

关于部分电离等离子体的 广义欧姆定律 (II)*

陆 全 康
(复 旦 大 学)

一、强磁场稀薄部分电离气体中的 Alfvén 波与磁声波

文献[1]指出磁流体力学的研究将预示很丰富多彩的现象,目前对它们的接触还不过是开端而已,并指出 Alfvén 波是从普通流体力学进入磁流体力学时所遇见的卓著现象之一. 本节按 Alfvén 的著作^[2]讨论磁流体力学波的基本方程问题. 当电导率 $\sigma = \infty$ 时,磁流体力学中采用的广义欧姆定律为

$$0 = \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (1)$$

式中 $\mathbf{E}$ 与 $\mathbf{B}$ 各为电场与磁场强度, $\mathbf{v}$ 为等离子体质元的宏观速度, c 为光速. 对于电离与复合达到动态平衡的部分电离气体,由文献[3]中表2第二行前四列,广义欧姆定律为

$$\frac{m_e}{n_e^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (2)$$

式中 m_e , e , n 各为电子的质量、电量、密度, $\mathbf{j}$ 为电流密度. 当分析 ω (圆频率) $< \omega_{pe}$ (电子等离子体频率) 的波时, $\frac{m_e}{n_e^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}$ 项可略去,这样(2)式就归结成(1)式. 但按文献[3]中表2第二行的列V,当 ω_{ci} (离子回旋频率) $\gg \nu_i$ (离子与中性粒子的碰撞频率)时,对于磁流体力学波,线性化广义欧姆定律成为

$$0 = \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0 + \frac{(1-\alpha)\omega_{ci}}{(\beta + i\omega)e} \left(\frac{m_i}{\alpha} i\omega \mathbf{v} + \frac{\nabla \tilde{p}}{n_0(1+\alpha)} \right) \times \frac{\mathbf{B}_0}{B_0}, \quad (3)$$

式中 $\beta = \nu_i/2(1-\alpha)$, α 为电离度, m_i 与 n_0 各为离子的质量与平衡态密度, $\mathbf{B}_0$ 为恒定外磁场强度, $\tilde{p}$ 为等离子体扰动压强.

部分电离气体的线性化运动方程为^[3]

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\alpha \frac{\nabla \tilde{p}}{m_i n_0} + \alpha \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{B}_0}{m_i n_0 c}. \quad (4)$$

除方程(3)与(4)外,其余方程和计算模型与文献[2]§3.8相同. 最后得到: 波矢 $\mathbf{k}$ 与外磁场 $\mathbf{B}_0$ 成 φ 角传播的磁流体力学波色散关系为

$$\frac{\omega^4}{k^4} - \frac{\omega^2}{k^2} [c_s^2 + c_A^2(1+A)] + c_s^2 c_A^2 \left[\cos^2 \varphi + A \frac{1+\alpha \cos^2 \varphi}{1+\alpha} \right] = 0, \quad (5)$$

* 1978年2月11日收到, 1978年8月16日收到修改稿.

式中 $c_A = B_0/\sqrt{4\pi\rho}$ 为 Alfvén 速度 (ρ 为等离子体质量密度), c_s 为声速, $A = \frac{1-\alpha}{\alpha} \times \frac{i\omega}{\beta + i\omega}$.

当 $A = 0$ (气体完全电离), (5) 式归结成文献 [2] § 3.8 中的 (43) 式.

当气体部分电离时, $A \neq 0$; 首先取 $\beta = 0$ (即忽略离子与中性粒子的碰撞) 后, $A = (1-\alpha)/\alpha$. 当 $\varphi = 0$ 时, (5) 式化成

$$\frac{\omega^4}{k^4} - \frac{\omega^2}{k^2} [c_s^2 + c_A^2/\alpha] + c_s^2 c_A^2/\alpha = 0. \quad (6)$$

(6) 式可分解成: $\omega^2/k^2 = c_s^2$ 与 $\omega^2/k^2 = c_A^2/\alpha$. 这表明, 沿磁场传播的声波相速度仍为 c_s , 但 Alfvén 波的相速度为 $c_A/\sqrt{\alpha}$, 而不是 c_A :

$$\left| \frac{\omega}{k} \right| = \frac{c_A}{\sqrt{\alpha}} = \frac{B_0}{\sqrt{4\pi\rho_e}}, \quad (7)$$

式中 $\rho_e = n(m_i + m_e) \approx nm_i$ 为等离子体质元中带电粒子的质量密度. 物理原因可作下述分析. 众所周知, 当忽略粒子间的碰撞时, 磁力线冻结于带电流体, Alfvén 波可看成冻结于流质上的磁力线本身具有弹性所引起的沿磁力线传播的横波. 当改用广义欧姆定律 [(3) 式中令 $\beta = 0$]

$$0 = \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\mathbf{v}}{\alpha} \times \mathbf{B}_0 + \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \frac{1}{m_i n_0 c} \frac{1}{i\omega} \nabla \tilde{p} \times \mathbf{B}_0 \quad (3')$$

代替 (1) 式后, 相速度决定于等离子体质元中的带电粒子的质量密度 ρ_e 而不是整个质元的质量密度. 因而此时可看成磁力线仅冻结于带电粒子, 而 Alfvén 波是磁力线与带电粒子一起振荡的结果. 此外, 沿磁场 $\mathbf{B}_0$ 方向的纵振荡, 磁场对带电粒子与中性粒子均无影响, 所以改用 (3') 式代替 (1) 式后, 对声波的相速度 $|\omega/k| = c_s$ 无影响.

再讨论 $\varphi = 90^\circ$ 的情况, 色散关系 (5) 式化成

$$\frac{\omega^4}{k^4} - \frac{\omega^2}{k^2} [c_s^2 + c_A^2/\alpha] + c_s^2 c_A^2 \left[\frac{1-\alpha}{1+\alpha} \frac{1}{\alpha} \right] = 0. \quad (8)$$

当 $\alpha = 1$ 时, (8) 式分解成 $\omega^2/k^2 = 0$ 与 $\omega^2/k^2 = c_s^2 + c_A^2$, 后者相应于磁声波.

(8) 式可改写成

$$\alpha \frac{\omega^4}{k^4} - \frac{\omega^2}{k^2} [\alpha c_s^2 + c_A^2] + c_s^2 c_A^2 \frac{1-\alpha}{1+\alpha} = 0, \quad (9)$$

因而当 $\alpha = 0$ 时, (9) 式化成 $\omega^2/k^2 = c_s^2$, 这相应于普通声波.

物理原因可作下述分析. 磁声波即纵 Alfvén 波, 当忽略碰撞时, 它可看成冻结于带电流体中的磁力线, 沿磁场的垂直方向, 与带电流体一起作纵振荡而形成的波. 当电离度降低时, 中性粒子增多; 而当 $\alpha \rightarrow 0$ 时, 磁声波转化成由中性粒子振荡构成的垂直于磁场传播的普通声波. 因而这也反映出磁力线仅冻结于带电粒子, 纵 Alfvén 波是磁力线与带电粒子一起振荡的结果.

二、广义欧姆定律中含积分项的物理意义

当 $K_e < (1-\alpha)$ 时, 由文献 [3] 中的 (6) 式与 (12a) 式, 广义欧姆定律可化成

$$\begin{aligned} \frac{m_e}{ne^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = & \frac{\nabla P_e}{ne} + \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\mathbf{v}}{\alpha} \times \mathbf{B} - \frac{1}{nec} \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \mathbf{j}/\sigma \\ & + \frac{(1-\alpha)}{m_i n c} e^{-\beta t} \left[\int_0^t \nabla(P - P_e) e^{\beta \xi} d\xi \right] \times \mathbf{B} - \frac{(1-\alpha)}{\alpha c} e^{-\beta t} \\ & \times \left[\int_0^t \mathbf{v}(\xi) e^{\beta \xi} \beta d\xi \right] \times \mathbf{B}, \end{aligned} \quad (10)$$

式中各符号的意义参看文献[3]中的表1.

首先,当 $\beta = 0$ 与压强均匀时, (10) 式化成

$$\frac{m_e}{ne^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\mathbf{v}}{\alpha} \times \mathbf{B} - \frac{1}{nec} \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \mathbf{j}/\sigma. \quad (11)$$

此时,整个气体的运动方程,文献[3]中(6)式,成为

$$m_i n \frac{\partial}{\partial t} \frac{\mathbf{v}}{\alpha} = \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B}. \quad (12)$$

当令 $\mathbf{v}' = \mathbf{v}/\alpha$ 代入(11)与(12)式后,它们归结成与完全电离气体类同的方程组. 由质流平均速度的定义, $\mathbf{v}/\alpha$ 表示中性粒子不参与运动时 ($\mathbf{v}_a = 0$) 的等离子体质元中带电子的宏观速度. 得到这一结果显然是合理的. 由文献[3]的(12a)式可见,当忽略中性粒子与带电粒子的碰撞和压强梯度产生的力时,显示中性粒子不参与整体宏观运动的效应已包含在广义欧姆定律(文献[3]中(12a)式)的含积分项内.

其次讨论,当 $\beta \neq 0$ 时,通过碰撞效应,部分电离气体从初始状态到定态的弛豫过程. $t = 0$ 时, (10) 式中含 $\mathbf{v}$ 的两项为

$$\frac{1}{c} \frac{\mathbf{v}(0)}{\alpha} \times \mathbf{B} - \frac{(1-\alpha)}{\alpha c} e^{-\beta t} \left[\int_0^t \mathbf{v}(\xi) e^{\beta \xi} \beta d\xi \right] \times \mathbf{B} \Big|_{t=0} = \frac{1}{c} \frac{\mathbf{v}(0)}{\alpha} \times \mathbf{B}. \quad (13)$$

既趋于定态之后,各物理量不再随时间改变,此时

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\mathbf{v}}{\alpha} \times \mathbf{B} - \frac{(1-\alpha)}{\alpha c} e^{-\beta t} \left[\int_0^t \mathbf{v} e^{\beta \xi} \beta d\xi \right] \times \mathbf{B} \Big|_{t=\infty} \\ = \frac{1}{c} \frac{\mathbf{v}}{\alpha} \times \mathbf{B} - \frac{(1-\alpha)}{\alpha c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (14)$$

这表明,达成定态后,中性粒子完全融合成等离子体质元的一部分参与运动.

由此可见,项

$$- \frac{(1-\alpha)}{\alpha c} e^{-\beta t} \left[\int_0^t \mathbf{v}(\xi) e^{\beta \xi} \beta d\xi \right] \times \mathbf{B}$$

反映出,通过碰撞,中性粒子参与整体运动的弛豫过程.

最后,对于谐振情况,由文献[3]中的(12a)与(6)式,广义欧姆定律可化成

$$\begin{aligned} i\omega \frac{m_e}{ne^2} \mathbf{j} = & \frac{\nabla P_e}{ne} + \mathbf{E} - \frac{1}{nec} \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \frac{\mathbf{j}}{\sigma} + \frac{(1-\alpha)}{m_i n c} \frac{\nabla(P - P_e)}{\beta + i\omega} \\ & \times \mathbf{B} + \frac{1}{c} \frac{\mathbf{v}}{\alpha} \times \mathbf{B} - \frac{(1-\alpha)}{\alpha c} \frac{\beta \mathbf{v}}{\beta + i\omega} \times \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (15)$$

当 $\omega \ll \beta$ 时, (15) 式右方最后二项之和趋于 $\frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}$. 而当 $\omega \gg \beta$ 时,这二项之和趋于

$$\frac{1}{c} \frac{\mathbf{v}}{\alpha} \times \mathbf{B}.$$

这表明仅当中性粒子与带电粒子的碰撞频率远大于振荡圆频率时, 中性粒子才来得及响应, 从而参与整体质元的振荡. 在相反的极限情况, 中性粒子从振荡中完全脱出. 介于二者之间的情况, 中性粒子将从整体中部分地脱出. 因而当 $\nu_i < 2(1 - \alpha)\omega$ 时, 磁流体力学波理论中通常采用的广义欧姆定律需要修改. 同时, 这也说明了(由文献 [3] 中表 2 第二行前四列)通常的广义欧姆定律适用于 $K_i \geq 1$ 的情形.

还需指出, Resler^[4] 分析了电导率 $\sigma \neq \infty$ 时, 碰撞对磁流体力学波色散关系的修正. 对于本文的情况, 当 (5) 式中的 $\beta \neq 0$ 时, 带电粒子与中性粒子的碰撞对色散关系的修正可类似地分析. 这里将不仅给出阻尼, 还将反映出中性粒子参与整体振荡的程度.

三、非电中性区域的非定态广义欧姆定律

当物理量变化的特征长度近似于德拜长度时, 就需要考虑偏离电中性的效应. 此外, 在等离子体的边界区域和电探针的鞘层中, 也要考虑非电中性. 文献 [1] (2-2-6) 式给出磁流体力学中一般采用的广义欧姆定律为

$$\mathbf{j} = \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) + \rho_c \mathbf{v}, \quad (16)$$

式中 ρ_c 为电荷密度.

对于部分电离气体的非定态问题, 例如波动与稳定性问题, 为了解 (16) 式的适用范围, 本节将文献 [3] 中导出的定律推广到非电中性区域所适用的形式. 采用的模型均与文献 [3] 一样. 令 $\rho_c = -n'e$, 与 1 比较略去 $o(n'/n)$ 的项, 经过冗长的推演, 得出与文献 [3] 中 (7) 式相应的定律为

$$\begin{aligned} \frac{m_e}{ne^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = & \frac{\nabla P_e}{ne} + \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \frac{1}{nec} \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \frac{B}{nec} \left[\left(\frac{m_e}{m_i} \right)^2 K_i \right. \\ & \left. + K + K_e \right] (\mathbf{j} - \rho_c \mathbf{v}) + \frac{1}{nec} \left[\mathbf{j}_i(0) - \frac{m_e}{m_i} (\mathbf{j}(0) - \rho_c \mathbf{v}(0)) \right] \\ & \times \mathbf{B} e^{-\beta t} - \frac{B \left(\frac{m_e}{m_i} K_i - K_e \right)}{nec(1 - \alpha)} \left[\mathbf{j}_i(0) - \frac{m_e}{m_i} (\mathbf{j}(0) - \rho_c \mathbf{v}(0)) \right] e^{-\beta t} \\ & + \frac{e^{-\beta t}}{nec} \left[\int_0^t e^{\beta \xi} \left\{ \frac{e}{m_i} [\alpha \nabla P - \nabla(P_e + P_i)] + \frac{e}{m_i c} (1 - \alpha) \mathbf{j} \right. \right. \\ & \left. \left. \times \mathbf{B} + \omega_{ci} \left(K_e - \frac{m_e}{m_i} K_i \right) (\mathbf{j} - \rho_c \mathbf{v}) + \frac{e(1 - \alpha)}{m_i} \rho_c \mathbf{E} \right\} d\xi \right] \times \mathbf{B} \\ & + \frac{B \left(K_e - \frac{m_e}{m_i} K_i \right)}{nec(1 - \alpha)} e^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta \xi} \left\{ \frac{e}{m_i} [\alpha \nabla P - \nabla(P_e + P_i)] \right. \\ & \left. + \frac{e(1 - \alpha)}{m_i c} \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \omega_{ci} \left(K_e - \frac{m_e}{m_i} K_i \right) (\mathbf{j} - \rho_c \mathbf{v}) \right\} d\xi \end{aligned}$$

$$+ \frac{e(1-\alpha)}{m_i} \rho_c \mathbf{E} \} d\xi. \quad (17)$$

与文献 [3] 中 (12a) 式相应的定律为

$$\begin{aligned} \frac{m_e}{ne^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = & \frac{\nabla P_e}{ne} + \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \frac{1}{nec} \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \frac{B(K + K_e)}{nec} (\mathbf{j} - \rho_c \mathbf{v}) \\ & + \frac{1}{nec} \left[\mathbf{j}_i(0) - \frac{m_e}{m_i} (\mathbf{j}(0) - \rho_c \mathbf{v}(0)) \right] \times \mathbf{B} e^{-\beta t} \\ & + \frac{K_e B}{nec(1-\alpha)} \left[\mathbf{j}_i(0) - \frac{m_e}{m_i} (\mathbf{j}(0) - \rho_c \mathbf{v}(0)) \right] e^{-\beta t} \\ & + \frac{(1-\alpha)^2}{K_i} \frac{e^{-\beta t}}{ne} \left\{ \int_0^t e^{\beta \xi} (\beta d\xi) \left[-\nabla P_e + \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \rho_c \mathbf{E} \right] \right\} \times \frac{\mathbf{B}}{B}. \quad (18) \end{aligned}$$

当气体趋于完全电离时, 此时, 由 $\mathbf{v}$ 的定义得

$$\mathbf{j}_i(t) - \frac{m_e}{m_i} [\mathbf{j}(t) - \rho_c \mathbf{v}(t)] = 0, \quad (19)$$

而 (18) 式化成

$$\frac{m_e}{ne^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = \frac{\nabla P_e}{ne} + \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \frac{1}{nec} \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \eta (\mathbf{j} - \rho_c \mathbf{v}), \quad (20)$$

式中 $\eta = \nu m_e / ne^2$, (20) 式给出 Spitzer 广义欧姆定律对于非电中性区域的推广.

当部分电离气体趋于定态, (18) 式的左方等于零, 而右方含 t 的项取 $t \rightarrow \infty$ 时的极限, 这样得出

$$\begin{aligned} 0 = & \nabla P_e + ne \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) - \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \frac{B}{c} (K + K_e) (\mathbf{j} - \rho_c \mathbf{v}) \\ & + \frac{(1-\alpha)^2}{BK_i} \left[-\nabla P_e + \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \rho_c \mathbf{E} \right] \times \mathbf{B}, \quad (21) \end{aligned}$$

这与文献 [5] 中 (2.12) 式给出的一致.

(18) 式可按文献 [3] 中的表 2 类似地作出分类, 从而可得出方程 (16) 的适用范围.

参 考 文 献

- [1] 卢鹤绂主编, 受控热核反应, 上海科技出版社 (1962).
- [2] H. Alfvén, C-G Fälthammar 宇宙电动力学(戴世强译), 第三章, 科学出版社 (1974).
- [3] 陆全康, 物理学报, **26** (1977), 417.
- [4] E. L. Resler, *Rev. Mod. Phys.*, **32** (1960), 866.
- [5] Г. А. Любимов, *Прикладная математика и механика*, **25** (1961), 611.

ON A GENERALIZED OHM'S LAW IN PARTIALLY IONIZED PLASMA (II)

LU QUAN-KANG
(Fudan University)