

激光核聚变模拟计算^{* 1)}

林中衡 殷光裕

(中国科学技术大学) (中国科学院上海光学精密机械研究所)

提 要

本文概述了一个简单的激光核聚变物理模型, 利用它可以计算在强激光辐照下等离子体靶丸的流体动力学行为, 以及产生的热核反应。同时还讨论了有关的计算方法, 程序结构, 并且给出了几个初步的计算结果。

激光引发核聚变是探索受控热核反应的一条重要途径。其基本原理是^[1,2], 在强激光的辐照下产生向心爆炸(爆聚), 使等离子体靶丸压缩到极高的密度和温度, 点燃可观的热核反应, 从而获得足够的能量增益。为了进一步分析和了解这一过程, 必须在电子计算机上进行数值模拟计算^[3-6]。对此我们做了初步的尝试。

为了简单起见, 假设靶丸是一维球对称的。电子和离子分别处于热平衡, 等离子体具有电子、离子双温度。此外, 考虑的物理效应还有: 等离子体对激光的吸收; 电子的轫致辐射; 电子、离子的热传导; 电子和离子间的热交换; 离子的自然和人为粘性; 聚变产生的带电粒子能量的局部吸收。

在流体力学方程中, 等离子体作为单流体处理。

一、物理模型

确定等离子体状态的主要参量是密度 ρ , 速度 U , 电子和离子的温度 T_e 和 T_i 。此外, 为了计算热核反应还必须知道各种成分单位体积的粒子数。用 n_e , n_i 和 f_k 分别表示电子、总的离子数密度以及每种离子在总离子数中所占的比例。于是, 每种离子的数密度 n_k 可表示为

$$n_k = f_k n_i, \quad (1)$$

$$\sum_k f_k = 1. \quad (2)$$

离子的平均电荷和质量数为

$$Z = \sum_k f_k Z_k, \quad (3)$$

$$M = \sum_k f_k M_k, \quad (4)$$

* 1978年5月29日收到。

1) 中国科学技术大学七三级学员王允信、叶忠国、吴汉明参加了部分计算工作。

Z_k, M_k 是每种离子的电荷与质量数. 并有

$$n_e = Z n_i. \quad (5)$$

1. 物理方程

基本的方程是: 质量守恒、动量守恒、能量守恒、等离子体的状态方程以及聚变方程式.

为了计算方便, 我们采用拉格朗日坐标系, 并取等离子体的质量 M 为拉氏坐标. 令 $r = r(t)$ 为靶丸内某点的径向坐标, 它是欧拉坐标. 由于靶丸是一维球对称的, 以下我们只考查某单位立体角内等离子体的运动.

(1) 质量守恒 如果忽略热核反应产生的中子逃逸对质量的影响, 有

$$dM = \rho r^2 dr = \text{常数}, \quad (6)$$

式中 ρ 为密度, dM 是厚度为 dr 的某一球壳内等离子体的质量. (6) 式是拉氏坐标和欧氏坐标之间的变换式. 在计算中, 根据聚变产生中子的数量, 随时修正因中子逃逸所带来的影响.

(2) 动量守恒 粘性流运动方程的普遍形式为

$$\rho \frac{d\mathbf{U}}{dt} = -(\nabla p + \nabla \cdot \mathbf{q}),$$

式中 p 是标量压力, \mathbf{q} 是粘性压力张量, \mathbf{U} 是速度. 在球坐标并且仅与径向坐标 r 有关的一维情况下, 上式可化成(参见附录一)

$$\rho \frac{d\mathbf{U}}{dt} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(p + \frac{4}{3} \frac{\mu}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \right) - 4 \frac{U}{r} \frac{\partial \mu}{\partial r}. \quad (7)$$

在拉氏坐标下 (7) 式变为

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = -r^2 \frac{\partial}{\partial M} \left(p + \frac{4}{3} \frac{\mu}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \right) - 4rU \frac{\partial \mu}{\partial M}, \quad (8)$$

其中 U 就是径向速度 $\frac{dr}{dt}$, μ 是粘性系数, 标量压力 p 在数值计算中还将包括人为粘性压力, 这是处理激波形成所必需的, 其表示式在计算方法中给出. 另外, 当不考虑自然粘性时 ($\mu = 0$), (8) 式就还原成

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = -r^2 \frac{\partial}{\partial M} p. \quad (9)$$

这是大家熟悉的.

(3) 能量守恒 考虑单位体积的能量守恒, 即有

$$\rho \frac{d}{dt} \left(E + \frac{U^2}{2} \right) = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{U} + \mathbf{q} \cdot \mathbf{U}) + \rho S, \quad (10)$$

式中左边是能量变化速率, 其中 E 是比内能; 右边第一项是在单位时间内, 外界对单位体积等离子体所作的功, 而 S 是热源项, 表示单位时间内外界传递给单位质量等离子体的热量. 在一维球对称的情况下, (10) 式可化为(参见附录一)

$$\frac{dE}{dt} = -p \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) + \frac{4}{3} \frac{\mu}{\rho} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{U}{r} \right) \right]^2 + S. \quad (11)$$

再利用热力学关系, 用比容 $V = 1/\rho$ 和温度 T 来表示比内能 E :

$$dE = \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T dV + \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V dT = \left[-p + T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V\right] dV + C_V dT.$$

于是(11)式就可化成

$$C_V \frac{dT}{dt} + T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \frac{dV}{dt} = \frac{4}{3} \frac{\mu}{\rho} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\mathbf{U}}{r}\right) \right]^2 + S.$$

这就是我们所用的温度方程, 它在拉氏坐标下为

$$C_V \frac{dT}{dt} + T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \frac{dV}{dt} = \frac{4}{3} \frac{\mu}{\rho} \left[\rho r^3 \frac{\partial}{\partial M} \left(\frac{\mathbf{U}}{r}\right) \right]^2 + S. \quad (12)$$

显然, 上式去掉右边第一项就是无粘性流的情况。

对于电子和离子应分别写下它们各自的温度方程(12)。方程左面的形式都是相同的, 只是取不同的足标 e 或者 i 。右面具有不同的热源项, 它们分别为

$$S_e = H_e + K + Y_e + J + X, \quad (13)$$

$$S_i = H_i - K + Y_i + Q_a, \quad (14)$$

H, K 表示由热传导和电子-离子热交换传递的热量, 它们为

$$H = \frac{\partial}{\partial M} \left(r^2 \kappa \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad (15)$$

$$K = C_V \omega (T_i - T_e). \quad (16)$$

这里 κ, ω 分别为热导系数和电子-离子热化时间的倒数。 Q_a, J, X, Y 分别是由人为粘性、轫致辐射、激光吸收以及热核反应产生的热量传递, 其形式将在以后各节详叙。

(4) 状态方程 在激光聚变等离子体中, 离子可以认为是经典的理想气体, 它的状态方程是理想气体状态方程:

$$p_i = n_i k T_i = \frac{k}{m_H M} \rho T_i, \quad (17)$$

其中 k 是玻耳兹曼常数, m_H 是核子的质量单位(近似取质子的质量)。

电子是理想的费密气体, 服从量子统计。因此在不同的简并度下它的状态方程为^[17]

$$p_e = n_e k T_e \begin{cases} \frac{2}{5} \xi^{-1} + \frac{\pi^2}{6} \xi - \frac{\pi^4}{40} \xi^3 & \xi < \xi_{\min}, \\ p_y & \xi_{\min} \leq \xi < \xi_{\max}, \\ 1 & \xi \geq \xi_{\max}; \end{cases} \quad (18)$$

$$(C_V)_e = \frac{3}{2} \frac{n_e}{\rho} k \begin{cases} \frac{\pi^2}{3} \xi - \frac{\pi^4}{10} \xi^3 & \xi < \xi_{\min}, \\ C_y & \xi_{\min} \leq \xi < \xi_{\max}, \\ 1 & \xi \geq \xi_{\max}; \end{cases} \quad (19)$$

$$T p_T = n_e k T \begin{cases} \frac{\pi^2}{3} \xi - \frac{\pi^4}{10} \xi^3 & \xi < \xi_{\min}, \\ C_y & \xi_{\min} \leq \xi < \xi_{\max}, \\ 1 & \xi \geq \xi_{\max}. \end{cases} \quad (20)$$

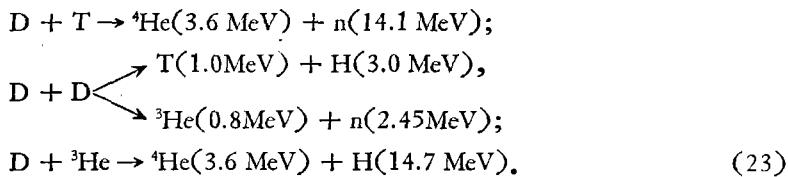
其中,

$$\xi = T_e / T_F, \quad (21)$$

$$kT_F = \frac{\hbar^2}{8m_e} \left(\frac{3}{\pi} n_e \right)^{2/3}, \quad (22)$$

\hbar 是普朗克常数, T_F 是费密温度, 符号 p_T 代表 $\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v$ 。在 $\xi_{\min} \leq \xi < \xi_{\max}$ 的范围, 电子是部分简并的, 因此状态方程无解析表达式。 p_y, C_y 可由一个数值表, 通过插值求出, 见附录二。

(5) 聚变方程 考虑如下三种反应:



在 δt 的时间内, 由于热核反应, f_k 变化了 δf_k 。根据 (1) 式可得

$$\delta f_k = \frac{1}{n_i} (\delta n_k - f_k \delta n_i), \quad (24)$$

其中 δn_i 表示总的离子数密度的变化, δn_k 表示每种离子数密度的变化。 δn_k 的形式以 D, T 为例分别为

$$\delta n_D = (-2R_{DD} - R_{DT} - R_{D^3\text{He}})\delta t, \quad (25)$$

$$\delta n_T = \left(\frac{1}{2} R_{DD} - R_{DT} \right) \delta t, \quad (26)$$

R 为单位时间、单位体积内每种热核反应的反应次数。例如 D-T 反应的 R_{DT} 为

$$R_{DT} = \langle \sigma v \rangle_{DT} f_D f_T n_i^2, \quad (27)$$

$\langle \sigma v \rangle$ 为反应几率。

2. 输运系数^[6-8]

(1) 热导率 在电子非简并状态, 即经典极限, 电子的热导率为

$$\kappa_e = 20 \left(\frac{2}{\pi} \right)^{3/2} e \delta (kT_e)^{5/2} k / m_e^{1/2} z e^4 \ln \Lambda_{ei}. \quad (28)$$

修正因子 e 和 δ 见文献 [9]。在简并情况下, κ_e 为

$$\kappa_e = 2^{1/2} \pi (kT_e)^{5/2} k / 3m_e^{1/2} e^4 z \xi^{3/2} \log(1 + B), \quad (29)$$

$$B = 8\pi m_e k^2 T_e T_i / \hbar^2 e^2 z^2 n_i \xi. \quad (30)$$

离子的热导率为

$$\kappa_i = 2.93 (kT_i)^{5/2} k / (\pi m_i)^{1/2} z^4 e^4 \ln \Lambda_{ei}. \quad (31)$$

(2) 电子-离子热交换 电子-离子之间的热化时间若为 τ_{ei} , 则 (16) 式中的 $\omega = 1/\tau_{ei}$ 。在经典极限

$$\tau_{ei} = 3m_i (kT_e)^{3/2} / 8(2\pi m_e)^{1/2} n_e z^2 e^4 \ln \Lambda_{ei}; \quad (32)$$

在简并情况下

$$\tau_{ei} = 3\pi m_i \hbar^3 (1 + A) / 8m_e^2 z^2 e^4 \ln \Lambda_{ei}; \quad (33)$$

1) 本文所用的单位均是高斯厘米-克-秒单位制。

$\hbar = \frac{h}{2\pi}$, A 是费密分布的归一化因子(见附录三)。

(3) 自然粘性 离子的粘性系数为

$$\mu_i = 0.406 m_i^{1/2} (k T_i)^{5/2} / z^4 e^4 \ln A_i. \quad (34)$$

电子的粘性系数比离子的小很多,因而电子粘性被忽略。

(4) 库仑对数 在以上运输系数的计算中所用的库仑对数 $\ln \Lambda_{ei}$, $\ln \Lambda_i$ 可分为两种情况考虑。

1) 若运输系数计算中不考虑简并,则库仑对数只考虑量子力学波动性修正,参见文献[9]。

2) 若运输系数需做电子简并修正,则库仑对数还需要加入量子统计简并性的修正,参见文献[7]。

3. 热源计算

(1) 热流限制 根据热扩散的傅里叶理论,经典热导系数的适用条件为 $dT/dr \lesssim T/\lambda_e$, λ_e 为电子的平均自由程。在激光聚变情况,由于在靶丸内部温度变化异常剧烈,上述条件已不再成立^[10],因此必须考虑自由流限制。根据麦克斯韦尔分布可推出最大的热流为

$$(F_e)_{\max} = \frac{1}{\beta} \frac{1}{4} n_e \bar{v}_e \frac{3}{2} k T_e, \quad (35)$$

β 是一个可调节的参量,若不考虑反常热导可以认为 $\beta \simeq 1$,否则 $\beta > 1$ 。

这样, κ_e 必须进行修正,修正后的电子热导率为

$$\kappa'_e = \kappa_e / \left(1 + \frac{\kappa_e}{(F_e)_{\max}} \left| \frac{dT_e}{dr} \right| \right). \quad (36)$$

(2) 辐射

$$J = -16\pi^2 e^6 \bar{v}_e s^2 n_e / 3^{3/2} h m_e m_i C^3, \quad (37)$$

$$\bar{v}_e = (8k T_e / \pi m_e)^{1/2}, \quad (38)$$

\bar{v}_e 是在麦克斯韦尔分布下电子的平均速率,见文献[9]。为了对 J 做简并修正,令

$$\delta T_e = T_e - (n_e/n_e^0)^{r-1} T_e^0, \quad (39)$$

r 为定压比热与定容比热之比,在这里我们认为 $r = 5/3$ 。 T_e^0 是假设的一个初始温度,当电子遵从经典状态方程时,在此温度下,电子的压力应等于绝对零度下完全简并电子气体的费密压力。

在 $\xi < \xi_{\min}$ 时,应将 δT_e 取代 T_e 代入(38)式计算 $J^{[5]}$,以避免因 J 的计算偏高而造成靶丸不应有的冷却。

(3) 激光吸收 等离子体通过逆辐射的机制吸收激光能量。为了模拟反常吸收,假设激光通过低密度吸收区后的剩余功率全部被临界密度附近的等离子体吸收。

$$X(r, t) = \frac{d}{dM} P_L(r, t), \quad (40)$$

$$P_L(r, t) = P_L(r_0, t) e^{-\alpha(r_0-r)}, \quad (41)$$

P_L 是激光功率; r_0 是靶丸半径; α 是激光吸收系数,它等于^[11]

$$\alpha = \frac{(4\pi)^3}{3\omega_i^2 c} (2\pi m_e k T_e)^{-3/2} (ze^2)^2 n_e n_i (1 - \beta_c)^{1/2} (\ln 2/e - 0.577),$$

$$\epsilon = \frac{\hbar \omega_i}{2 k T} \ll 1, \quad (42)$$

ω_i 为激光频率, $\beta_c = \rho/\rho_c$, ρ_c 是临界密度, c 是光速.

(4) 热核反应热 在计算中近似认为, 热核反应产物中带电粒子的能量全部被靶丸局部吸收, 中子从靶丸内逃逸出去. 热核反应截面可参考文献 [5, 12].

带电粒子的能量在离子和电子之间的分配是根据以下两式^[5]:

$$P_{DT} = T_e / (T_e + 32), \quad (43)$$

$$P_{DD} = P_{D^3He} = T_e / (T_e + 103). \quad (44)$$

T_e 的单位是千电子伏, P 是分配给离子的部分. 因而有

$$Y_i = (P_{DD} E_{DD} R_{DD} + P_{DT} E_{DT} R_{DT} + P_{D^3He} E_{D^3He} R_{D^3He}). \quad (45)$$

对于 Y_e 只需用 $(1 - P)$ 取代 P 即可. E_{DD} 为 D-D 反应产物中带电粒子携带的能量 E_{DT} , E_{D^3He} 同理类推.

(5) 粘性热 自然粘性可使粒子的部分有序运动动能转换为内能, 产生一个热源项. 在能量守恒方程 (12) 中已经考虑了它, 即

$$Q_n = \frac{4}{3} \frac{\mu}{\rho} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{U}{r} \right) \right]^2. \quad (46)$$

另有与人为粘性压力有关的人为粘性热^[15], 它在下一节中给出.

二、计算方法

差分格式在空间和时间坐标上都取中心差分. 在靶丸半径范围分成 N 个区域, 区域的边界点用 i 表示, 中点用 l 表示, 它们均写在物理量的右下角, $1 \leq j \leq N + 1$, $1 \leq l \leq N$. 时间坐标被时间步长分隔, 用右上角的上标表示, 例如第 n 步的时间为 t^n . 欧拉坐标 r 在空间区域的边界定义, 速度在时间的半整数点定义. 广延量如密度、压力、温度都应在每个区域内取平均, 故在中心点定义. 如图 1 所示.

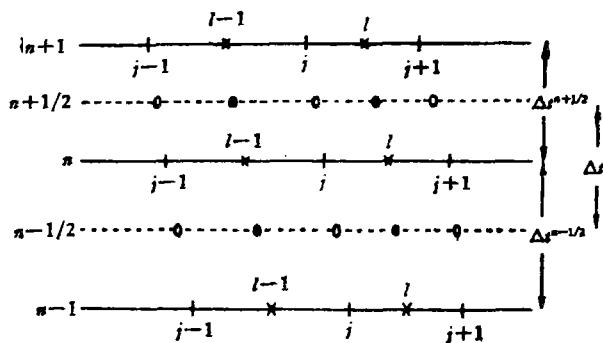


图 1 物理量取值图

|—— r ; ○—— U ; ×—— ρ , T_i , T_e ; ●—— q

在时间的第 n 步, 已知量和未知量见表 1。

表 1 在时间第 n 步的已知量以及需求的未知量

已 知 量	未 知 量	时 间 层 次
$r_j^{n-1}, \rho_j^{n-1}, T_l^{n-1}, f_{kl}^{n-1}$		$n-1$
$U_j^{n-1/2}$		$n-1/2$
r_j^n, ρ_j^n	T_l^n, f_{kl}^n	n
	$U_j^{n+1/2}$	$n+1/2$
	r_j^{n+1}, ρ_j^{n+1}	$n+1$

1. 差分方程

(1) 流体力学方程

$$U_j^{n+1/2} - U_j^{n-1/2} = -(r_j^n)^2 (p_j^n - p_{j-1}^n + q_j^n - q_{j-1}^n) \Delta t^n / \Delta M_j, \quad (47)$$

$$\Delta M_j = \frac{1}{2} (\Delta M_j + \Delta M_{j-1}), \quad (48)$$

$$\Delta t^n = \frac{1}{2} (\Delta t^{n-1/2} + \Delta t^{n+1/2}), \quad (49)$$

$$r_j^{n+1} = r_j^n + U_j^{n+1/2} \Delta t^{n+1/2}. \quad (50)$$

p 是等离子体压力, 它是电子与离子压力之和:

$$p_j^n = (p_i + p_e)_j^n. \quad (51)$$

(2) 温度方程

$$C_{V_j}^{n-1/2} \frac{T_j^n - T_j^{n-1}}{\Delta t^{n-1/2}} + (T p_T)_j^{n-1/2} \frac{V_j^n - V_j^{n-1}}{\Delta t^{n-1/2}} = S_j^{n-1/2}. \quad (52)$$

S 中的每一项都应在 $n-1/2$ 层取值, 例如

$$Y_j^{n-1/2} = \frac{1}{2} (Y_j^n + Y_{j-1}^n). \quad (53)$$

对 H, K, Q_a 的差分形式分述如下:

1) 热流项 H

$$H_j^n = \frac{1}{\Delta M_j} (F_{j+1}^n - F_j^n), \quad (54)$$

$$F_j^n = (r_j^n)^2 \kappa_j^n (T_j^n - T_{j-1}^n) / (r_j^n - r_{j-1}^n), \quad (55)$$

$$r_j^n = \frac{1}{2} (r_j^n + r_{j+1}^n). \quad (56)$$

加入热流限制后 κ_e 的形式为

$$\kappa_{ej}' = \kappa_{ej}^n / \left(1 + \frac{\kappa_{ej}^n}{F_{Mj}^n} \left| \frac{T_{ej}^n - T_{ej-1}^n}{r_j^n - r_{j-1}^n} \right| \right), \quad (57)$$

F_M 是热流的上限, 由 (35) 式定义。

2) 电子-离子热交换项 K

$$K_j^{n-1/2} = C_{V_j}^{n-1/2} \omega_j^{n-1/2} (T_{ej}^{n-1} + T_{il}^n - T_{ej}^n - T_{il}^n) / 2, \quad (58)$$

在这里, K 由于用了隐格式从而保证了解的稳定性^[13], 但是却形成了 T_i^n 和 T_e^n 联立求解的状况。为了避免解温度联立方程, 我们又将 K 变成另一种形式, 并用迭代法求解。 K 的差分格式为^[14]

$$K^{n-1/2} = \frac{C_{Vi}^{n-1/2}}{\beta^{n-1/2} \Delta t^{n-1/2}} \left(\zeta^{n-1} - \frac{\varphi^{n-1/2}}{\alpha^{n-1/2} \beta^{n-1/2}} \right) (1 - e^{-\omega^{n-1/2} \beta^{n-1/2} \Delta t^{n-1/2}}) + \frac{C_{Vi}^{n-1/2} \varphi^{n-1/2}}{\beta^{n-1/2}}, \quad (59)$$

$$\varphi^{n-1/2} = \frac{\zeta^n - \zeta^{n-1}}{\Delta t^{n-1/2}} + \left(\frac{\beta^{n-1/2}}{C_{Vi}^{n-1/2}} \right) K^{n-1/2}, \quad (60)$$

$$\zeta = T_i - T_e, \quad (61)$$

$$\beta = 1 + C_{Vi}/C_{Ve}. \quad (62)$$

空间下标 i 均省略。为了看出 φ 的物理意义可以将电子和离子的温度方程写成

$$C_{Ve} \frac{dT_e}{dt} = W_e + K, \quad C_{Vi} \frac{dT_i}{dt} = W_i - K, \quad (63)$$

$$\varphi = W_i/C_{Vi} - W_e/C_{Ve}. \quad (64)$$

在迭代法求解中利用了(59)–(62)式。

3) 人为粘性项 Q_a

$$Q_{al}^{n-1/2} = -q_l^{n-1/2} \frac{V_l^n - V_l^{n-1}}{\Delta t^{n-1/2}}, \quad (65)$$

$q_l^{n-1/2}$ 是人为粘性压力, 形式为^[15]

$$q_l^{n-1/2} = \begin{cases} 2a^2(U_{l+1}^{n-1/2} - U_l^{n-1/2})^2 / (V_l^n + V_l^{n-1}) & \partial r(\nabla \cdot U)_r < 0, \partial r(\nabla \cdot U)_r < 0 \text{ 同时满足;} \\ 0 & \text{除上述条件以外情况。} \end{cases} \quad (66)$$

这里

$$\partial r(\nabla \cdot U)_r = U_{l+1}^{n-1/2} - U_l^{n-1/2}, \quad (67)$$

$$\partial r(\nabla \cdot U)_r = \frac{1}{2(r_{l+1/2}^{n-1/2})^2} \{ U_{l+1}^{n-1/2} [(r_{l+1}^{n-1})^2 + (r_{l+1}^{n-1})^2] - U_l^{n-1/2} [(r_l^{n-1})^2 + (r_l^{n-1})^2] \}, \quad (68)$$

$$r_{l+1/2}^{n-1/2} = \frac{1}{4} (r_{l+1}^n + r_{l+1}^{n-1} + r_l^n + r_l^{n-1}), \quad (69)$$

a 是一个可调节的参数。

(3) 聚变方程 在 $\Delta t^{n-1/2}$ 时间间隔 f_k 的变化为

$$\delta f_{kl}^{n-1/2} = f_{kl}^n - f_{kl}^{n-1}. \quad (70)$$

根据(24)式有

$$\delta f_{kl}^{n-1/2} = (\delta n_{kl}^{n-1/2} - f_{kl}^{n-1} \delta n_{kl}^{n-1/2}) / n_{kl}^{n-1}, \quad (71)$$

$$n_{kl}^{n-1} = \rho_l^{n-1} / (m_H M_l^{n-1}). \quad (72)$$

解(70), (71)式同样用迭代法。每一步求出的 f_k 还必须归一化, 即使 f_k 满足

$$\sum_k f_k = 1. \quad (73)$$

为此必须将得到的 f_{kl}^n 再进行一次运算

$$f_{kl}^n = f_{kl}^n / \sum_k f_{kl}^n. \quad (74)$$

由于中子从靶丸中逃逸,因而对高度燃烧的靶丸还必须在每一步做质量减少的修正:

$$\Delta M_l^n = [(r_{j+1}^n)^3 - (r_j^n)^3] \cdot [\rho_l^n + (\delta n_i)_l^{n-1/2} m_H], \quad (75)$$

其中用 δn_i 代替了 δn_n , 因为中子的逃逸数与离子的损失数相当。

2. 温度方程解法

利用追赶法解温度方程^[15],先可将温度方程整理成下述形式:

$$-A_l^n T_{l+1}^n + B_l^n T_l^n - C_l^n T_{l-1}^n = D_l^n + G_l^{n-1}, \quad (76)$$

A, B, C, D, G 是不含未知温度的系数,上标表示与那一时间层次的变量有关。

$$A_l^n = \frac{1}{\Delta M_l} \frac{(r_{j+1}^n)^2 \kappa_{j+1}^n}{r_{j+2}^n - r_j^n} \Delta t^{n-1/2} \quad l = 1, \dots, N-1; \quad (77)$$

$$C_l^n = \frac{1}{\Delta M_l} \frac{(r_j^n)^2 \kappa_j^n}{r_{j+1}^n - r_{j-1}^n} \Delta t^{n-1/2} \quad l = 2, \dots, N; \quad (78)$$

$$B_l^n = \frac{1}{2} (C_{l-1}^{n-1} + C_l^n) + A_l^n + C_l^n + \frac{(T p_l)_l^n}{2 T_l^n} (V_l^n - V_{l-1}^{n-1}). \quad (79)$$

对于离子有

$$D_{il}^n = D_{il}^{n-1} - K_l^{n-1/2} \Delta t^{n-1/2}, \quad (80)$$

$$G_{il}^{n-1} = G_{il}^{n-1} + Q_{il}^{n-1/2} \Delta t^{n-1/2}. \quad (81)$$

对于电子有

$$D_{el}^n = D_{el}^{n-1} + K_l^{n-1/2} \Delta t^{n-1/2} + \frac{1}{2} (X_l^n + J_l^n) \Delta t^{n-1/2}, \quad (82)$$

$$G_{el}^{n-1} = G_{el}^{n-1} + \frac{1}{2} (X_{l-1}^{n-1} + J_{l-1}^{n-1}) \Delta t^{n-1/2}. \quad (83)$$

这里

$$D_{il}^n = \frac{1}{2} [Y_l^n \Delta t^{n-1/2} - (T p_l)_l^n (V_l^n - V_{l-1}^{n-1}) + (C_{il}^n + C_{il}^{n-1}) T_l^{n-1}], \quad (84)$$

$$G_{il}^{n-1} = \frac{1}{2} Y_l^{n-1} \Delta t^{n-1/2} + A_l^{n-1} (T_{l+1}^{n-1} - T_l^{n-1}) - C_l^{n-1} (T_l^{n-1} - T_{l-1}^{n-1}). \quad (85)$$

根据内外边界上的绝热边界条件(见下节)有

$$C_1^n = A_N^n \equiv 0. \quad (86)$$

令

$$E_1 = \frac{A_1}{B_1}, \quad F_1 = \frac{D_1 + G_1}{B_1}; \quad (87)$$

$$E_l = \frac{A_l}{B_l - C_l E_{l-1}}, \quad F_l = \frac{D_l + G_l + C_l F_{l-1}}{B_l - C_l E_{l-1}} \quad l = 2, \dots, N. \quad (88)$$

于是温度即可从下面两式求出:

$$T_N = F_N, \quad (89)$$

$$T_l = E_l T_{l+1} + F_l \quad l = N-1, \dots, 1. \quad (90)$$

3. 界面的处理

(1) 外边界 $p_N^n \equiv 0$, 无热流(绝热). (91)

(2) 内边界 1) $r_i^n = 0$ 则 $U_i^n \equiv 0$, 无热流(绝热). (92)

2) $r_i^n \neq 0$ 则 $p_i^n \equiv 0$, 无热流(绝热). (93)

(3) 内界面 $\frac{\partial p}{\partial r}$, $\kappa \frac{\partial T}{\partial r}$ 均连续.

4. Δt 的控制

为了保证解的稳定以及方程(47)保持中心差分, 必须对 Δt 进行限制. 限制 Δt 的要求为

(1) $\Delta r/\Delta t$ 应不小于流体力学扰动在等离子体中的传播速度, 即显式流体力学差分方程稳定的 Courant Friedrichs-Lowy 条件^[15].

(2) Δt 必须在某一范围内变化, 即

$$\Delta t^{n-1/2}/b = \Delta t_{\min} \leq \Delta t^{n+1/2} \leq \Delta t_{\max} = b \Delta t^{n-1/2}, \quad (94)$$

其中 b 为 ≥ 1 的正数.

(3) 保证 V, T_i, T_e (简并时是 p_e) 的变化低于某一数值.

如今

$$L_1^n = \max_i [(V_i^n p_i^n)^{1/2} / \Delta r_i^n], \quad (95)$$

$$L_2^n = \max_i [(V_i^n - V_i^{n-1}) / (V_i^n + V_i^{n-1})], \quad (96)$$

$$L_3^n = \max_i [(T_i^n - T_i^{n-1}) / (T_i^n + T_i^{n-1})]. \quad (97)$$

(97) 式应分别对离子和电子求值. 于是 $\Delta t^{n+1/2}$ 可求得为

$$\Delta t^{n+1/2} = \max[\Delta t_{\min}, \min(\Delta t_{\max}, a_1/L_1^n, a_2 \Delta t^{n-1/2}/L_2^n, a_3 \Delta t^{n-1/2}/L_3^n)]. \quad (98)$$

上式中 a_1, a_2, a_3 是三个可调节的参数. a_1 的选择可参考文献 [15].

5. 系统状态检验

为了便于及时发现计算中的问题, 在每一步计算完毕时, 都要算出有关的能量并核对一下所有的能量是否守恒. 具体的计算可参考文献 [5], 在此不再详述.

此外还计算了劳逊判据

$$\int_0^{r_0} \rho dr = (\rho r). \quad (99)$$

差分形式为

$$(\rho r)^n = \sum_i \rho_i^n \Delta r_i^n, \quad (100)$$

$$\Delta r_i^n = r_{i+1}^n - r_i^n. \quad (101)$$

6. 计算框图

程序中, 计算次序由图 2 中的计算框图说明.

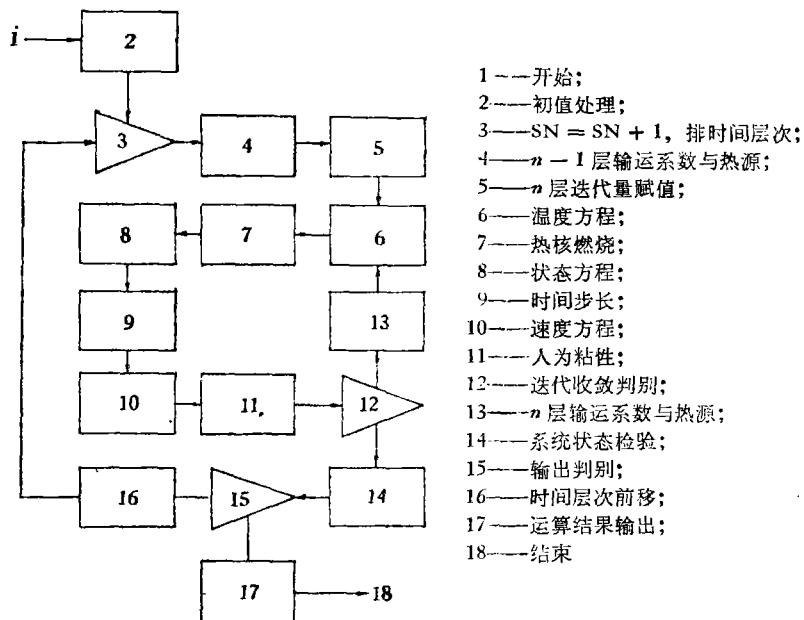


图 2 表示运算次序的计算框图

三、初步计算结果

我们在 TQ-16 机上计算了三种不同的物理过程, 靶丸均由 D-T 等离子体组成。与国外类似计算^[12,16]比较, 结果大体相符。

以下几个计算实例。

1. 均匀压缩与加热靶丸的热核燃烧。见表 2 中列 1 和例 2。
2. 具有中心热斑靶丸的热核燃烧。见表 2 中第 3 例。表中列出的初始密度和温度是热斑以外等离子体所具有的。中心热斑质量是 1.0 微克, 初始温度 20 千电子伏, 密度 6000 克/厘米³。

表 2 靶丸的初始条件以及计算结果(初始温度电子与离子相同)

例	总质量 (微克)	初始密度 (克/厘米 ³)	初始温度 (千电子伏)	热核能量产额 (千焦耳)	最高离子温度 (千电子伏)
1	1.0	3000	20	59.8	144
2	107.2	2000	5	12.9×10^3	280
3	10.0	6000	1	1220	230

3. 在激光辐照下靶丸压缩和聚变的全过程

激光脉冲取最佳波形, 其功率随时间的变化由下式给出:

$$\dot{E}_L = \dot{E}_{L_0} (1 - \tau/\tau)^{-p}. \quad (102)$$

初始功率 \dot{E}_{L_0} 等于 5.25×10^9 瓦特, 激光总能量 7 千焦耳, 波长 10.6 微米, 靶丸初始密度 0.213 克/厘米³, 半径 203 微米, 质量 7.5 微克。热流限制因子(见(35)式) $\beta = 0$ 。 (102)

式中的 $\tau = 8.6$ 毫微秒, $p = 1.875$.

图 3 中八组曲线表示了在该靶丸压缩和燃烧过程中不同时刻密度和温度的分布。聚变能量增益 Y_R 等于热核反应释放的能量与靶丸所吸收的激光能之比, 它在不同时刻的值由每幅图内所标的数字表示。最后的中子产额 3.2×10^{16} 个。这个过程还不是该能量下最佳爆聚, 如果在初始功率的上述值附近仔细调整, 可以得最佳的爆聚, 聚变能量增益和中子产额大约还能增高数倍。

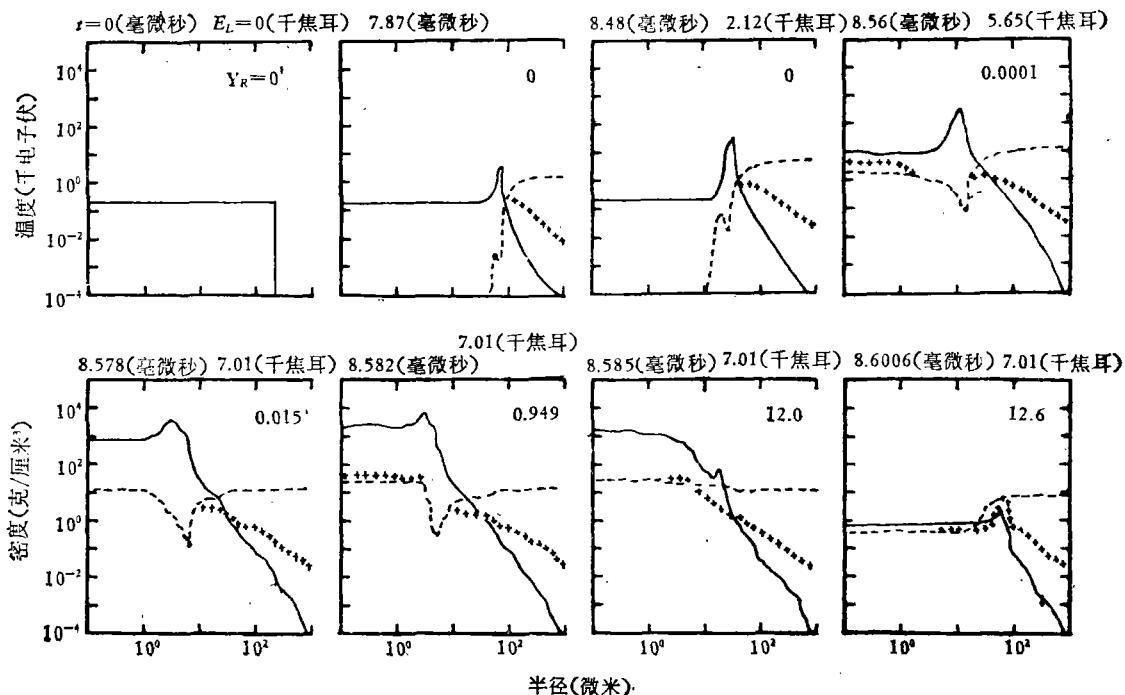


图 3 靶丸爆聚过程中, 不同时刻密度与温度分布

左方数字表示时间(单位: 毫微秒), 右方数字表示该时刻吸收的激光能量(单位: 千焦耳)。

——为密度 ρ (克/厘米 3); - - - 为电子温度 T_e (千电子伏); + + + + 为离子温度 T_i (千电子伏)

四、结语

由初步的数值计算结果, 可将激光核聚变的大致图象勾划如下(参阅图 3): 在一个很短的时间里(与激波从靶面传至中心的时间相当), 强激光脉冲球形辐照含有热核燃料(氘、氚)的等离子体靶丸; 激光能量主要在外围临界密度处被等离子体吸收, 首先被加温的是电子, 也通过电子与离子的能量交换加热离子; 被加热的外围等离子体即向外喷射(消融), 同时由于反冲作用产生向中心传播的压缩激波, 向内传导的热波在激波后面; 恰当地选择最佳的激光波形可产生一系列追赶的激波, 它们最后同时到达靶心, 使等离子体靶丸中心接近等熵地压缩到极高的密度, 并局部达到热核温度; 首先在靶丸中心部分点燃热核反应, 并在高密度靶丸的惯性约束时间内, 通过电子热传导和 α 粒子能量的再吸收使

热核反应传遍靶丸, 从而获得足够的能量增益。最后须指出的是: 整个激光聚变的物理图象是非常复杂的, 一些重要的过程在理论上和在实验上正在探索之中; 本工作在物理上主要是考虑了在球对称的情况下等离子体本身的一些最重要的能量输运过程、流体力学运动和热核反应, 这在纯粹是氘氚等离子体条件下并忽略多维效应时, 可以认为是满意的。

工作中曾得到中国科学院上海光学精密机械研究所杨熙承、徐至展、谭维翰同志的帮助以及计算机房的大力支持。上海科学技术大学潘仲雄老师提出了许多宝贵的意见和积极的建议。在此一并表示衷心的感谢。

附录一

一维球对称粘性流运动方程(7)和能量方程(11)的推导

粘性流运动方程的普遍形式为

$$\rho \frac{d\mathbf{U}}{dt} = -(\nabla p + \nabla \cdot \mathbf{q}), \quad (A.1)$$

其中 p 是标量压力, \mathbf{q} 是粘性压力张量, 速度 $\mathbf{U} = \frac{dr}{dt}$ 。用 \mathbf{q} 在球坐标下的各分量代入(A.1)式, 当与 θ, φ 无关时(即球对称情况), 该式化为

$$\rho \frac{dU_r}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 q_{rr}) + \frac{1}{r} (q_{\theta\theta} + q_{\varphi\varphi}), \quad (A.2)$$

其中 U_r 是径向速度, $q_{\theta\theta}$ 是 \mathbf{q} 的相应分量:

$$q_{rr} = -\mu \left[2 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial r} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{U}) \right] = -\frac{4}{3} \mu \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{4}{3} \frac{\mu U_r}{r}, \quad (A.3)$$

$$q_{\theta\theta} = -\mu \left[2 \frac{U_r}{r} - \frac{1}{3} \left(\frac{4U_r}{r} + 2 \frac{\partial U_r}{\partial r} \right) \right] = q_{\varphi\varphi}. \quad (A.4)$$

将(A.3)和(A.4)式代入(A.2)式, 展开并进行整理:

$$\begin{aligned} \rho \frac{dU}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu \frac{\partial U}{\partial r} \right) - \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\mu U}{r} \right) + 4 \frac{\mu}{r} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{4\mu U}{r^2} \\ &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{8}{3} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\mu U}{r} \right) - 4 \frac{U}{r} \frac{\partial \mu}{\partial r} \\ &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(p - \frac{4}{3} \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial(r^2 U)}{\partial r} \right) - 4 \frac{U}{r} \frac{\partial \mu}{\partial r}. \end{aligned} \quad (A.5)$$

以上运算式中, U 即径向速度 U_r 。利用连续性方程 $\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{U}$, 上式可进一步化成

$$\rho \frac{dU}{dt} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(p + \frac{4}{3} \frac{\mu}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \right) - 4 \frac{U}{r} \frac{\partial \mu}{\partial r}. \quad (A.6)$$

这就是(7)式。

再考虑单位体积的能量守恒方程(即(10)式)

$$\rho \frac{d}{dt} \left(E + \frac{U^2}{2} \right) = -\nabla \cdot (p \mathbf{U} + \mathbf{q} \cdot \mathbf{U}) + \rho S, \quad (A.7)$$

式中各符号表示的物理量已在正文中说明, 上式可进一步化成

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot (p \mathbf{U}) - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\mathbf{q} \cdot \mathbf{U}) - U \frac{dU}{dt} + S. \quad (A.8)$$

以下各步与 S 项无关, 暂且将它略去。考虑一维球对称的情况 $U_\theta = U_\varphi = 0$, $U = U_r$, 并且对 θ 和 φ 求导数的项也为零, 则(A.8)式就变成

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{U}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} p - \frac{p}{\rho r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 U) - \frac{1}{\rho r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 U q_{rr}) - U \frac{dU}{dt}. \quad (A.9)$$

利用(A.3)式和(A.6)式展开(A.9)式并进行适当整理:

$$\begin{aligned}
 \frac{dE}{dt} &= -\frac{U}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{p}{\rho r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 U) + \frac{1}{\rho r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{4}{3} r^2 U \mu \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{4}{3} r \mu U^2 \right) \\
 &\quad + \frac{U}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} \left(\rho + \frac{4}{3} \frac{\mu}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \right) + 4 \frac{U^2}{\rho r} \frac{\partial \mu}{\partial r} \\
 &= -\frac{p}{\rho r^2} \frac{\partial(r^2 U)}{\partial r} - \frac{8}{3} \frac{U}{\rho} \frac{\mu}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{4}{3} \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 + \frac{4}{3} \frac{U^2 \mu}{\rho r^2} \\
 &= -p \frac{\rho \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 U)}{\rho^2} + \frac{4}{3} \frac{\mu}{\rho} r^2 \left[\frac{r \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right) - U}{r^2} \right]^2. \tag{A.10}
 \end{aligned}$$

再次利用球对称运动的连续性方程就得到

$$\frac{dE}{dt} = -p \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) + \frac{4}{3} \frac{\mu}{\rho} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{U}{r} \right) \right]^2. \tag{A.11}$$

在此式中再添上 S 项就是正文中 (11) 式。

附 录 二

p_y, C_y 计 算

根据量子统计可以得到⁽¹¹⁾

$$p_e/kT = \frac{4\pi}{h^3} \int dp_e p_e^2 \log [1 + z \exp(-p_e^2/2m_e kT_e)], \tag{A.12}$$

$$\frac{1}{v} = \frac{4\pi}{h^3} \int dp_e p_e^2 [z^{-1} \exp(p_e^2/2m_e kT_e) + 1]^{-1}, \tag{A.13}$$

$$z = e^{\mu/kT}, \quad v = V/N_e, \tag{A.14}$$

μ 是化学势, V 是体积, N_e 是该体积内所包含的电子数。于是, 经过简单推导就可以求出

$$p_y = 2\zeta^{3/2} I_4, \tag{A.15}$$

$$C_y = 5\zeta^{3/2} I_4 - \zeta^{5/2} (3I_2)^{5/2} \frac{H_4}{H_2}, \tag{A.16}$$

$$\zeta = (3I_2)^{-2/3}. \tag{A.17}$$

这里 I_2, I_4, H_2, H_4 是四个广义积分, 形式为

$$I_2 = \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{1 + z^{-1} e^{x^2}}, \quad I_4 = \int_0^\infty \frac{x^4 dx}{1 + z^{-1} e^{x^2}}, \tag{A.18}$$

$$H_2 = \int_0^\infty \frac{x^2 z^{-2} e^{x^2}}{(1 + z^{-1} e^{x^2})^2} dx, \quad H_4 = \int_0^\infty \frac{x^4 z^{-2} e^{x^2}}{(1 + z^{-1} e^{x^2})^2} dx. \tag{A.19}$$

通过对 (A.15) 至 (A.19) 式的数值积分, 就可以得出 p_y, C_y 的数值表, 见表 3。

表 3 p_y, C_y 插值表

ζ	11.3	5.47	2.53	1.66	1.11	0.701	0.403	0.304	0.232	0.209
p_y	1.00	1.01	1.03	1.06	1.11	1.22	1.49	1.73	2.07	2.23
C_y	0.998	0.995	0.984	0.969	0.946	0.897	0.788	0.709	0.616	0.574

附 录 三

费密分布归一化因子的数值计算

(33) 式中的归一化因子 A 的定义为

$$n_e = \pi^{-2} (2\pi m_e/h)^3 \int v_e^2 [1 + A \exp(m_e v_e^2/2kT_e)]^{-1} dv_e. \tag{A.20}$$

为了便于计算, 可将 (A.20) 式化为下面两式:

$$I = \int_0^\infty y^2 (1 + A \exp y^2)^{-1} dy, \tag{A.21}$$

$$\xi = (3I)^{-1/3}. \quad (A.22)$$

对(A.21)和(A.22)式做数值计算可得 A 的数值表(见表4)。

表4 归一化因子 A 的插值表

ξ	11.3	7.14	5.47	3.93	2.53	1.66	0.989	0.701
A	50	25	16.7	10	5.0	2.5	1.0	0.5
ξ	0.520	0.374	0.304	0.255	0.209	0.142	0.108	
A	0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.001	0.0001	

参 考 文 献

- [1] J. Nuckolls *et al.*, *Nature*, **239** (1972), No. 5368, 139.
- [2] K. A. Brueckner, KMSF-NP5, KMS Fusion Inc. (1972).
- [3] J. S. Clarke *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **30** (1973), 89.
- [4] R. E. Kidder *et al.*, UCRL-50583 (1969).
- [5] J. P. Christiansen *et al.*, CLM-R130 (1973).
- [6] K. A. Brueckner and S. Jorna, *Rev. Mod. Phys.*, **46** (1974), No. 2, 325.
- [7] H. Brysk *et al.*, *Plasma Phys.*, **17** (1975), 473.
- [8] S. I. Braginskii, "Transport Processes in a Plasma", in *Reviews of Plasma Physics* Vol. 1, edited by M. A. Leontovich, 1965.
- [9] L. Spitzer, *Physics of Fully Ionized Gases*, Interscience, New York, 2nd ed., 1962.
- [10] R. J. Bickerton, *Nucl. Fusion*, **13** (1973), 457.
- [11] R. E. Kidder, "Interaction of intense photon and electron beams with plasma", in *Proc. of the Internat. School of Physics "Enrico Fermi"*, Course XLVIII, 1971.
- [12] O. N. Jarvis, AERE-R8113, 1976.
- [13] David Potter, *Computational Physics*, London, 1973.
- [14] J. P. Christiansen, *J. Comput. Phys.*, **17** (1975), 332.
- [15] R. D. Richtmyer *et al.*, *Difference Methods for Initial-Value Problems*, New York, 2nd ed., 1967.
- [16] R. J. Maron and R. L. Mose, *Physics of Fluid*, **18** (1975), 814.
- [17] Kerson Huang, *Statistical Mechanics*, New York, 1964.

LASER FUSION SIMULATION

LIN ZHONG-HENG

(University of Science and
Technology of China)

YIN GUANG-YU

(Shanghai Institute of Optics and
Fine Mechanics, Academia Sinica)

ABSTRACT

In this paper a simple physical model of laser fusion is described, a computer program utilizing the model can be used to simulation hydrodynamical behavior and nuclear fusion yield of plasma pellet target irradiated by intense laser light. At the same time, the related calculation scheme and structure of code is discussed, and some numerical simulation results is presented also.