

多元件谐振腔的正则描述*

方 洪 烈

由于激光技术的发展,出现了结构复杂的多元件谐振腔,其中包括环形谐振腔。关于多元件谐振腔的数学描述,在准几何近似下用光线变换矩阵来发现一些多元件谐振腔的性质是方便的^[1]。当直接用衍射积分来处理时,问题变得很复杂,所要处理的是一个多重积分^[2]

$$\begin{aligned}
 E_N(x_N, y_N) = & \left(\frac{ik}{4\pi}\right)^{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 + \cos\theta_{N-1}) \exp(-ik\rho_{N-1,N})}{\rho_{N-1,N}} \\
 & \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 + \cos\theta_{N-2}) \exp(-ik\rho_{N-2,N-1})}{\rho_{N-2,N-1}} \times \dots \\
 & \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 + \cos\theta_2) \exp(-ik\rho_{23})}{\rho_{23}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 + \cos\theta_1) \exp(-ik\rho_{12})}{\rho_{12}} \\
 & \times E_1(x_1, y_1) dx_1 dy_1 \dots dx_N dy_N.
 \end{aligned} \quad (1)$$

在此已经做了准几何近似(积分限开拓到无穷)。对于这样一个积分如果能由 $E_1(x_1, y_1)$ 直接求出 $E_N(x_N, y_N)$, 无疑将带来极大的方便。为此曾有很多作者^[3-7]建立了用光线变换矩阵来简化积分的表达式(1)。但是正如文献[8]所述,虽然积分(1)式被简化了,但用它来处理多元件谐振腔尚无头绪。这主要是由于他们建立的关系式只适用于两端反射面为平面的特殊情况,而不适用于一般情况。本文给出一个普遍适用的公式,从而建立了多元件谐振腔的正则描述。

下面讨论多元件衍射积分。对于如图1所示的多元件系统,它共包括有 N 个区域,每个区域的分界面分别表为 $S_0, S_1, S_2, \dots, S_{N-1}, S_N$ 。每个区域内的介质是均匀的,折射率分别为 $n_1, n_2, \dots, n_{N-1}, n_N$ 。设在参考面 S_0 上有一个标量场 $E_0(x_0, y_0)$, 它经过 $S_1, S_2, \dots, S_{N-1}$ 传播到 S_N 上形成 $E_N(x_N, y_N)$ 。那么由费涅耳-克希霍夫公式可设想 $E_N(x_N, y_N)$ 与 $E_0(x_0, y_0)$ 可写成如下形成:

$$E_N(x_N, y_N) = A_N \int_{-\infty}^{\infty} E_0(x_0, y_0) \exp(-ik\rho_N) dx_0 dy_0, \quad (2)$$

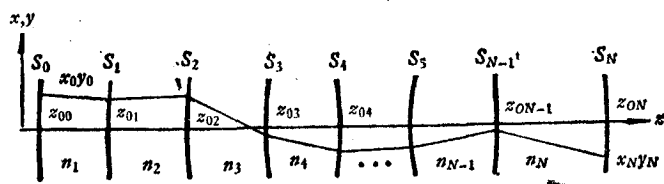


图1 复杂光学系统的光线传播

* 1978年6月29日收到。

式中 A_N 为常数, ρ_N 是光线由 S_0 面上的 (x_0, y_0) 点传播到 S_N 面上 (x_N, y_N) 点的光程. 这里已经取了准几何近似(积分限取无穷), 对于傍轴光线 A_N 和 ρ_N 是具有简单形式的.

光线由 (x_0, y_0) 点到 (x_N, y_N) 点的传播, 假定在每个区域内是直线传播的, 并假定 $(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2 \ll (z_i - z_{i-1})^2$, 这一点对傍轴光线是自然的. 那么由 (x_0, y_0) 点到 (x_N, y_N) 点的光程为^[4]

$$\rho'_N = \sum_{i=1}^N n_i \left[z_i - z_{i-1} + \frac{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}{2(z_i - z_{i-1})} \right], \quad (3)$$

其中

$$\begin{aligned} z_i &= z_{0i} + S_i(x_i, y_i) \\ &= z_{0i} + c_i x_i^2 + d_i x_i y_i + e_i y_i^2 \end{aligned} \quad (4)$$

是图中表面 S_i 的方程.

由费马原理可知, 真实的光线由 x_0, y_0 点到 x_N, y_N 点的传播使 ρ'_N 取极值. 假定各 x_{0i}, y_{0i} 点使 ρ'_N 取极值, 那么有

$$\frac{\partial \rho'_N}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial \rho'_N}{\partial y_i} = 0. \quad (5)$$

用 ρ_N 表示 ρ'_N 的极值有

$$\begin{aligned} \rho_N &= L_0 + n_N S_N(x_N, y_N) - n_1 S_0(x_0, y_0) \\ &\quad + \frac{n_1 x_0 (x_0 - x_{01})}{2(z_{01} - z_{00})} + \frac{n_1 y_0 (y_0 - y_{01})}{2(z_{01} - z_{00})} \\ &\quad + \frac{n_N x_N (x_N - x_{0N-1})}{2(z_{0N} - z_{0N-1})} + \frac{n_N y_N (y_N - y_{0N-1})}{2(z_{0N} - z_{0N-1})}, \end{aligned} \quad (6)$$

式中

$$L_0 = \sum_{i=1}^N n_i (z_{0i} - z_{0i-1}) \quad (7)$$

是谐振腔的光学长度. 为了消去(6)式中的 $x_{01}, y_{01}, x_{0N-1}, y_{0N-1}$, 可利用光线变换矩阵. 因为光线斜率为

$$\begin{aligned} \theta_i &= (x_{0i} - x_{0i-1}) / (z_{0i} - z_{0i-1}), \\ \varphi_i &= (y_{0i} - y_{0i-1}) / (z_{0i} - z_{0i-1}). \end{aligned}$$

于是 ρ_N 可写为

$$\begin{aligned} \rho_N &= L_0 + n_N S_N(x_N, y_N) - n_1 S_0(x_0, y_0) \\ &\quad + \frac{1}{2} (-n_1 \theta_1 x_0 - n_1 \varphi_1 y_0 + n_N \theta_N x_N + n_N \varphi_N y_N). \end{aligned} \quad (8)$$

设由 S_0 面到 S_N 面的光线变换矩阵是 T , 那么

$$\begin{pmatrix} x_N \\ n_N \theta_N \\ y_N \\ n_N \varphi_N \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_0 \\ n_1 \theta_1 \\ y_0 \\ n_1 \varphi_1 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

由方程组(9)中解出 $n_1 \theta_1, n_1 \varphi_1, n_N \theta_N$ 和 $n_N \varphi_N$, 代入表示式(8), 便可得到只含有 x_0, y_0, x_N 和 y_N 的表达式.

对于比较一般的情况,系统是具有象散但仍可分离变量. 此时

$$T = \begin{pmatrix} T_x & 0 \\ 0 & T_y \end{pmatrix},$$

而

$$T_x = \begin{pmatrix} A & B \\ \varphi & C \end{pmatrix}, \quad T_y = \begin{pmatrix} A' & B' \\ \varphi' & C' \end{pmatrix}.$$

对于这种情况

$$\begin{aligned} \rho_N &= L_0 + n_N S_N(x_N, y_N) - n_1 S_0(x_0, y_0) \\ &+ \frac{1}{2B} (Cx_N^2 + Ax_0^2 - 2x_N x_0) \\ &+ \frac{1}{2B'} (C'y_N^2 + A'y_0^2 - 2y_N y_0). \end{aligned} \quad (10)$$

为了确定 A_N , 可由能量守恒定律得

$$\iint_{-\infty}^{\infty} dx_0 dy_0 |E_0(x_0, y_0)|^2 = \iint_{-\infty}^{\infty} dx_N dy_N |E_N(x_N, y_N)|^2. \quad (11)$$

将(10)式和(2)式代入(11)式得

$$A = \frac{ik}{2\pi\sqrt{BB'}}. \quad (12)$$

最后求得

$$\begin{aligned} E_N(x_N, y_N) &= \frac{ik \exp(-ikL_0)}{2\pi\sqrt{BB'}} \iint_{-\infty}^{\infty} E_0(x_0, y_0) \\ &\times \exp \left\{ -ik \frac{1}{2B} (Cx_N^2 + Ax_0^2 - 2x_N x_0) \right. \\ &- ik \frac{1}{2B'} (C'y_N^2 + A'y_0^2 - 2y_N y_0) \\ &\left. - ik[n_N S_N(x_N, y_N) - n_1 S_0(x_0, y_0)] \right\} dx_0 dy_0. \end{aligned} \quad (13)$$

这就是我们要建立的公式. 与(1)式相比我们称(13)式为它的正则形式.

在利用(13)式建立多元件谐振腔的正则描述之前, 我们指出矩阵 T 仅仅是由 S_0 面到 S_N 面的传播矩阵, 它不含有 S_0 和 S_N 面的反射矩阵. 对于一个多元件谐振腔来说, 任一个反射面上的场 $U(x, y)$ 在腔内往返一周后按自再现要求应有

$$\begin{aligned} bU(x, y) &= \frac{ik \exp(-ikL_0)}{2\pi\sqrt{BB'}} \iint_{-\infty}^{\infty} U(x', y') \\ &\times \exp \left\{ -ik \frac{1}{2B} (Cx^2 + Ax'^2 - 2xx') \right. \\ &- ik \frac{1}{2B'} (C'y^2 + A'y'^2 - 2yy') \\ &\left. - ik[S(x, y) - S(x', y')] \right\} dx' dy', \end{aligned} \quad (14)$$

式中 A, B, φ, C 是矩阵 T 的元素, 矩阵 T 与谐振腔内往返一周的变换矩阵 D 有如下关系:

$$T = R^{-1}D, \quad (15)$$

而 R 是反射面 S 的反射矩阵。(14) 式就是我们要建立的多元件谐振腔的正则积分方程。

下面我们应用这个积分方程讨论几个例子。

例 1 由两个曲率半径为 r 的相同镜面相距为 L 构成的二维谐振腔, 它的单程 T 矩阵为

$$T = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

而

$$S = \frac{+x^2}{2r}; \quad S' = \frac{-x'^2}{2r}.$$

它的积分方程为

$$bU(x) = \sqrt{\frac{ik}{2\pi L}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{ik}{2L} [g(x^2 + x'^2) - 2xx'] \right\} \times U(x') dx',$$

其中

$$g = 1 - L/r.$$

这正是熟知的积分方程, 它的解已研究得很清楚了。由此例可看出(14)式与一般的理论是一致的。

例 2 上例中两反射镜不相同, 往返一周的 T 矩阵为

$$\begin{aligned} T &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{r_2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2g_2 - 1 & 2Lg_2 \\ \frac{2}{L}(g_2 - 1) & 2g_2 - 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

以及

$$S = \frac{x^2}{2r_1}, \quad S' = \frac{-x'^2}{2r_1}. \quad (17)$$

在(16)式中反射矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 的出现是由于对于驻波腔, 光在腔内往返一周时有一次反射, 而前面建立的(13)式中没有考虑到反射, 同时在(13)式中 $n_N S_N(x_N, y_N)$ 和 $n_1 S_0(x_0, y_0)$ 只与面形有关而不涉及反射与否。因此须在 T 中加入反射矩阵。或者将谐振腔考虑为透镜序列来建立矩阵 T 更为简便。

由(16)和(17)式得积分方程为

$$bU(x) = \sqrt{\frac{ik}{4\pi Lg_2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ i \frac{k}{4g_2 L} [G(x^2 + x'^2) - 2xx'] \right\} \times U(x') dx'. \quad (18)$$

而

$$G = 2g_1 g_2 - 1. \quad (19)$$

此方程与文献[9]中给出的一致。这两个例子表明我们的理论与以前理论是协调的。而不象由文献[3—7]的结果建立的方程与以前的理论相矛盾。从而得到了谐振腔的正则描

述。

事实上, (18) 式带有普遍性。对于任意复杂的腔的方程都可写成 (18) 式的形式, 只不过是 G 和 B 不同而已。至此有关高斯光学范围内的情况都已解决。对于任意复杂的谐振腔从 (9) 式起亦不难获得它的正则描述。

参 考 文 献

- [1] 王之江、方洪烈, 光频谐振腔的准几何理论, 激光, 待发表。
- [2] S. A. Collins, *Appl. Opt.*, **3** (1964), 1263.
- [3] P. Baues, *Opto-Electron.*, **1** (1969), 37.
- [4] S. A. Collins, *J. Opt. Soc. Am.*, **60** (1970), 1168.
- [5] J. A. Arnaud, *Bell. Syst. Tech. J.*, **49** (1970), 2311.
- [6] J. A. Arnaud, *J. Opt. Soc. Am.*, **61** (1971), 751.
- [7] J. A. Arnaud, "Progress in Optics", Vol. 11, ed. by Wolf, New York (1973).
- [8] A. E. Siegman, *IEEE. J. Q. E.*, **QE-12** (1976), 35.
- [9] S. R. Barone, *Appl. Opt.*, **6** (1967), 861.

A CANONICAL FORMULATION FOR ANALYZING MULTIELEMENT RESONATORS

FANG HONG-LIE