{\omega_0^2 - 4\beta^2}}{2}, \quad (43c)$$

$$\omega_4 = \frac{\omega_0 - \sqrt{\omega_0^2 - 4\beta^2}}{2}, \quad (43d)$$

$R_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 是以 ω_i 为极点的残数,

$$R_i = \omega_i^2 / \left[\prod_{j \neq i} (\omega_i - \omega_j) \right] \quad i, j = 1, 2, 3, 4; \quad (44)$$

并且有

$$\sum_{i=1}^4 R_i = 0. \quad (45)$$

由 (43) 式可知, $\omega_2 < 0$, 所以 ω_2 不是积分区间的极点. 因此, 若将极点换成 $-\omega_i - i\epsilon$, 则得

$$I = +\pi i \beta^4 (R_1 + R_3 + R_4) + \beta^4 \int_0^\infty \frac{R_2 d\omega}{\omega - \omega_2} + \beta^4 P \int_0^\infty \left(\frac{R_1}{\omega - \omega_1} + \frac{R_3}{\omega - \omega_3} + \frac{R_4}{\omega - \omega_4} \right) d\omega,$$

此处的 P 表示取主值. 利用 (45) 式可得

$$I = -\pi i \beta^4 R_2 - \beta^4 (R_1 \ln \omega_1 + R_2 \ln (-\omega_2) + R_3 \ln \omega_3 + R_4 \ln \omega_4).$$

设 $\beta^2 = \mu \omega_0^2$, $0 < \mu < 1/4$, 可得

$$\begin{aligned} \pi i \beta^4 R_2 &= +\pi i \frac{\omega_0^3 \mu (1 + 2\mu - \sqrt{1 + 4\mu})}{8\sqrt{1 + 4\mu}}, \\ &- \beta^4 (R_1 \ln \omega_1 + R_2 \ln (-\omega_2) + R_3 \ln \omega_3 + R_4 \ln \omega_4) \\ &= -\frac{\mu \omega_0^3}{16\sqrt{1 - 16\mu^2}} \left\{ (\sqrt{1 + 4\mu} - \sqrt{1 - 4\mu})^3 \ln \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4\mu}}{1 + \sqrt{1 + 4\mu}} \right) \right. \end{aligned} \quad (46)$$

$$+ (\sqrt{1+4\mu} + \sqrt{1-4\mu})^3 \ln \left(\frac{1+\sqrt{1+4\mu}}{1+\sqrt{1-4\mu}} \right) \}. \quad (47)$$

由(5), (37), (38)及(40a)式, 因为 δ 比 ω_{ba} 小很多, 可以将 ω_0 换成 ω_{ba} , 于是得到

$$\gamma = -\frac{1}{12\pi} \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right) \left(\frac{1}{mc} \right)^2 \frac{\mu(1+2\mu-\sqrt{1+4\mu})}{\sqrt{1+4\mu}} \omega_{ba} |P_{ba}|^2. \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \delta = & -\frac{1}{48\pi^2} \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right) \left(\frac{1}{mc} \right)^2 \omega_{ba} |P_{ba}|^2 \times \frac{\mu}{\sqrt{1-16\mu^2}} \\ & \times \left\{ (\sqrt{1+4\mu} - \sqrt{1-4\mu})^3 \ln \left(\frac{1-\sqrt{1-4\mu}}{1+\sqrt{1+4\mu}} \right) \right. \\ & \left. + (\sqrt{1+4\mu} + \sqrt{1-4\mu})^3 \ln \left(\frac{1+\sqrt{1+4\mu}}{1+\sqrt{1-4\mu}} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (49)$$

增补.

因为 μ 很小, (48) 与 (49) 式可以写为

$$\gamma = \frac{\mu^2}{3\pi} \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right) \left(\frac{1}{mc} \right)^2 \omega_{ba} |P_{ab}|^2, \quad (50)$$

$$\delta = -\frac{\mu^2}{3\pi^2} \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right) \left(\frac{1}{mc} \right)^2 \omega_{ba} |P_{ab}|^2. \quad (51)$$

Bethe^[7] 已经得到了兰姆移位的理论表示式, 他的表示式是对数发散的. 但他取上截止能后得到同实验非常符合的结果——1040 兆赫. Milonni^[4] 也给出了此表示式. 为了便于比较, 将(51)式写成

$$\delta = \xi \cdot \frac{2}{3\pi} \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right) \left(\frac{1}{mc} \right)^2 (E_a - E_b) |P_{ab}|^2 \ln \left| \frac{E_{\max}}{E_a - E_b} \right|. \quad (52)$$

此处的 ξ 为

$$\xi = \frac{\mu^2}{2\pi\hbar \ln \left| \frac{E_{\max}}{E_a - E_b} \right|}. \quad (53)$$

Bethe^[8] 取 $\ln$ 项为 7.7215. 因此, 为了同他的结果符合, 即 $\xi = 1$, 需取

$$\mu^2 = 7.7215(2\pi\hbar). \quad (54)$$

注意此处的 $\hbar$ 只取它的数值 (1.0543×10^{-27}) 不带有量纲, 因为 δ 是以赫为单位. 由此可见 μ^2 的确是微小的.

Stig Stenholm^[3] 已经给出了线宽的理论表示式. 但是 1) 他采用的单位和本文采用的不同, 他采用的是国际单位, 本文采用的是与 Milonni 的相同, 是 c. g. s. e. s. u 单位; 2) 本文假定场量子数 $n_E = 0$. 但是有两个偏振. Stenholm 只考虑了一个偏振; 3) 他的线宽 $\hbar\Gamma$ 是线半宽, 并且量纲与能量相同; 本文的线宽 γ 是全线宽, 并且量纲是 T^{-1} . 注意到这些差别, (50) 式可以写为,

$$\gamma = \eta \frac{16E^3}{3c^3\hbar^3} |P_{ab}|^2, \quad (55)$$

系数 η 为

$$\eta = \frac{\mu^2}{8 \cdot (2\pi\hbar)}. \quad (56)$$

(55) 式的除 η 以外的部分是 c. g. s. e. s. u 单位制下, 当场量子数 $n_E = 0$ 但场具有两个偏振时, Stenholm 的线全宽的表示式. 由 (54) 式可得

$$\eta = \frac{7.7215}{8} = 0.9652. \quad (57)$$

可见本文同 Stenholm 引用的理论结果符合很好.

上面的结果说明, 当选取 $\mu^2 = 5.1149 \times 10^{-26}$ 时, 本文同实验的氢原子的兰姆移位是符合的, 同由自由电磁场理论得到的谱线全宽也是一致的. 但本文的能级移位不会出现发散的困难.

五、结 论

由 (48a) 式可以看出, 当把相互作用的自由电磁场换成真实的自发辐射场, 并由自治的条件确定谱线的宽度 γ 与能级移位 δ 时, 计算并不出现发散的困难.

将自由电磁场换成真实的自发辐射场是符合客观实际又不违背理论要求的.

在经典场理论中, 场矢 $\mathbf{A}$ 要求满足麦克斯韦波方程, 库仑规范不变性及在边界上的周期性^[9]. 将 $\mathbf{A}$ 按平面波展开得到

$$\mathbf{A} = \sum_{\mathbf{k}} (q_{\mathbf{k}}(t)\mathbf{A}_{\mathbf{k}} + q_{\mathbf{k}}^*(t)\mathbf{A}_{\mathbf{k}}^*). \quad (58)$$

显然, 上面三个条件不能唯一确定 $\mathbf{A}$ 的展开式, 在 (58) 式中乘上与时空无关的函数 $f_{\mathbf{k}}$, 即

$$\mathbf{A} = \sum_{\mathbf{k}} \{f_{\mathbf{k}}q_{\mathbf{k}}(t)\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) + f_{\mathbf{k}}^*q_{\mathbf{k}}^*(t)\mathbf{A}_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r})\} \quad (59)$$

仍然满足上述条件. 由 (58) 式量子化得到自由电磁场的表示式 (1). (59) 式的 $f_{\mathbf{k}}$ 可以由发射电磁场的系统的性质决定. 本文的第二节就是决定 $f_{\mathbf{k}}$ 的形式, 结果得到它同发射系统的寿命、波尔圆频率有关. 由 (59) 式量子化得到场量 A_{μ} 的表示式 (18). 因为 (18) 式的 A_{μ} 是真实电磁场的算符, 即它从开始就同发射系统紧密地联系着. 换言之, 本文的光子不是自由光子, 可以称作准光子 (quasiphoton). 如果把它的能量记为 $\hbar\Omega_{\mathbf{k}} = \hbar\omega_{\mathbf{k}}P(\omega_{\mathbf{k}})$, 则场能的表示式 (16) 化为

$$H_f = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \left(n_{\mathbf{k}, \lambda} + \frac{1}{2} \right) \hbar\Omega_{\mathbf{k}}. \quad (60)$$

这同自由电磁场的能量表示式是相似的. 在 (20) 式中的 $\eta_{\mathbf{k}, \lambda}$ 的交换关系为

$$[\eta_{\mathbf{k}, \lambda}\eta_{\mathbf{k}', \lambda'}^+] = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}\delta_{\lambda, \lambda'}. \quad (61)$$

并且有 $\eta_{\mathbf{k}, \lambda}^+\eta_{\mathbf{k}, \lambda} = n_{\mathbf{k}, \lambda}$. 因此, 交换关系

$$\dot{\eta}_{\mathbf{k}, \lambda} = i[H_f, \eta_{\mathbf{k}, \lambda}] \quad (62)$$

仍然成立. 总之, 将自由电磁场的表示式 (58) 改写成实际电磁场的表示式 (59), 在场的理论上是允许的. 在结果上也是符合实际的.

本文是严格地求解薛定谔方程的. 如果把相互作用项当作微扰项, 用微扰法计算, 则

也将出现虚光子吸收与发射的费曼图,但此处出现的是准虚光子而不是自由虚光子,内部光子线不会使相互作用矩阵元发散。

洛伦兹分布可以看作是微观粒子测不准关系的结果,而测不准关系是微观世界的共同规律。因此可以期望,凡是涉及微观粒子的湮灭与产生的过程都会出现寿命的问题,都会出现洛伦兹型的因子。基本粒子同光子的非弹性散射,或基本粒子同基本粒子的非弹性散射均存在峰值散射截面,这是从实验上说明了这种分布的存在。如果在理论计算中,考虑到这种分布,则计算的发散问题就可能不会出现。

回顾一下统计力学方法是有启发意义的。在统计力学中,物理量是相空间坐标的函数,将物理量乘上在相空间出现的几率因子再对相空间坐标积分(或加和),则得到不发散的平均物理量。统计力学的相空间几率因子是玻尔兹曼、玻色或费米的统计函数。

此处的问题与统计力学相似,将物理量(例如能量)乘上相空间的几率因子再对相空间积分也得到收敛的数值。不过此处的相空间几率因子包含洛伦兹函数。因此,可以把(17)式看成是微观统计函数。

参 考 文 献

- [1] W. Weisskopf and E. Wigner, *Z. Physik*, **63** (1930), 54.
- [2] Y. K. Wang and I. C. Khoo, *Optics Communications*, **11**(4) (1974), 323.
- [3] Stig Stenholm, *Physics Reports*, **6c**(1) (1973).
- [4] P. W. Milonni, *ibid*, **25c**(1) (1976).
- [5] W. Heitler, *The Quantum Theory of Radiation*, 3rd. Edition (1953), 33.
- [6] 朱洪元, 量子场论, 科学出版社(1960), 67—72.
- [7] S. S. Schweber, *An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory*. pp. 524—531, Row, Peterson and Company (1961).
- [8] H. A. Bethe, L. M. Brown and J. R. Stehn, *Phys. Rev.*, **77** (1950), 372.
- [9] 见文献[5], 38页。

LINE WIDTHS AND ENERGY SHIFTS OF SPONTANEOUS EMISSION

DENG CONG-HAO

(Department of Optics, Shandong University)

ABSTRACT

In this paper, we carry out the theoretical calculation of line widths and energy shifts of spontaneous emission, the decaying oscillating field is taken instead of the free field as the action field. In the calculation the self consistent requirement is imposed.

The method of calculation is rigorous but different from the previous workers. No divergence difficulties are encountered in the calculation.

We think this method of avoiding divergence difficulties may be useful in the theoretical calculation of inelastic scattering cross sections in elementary particle physics.