

激光束在漫射表面上的散射*

程 路

(南开大学物理系)

提 要

本文运用文献[1]的原理,对下列三种情况进行了讨论和推导,并给出相应测量装置的结构示意图:1.柱面表面,一维随机道痕,道痕垂直于柱面母线;2.平面表面,二维随机起伏;3.凸、凹球面表面,二维随机起伏。

一、原则性的概括

根据文献[1]的分析,可将高斯光束在一般形状的漫射表面上的散射规律加以概括如

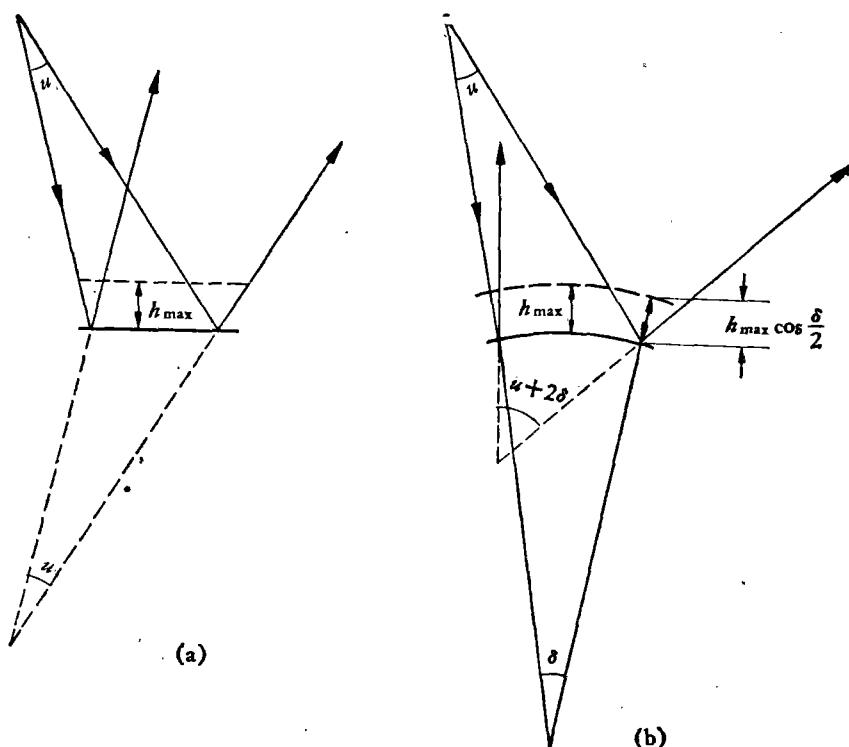


图 1

* 1978年6月8日收到。

下。相干波场投射在漫射表面上之后，真实表面任何一处所发出的次波的位相 Φ_n 可分为两项之和：

$$\Phi_n = \Psi_n + H_n,$$

其中 Ψ_n 是对应于理想表面的规则变量， H_n 是与表面起伏的统计性质有关的随机变量。

将来自真实表面上各面元的元波对接收面上某点进行相干迭加，对应着复平面上的一个“行走”问题，其中 Ψ_n 对应于规则行走部分，其作用相当于理想表面造成的反射场，可以用高斯光束经过规则表面反射的过渡公式来处理。 H_n 的作用产生一个散射项，它在行走问题中的作用是，使得某一步的方向角在区间 $[\Psi_n - H, \Psi_n + H]$ 内以一定概率分布出现，其中 H 是诸 H_n 的上限，它与表面起伏的大峰高度 h_{\max} 存在一定的对应关系，而 h_{\max} 对应着光洁度级次。当理想表面为曲面时，如果入射光斑尺寸 g 远小于表面曲率半径 r ，且接收面距投射区较远，则投射区域各处的大峰高度 h_{\max} 在平行光干涉方向上的投影高度互相间的相对差别为 $1 - \cos \delta/2$ 的量级，其中 $\delta = g/r$ 为一小量（见图 1 (b)），因而 $1 - \cos \delta/2$ 为二阶小量，可以忽略。但是，角度 δ 将使几何反射光束的发散角从平面情况下的 u （图 1 (a)）变为 $u + 2\delta$ （图 1 (b)），此变化量不可忽略，因为它将导致接收面上核心光斑尺寸变化一个有限量。

由以上分析得出如下结论：当从平面表面过渡到一般曲面时，只需对核心光斑的对应项加以改变，而散射项与平面情况相同。

二、柱面一维道痕

设有圆柱形工件表面 S ，截圆的半径为 r （图 2），柱面上具有一维道痕，道痕方向垂直于柱面母线。高斯光束投射在柱面上，光束轴 OQ 亦与母线垂直。以投射点 o 为原点作一直角坐标系， x 轴沿母线方向， y 轴垂直于柱面， z 轴沿道痕切线方向。光束的入射角为 γ 。 oQ 为理想柱面的几何反射线。 D_1 为过 Q 点并与 oQ 垂直的平面，即接收面。 ξ, ζ 为接收面上的直角坐标， ξ 轴与 x 轴平行。

由于道痕垂直于母线，所以只在 ξ 维度上有散射效应；而在 ζ 维度上，可按理想柱面反射处理。若柱面半径 r 远大于 o 点处的光斑尺寸 ω_{s1} ，则由第一节中的原则可知，在 ξ 维度上散射光强的分布公式与平面工件的情况一致。与平面的区别仅在于，图 2 中接收面上的光强分布在 ζ 方向上变宽，核心光斑沿 ζ 方向拉长呈椭圆。

如果用一个柱面透镜 C 将散射光束沿 ζ 维度适当加以会聚（图 3），则可将散射光会聚在接收面上沿 ζ 方向的一定宽度之内，这

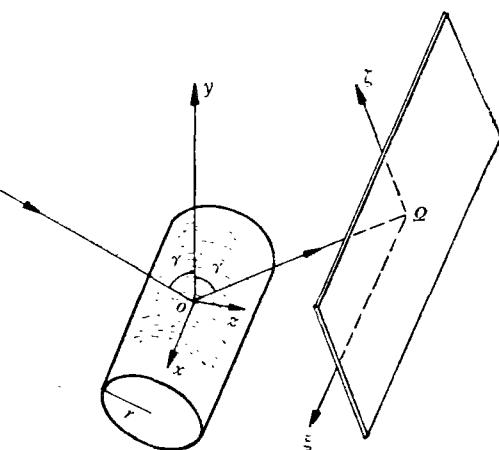


图 2

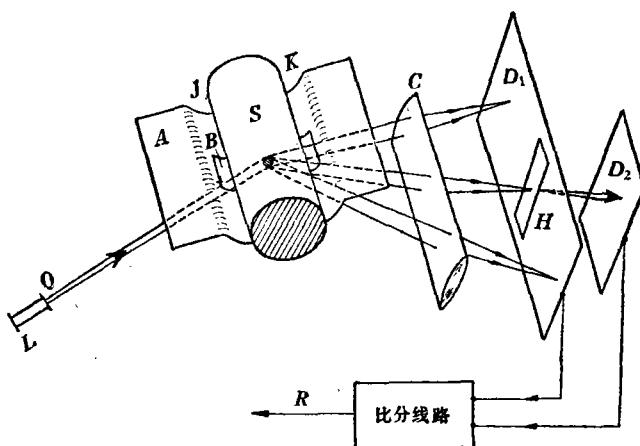


图 3

样便可采用双接收器 D_1, D_2 (见文献 [1] 图 6) 的装置测定比值 R 以确定光洁度。

为了保证投射点在空间固定 (以使反射线的走向恒定), 建议采用图 3 所示的装置。图中 A 为载物台, 它有一段下凹的弧形部分 JK 。柱体 S 总要处于下凹部分的最低点。在下凹部分, 于投射点 o 处开一个透光窗 B 。 C 为柱面透镜; D_1 为前接收器, 它接收散射光; D_1 上开一个长孔 H , 使核心光能由此穿过而射到后接收器 D_2 上。孔 H 沿 ξ 轴之半宽度可取 $2\omega_{s2}$, 其中 ω_{s2} 为理想反射光束在 ξ 方向上的半宽度。

文献 [1] 中的公式现在完全适用。

柱体 S 不必是圆柱, 只要投射点 o 处柱面的曲率半径 $r \gg \omega_{s1}$ 即可。

三、平面二维起伏

对于抛磨型工件, 在大多数情况下其表面的随机起伏总是以道痕形式出现的。无规则二维起伏的例子是化学腐蚀的表面。现在应用文献 [1] 中的简化统计模型来处理平面二维随机起伏表面高斯光束的散射。

在工件表面上以投射中心点 o 为原点设直角坐标系(参见图 5)。 xoz 平面为理想表面(图 4)。用下列两组直线:

$$x = \left(m + \frac{1}{2} \right) \lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

$$z = \left(n + \frac{1}{2} \right) \lambda, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

将表面分成边长为 λ 的许多小正方形。用 G_{mn} 表示由 $x = \left(m \pm \frac{1}{2} \right) \lambda$ 和 $z = \left(n \pm \frac{1}{2} \right) \lambda$ 所围

的元正方形, 其中心点为 $P_{mn}(m\lambda, n\lambda)$ 。

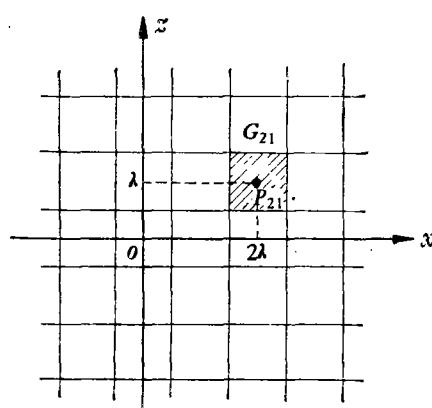


图 4

将工件的理想平均平面取作 $y = 0$ 平面。对于每一面元 G_{mn} , 取一个平均高度 h_{mn} , 它是 G_{mn} 上各点处真实表面的 y 坐标的平均值。与文献 [1] 类似, 对诸随机变量 h_{mn} 的统计性质作如下假定:

1. 不同面元的 h_{mn} 互相独立, 即

$$\langle h_{st} h_{uv} \rangle = c \delta_{su} \delta_{tv}; \quad (1)$$

2. 诸 h_{mn} 的概率密度分布皆相同, 为

$$P_{h_{mn}}(\tau) = \begin{cases} e^{-\beta|\tau|} & \text{当 } |\tau| \leq h; \\ 0 & \text{当 } |\tau| > h. \end{cases} \quad (2)$$

对于二维情况, (2) 式中的 h 与大峰高度 h_{\max} 之间的关系与一维情况有所不同, 应为

$$h = \begin{cases} h_{\max}^2 / \lambda & \text{当 } h_{\max} \leq \lambda; \\ h_{\max} & \text{当 } h_{\max} > \lambda. \end{cases} \quad (3)$$

道理如次: 当 $h_{\max} \leq \lambda$ 时, 可近似认为每 λ^2 面积相当于大峰的数目为 h_{\max}^2 / λ^2 , 而按照随机起伏的统计规律, 平均偏差 h 应随统计对象数目的平方根而降低, 因而

$$h = h_{\max} \cdot \sqrt{h_{\max}^2 / \lambda^2} = h_{\max}^2 / \lambda;$$

而当 $h_{\max} > \lambda$ 时, $h = h_{\max}$ 。(参看文献 [1], 第二节)

令 Q_{mn} 点的坐标为

$$Q_{mn}(m\lambda, h_{mn}, n\lambda). \quad (4)$$

以下用诸元波的干涉来推导接收面上某点 P 处光强的期望值。

设高斯光束的束腰到投射点 o 的距离为 a , 投射点处波面的几何球心位于 s (图 5), s 点的坐标为

$$s(0, y_s, -z_s), \quad (5)$$

则

$$y_s / \sqrt{y_s^2 + z_s^2} = \cos \gamma, \quad (6)$$

$$z_s / \sqrt{y_s^2 + z_s^2} = \sin \gamma, \quad (7)$$

其中 γ 为入射角。且有

$$\sqrt{y_s^2 + z_s^2} = a \left[1 + \left(\frac{k \omega_0^2}{2a} \right)^2 \right], \quad (8)$$

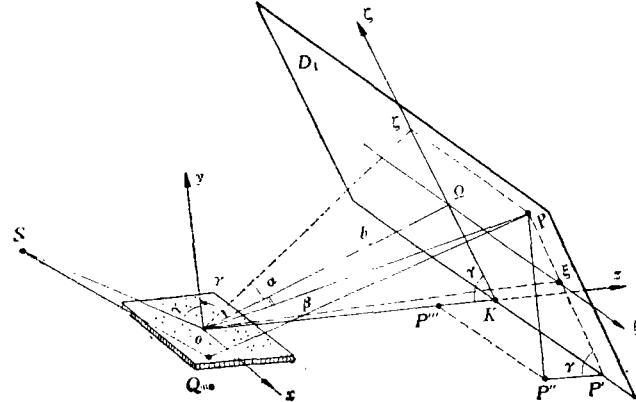


图 5

其中 $k = 2\pi/\lambda$, ω_0 为光束束腰半径。

图 5 中 oQ 为光轴的几何反射线,

$$oQ = b. \quad (9)$$

接收面 D_1 与 oQ 垂直, 在 D_1 上设直角坐标系 $\xi\zeta$, ξ 轴与 x 轴平行。令接收面上某点 P 的坐标为

$$\text{在 } xyz \text{ 系: } P(x_p, y_p, z_p), \quad (10)$$

$$\text{在 } \xi\zeta \text{ 系: } P(\xi, \zeta). \quad (11)$$

由几何关系可得

$$x_p = \xi = b \operatorname{tg} \theta, \quad (12)$$

$$\zeta = b \operatorname{tg} \alpha, \quad (13)$$

$$y_p = b(\cos \gamma + \operatorname{tg} \alpha \sin \gamma), \quad (14)$$

$$z_p = b(\sin \gamma - \operatorname{tg} \alpha \cos \gamma). \quad (15)$$

$$\text{令 } \mathcal{M} = \cos \gamma + \operatorname{tg} \alpha \sin \gamma, \quad \mathcal{N} = \sin \gamma - \operatorname{tg} \alpha \cos \gamma, \quad (16)$$

$$\text{则 } x_p = b \operatorname{tg} \theta, \quad y_p = b \mathcal{M}, \quad z_p = b \mathcal{N}. \quad (17)$$

令 $SoP = So + oP$ 为参考光程, 于是

$$SoP = So + oP = \sqrt{y_s^2 + z_s^2} + b \sqrt{\operatorname{tg}^2 \theta + \mathcal{M}^2 + \mathcal{N}^2}. \quad (18)$$

与 Q_{mn} 点对应的光程为 $SQ_{mn}P = SQ_{mn} + Q_{mn}P$, 其中[对照(4),(5)两式]:

$$SQ_{mn} = \sqrt{m^2 \lambda^2 + (y_s - h_{mn})^2 + (z_s + n\lambda)^2}, \quad (19)$$

$$Q_{mn}P = \sqrt{(b \operatorname{tg} \theta - m\lambda)^2 + (b \mathcal{M} - h_{mn})^2 + (b \mathcal{N} - n\lambda)^2}. \quad (20)$$

实际上, 在投射光斑范围内, $m\lambda, n\lambda \ll b, z_s$, 且 $h_{mn} \ll b, y_s$. 现将根式(19)和(20)作泰勒展开, 取至 $m\lambda, n\lambda$ 和 h_{mn} 的一次项, 则得

$$SQ_{mn} \doteq \sqrt{y_s^2 + z_s^2} + \frac{1}{\sqrt{y_s^2 + z_s^2}} (n\lambda z_s - h_{mn} y_s), \quad (21)$$

$$Q_{mn}P \doteq b \sqrt{\operatorname{tg}^2 \theta + \mathcal{M}^2 + \mathcal{N}^2} - \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \theta + \mathcal{M}^2 + \mathcal{N}^2}} [\lambda(m \operatorname{tg} \theta + n \mathcal{N}) + h_{mn} \mathcal{M}]. \quad (22)$$

令光程差 $\Delta = SQ_{mn}P - SoP$, 则从(19)–(22)式并利用(6)和(7)式可得

$$\Delta = [-m\Gamma \operatorname{tg} \theta + n(\sin \gamma - \Gamma \mathcal{N})]\lambda - (\cos \gamma + \Gamma \mathcal{M})h_{mn}, \quad (23)$$

其中

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \theta + \mathcal{M}^2 + \mathcal{N}^2}}. \quad (24)$$

由于高斯光束入射在 Q_{mn} 处的振幅为(略去常量因子, 下同)

$$A_{mn} = \exp [-(m^2 + n^2 \cos^2 \gamma) \lambda^2 / \omega_{s1}^2], \quad (25)$$

其中 ω_{s1} 为 o 点处的光斑半径。于是导出 P 点的合成波场为

$$U(P) = \frac{1}{oP} \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \exp [-(m^2 + n^2 \cos^2 \gamma) \lambda^2 / \omega_{s1}^2] \cdot \exp \left(\frac{2\pi i}{\lambda} \Delta \right), \quad (26)$$

其中 $oP = b/\Gamma$.

令

$$\Psi_{mn} = 2\pi[-m\Gamma \operatorname{tg}\theta + n(\sin\gamma - \Gamma \mathcal{N})], \quad (27)$$

$$H_{mn} = -\frac{2\pi}{\lambda}(\cos\gamma + \Gamma \mathcal{M})h_{mn}, \quad (28)$$

则

$$U(P) = U(\theta, \alpha)$$

$$= \frac{\Gamma}{b} \sum_{m, n=-\infty}^{\infty} \exp[-(m^2 + n^2 \cos^2\gamma)\lambda^2/\omega_{s1}^2] \exp[i(\phi_{mn} + H_{mn})]. \quad (29)$$

其中随机变量 H_{mn} 的概率分布可按照 (28) 式由 h_{mn} 的概率分布而得出

$$P_{H_{mn}}(\tau) = \begin{cases} e^{-\beta|\tau|} & \text{当 } |\tau| \leq H; \\ 0 & \text{当 } |\tau| > H, \end{cases} \quad (30)$$

其中

$$H = \frac{2\pi}{\lambda}(\cos\gamma + \Gamma \mathcal{M})h. \quad (31)$$

(29)式对应着幅相平面上的一个“行走问题”。我们将行走中的任一步(第 m, n 步)分为两个分步来走(见图 6)：

第一分步为一规则步子，方向为 Ψ_{mn} ，步长为 $\rho_{mn} = oC$ ，其中 C 为弧 AA' 的质心，弧 AA' 之线密度分布如(30)式所表；弧 AA' 之半径为

$$R_{mn} = \exp[-(m^2 + n^2 \cos^2\gamma)\lambda^2/\omega_{s1}^2].$$

因而 ρ_{mn} 的表达式与文献 [1] 中 ρ_n 之表达式相同，只要将后者中的 R_n 改为 R_{mn} 。

第二分步为一随机步子，方向在 $[-\pi, \pi]$ 内作均匀概率分布，步长为

$$T_{mn} = \begin{cases} \sqrt{S/\pi} & \text{当 } H \leq \pi; \\ R_{mn} & \text{当 } H > \pi, \end{cases} \quad (32)$$

式中 S 为弓形 AA' 的面积。

所有第一分步行走的合成距离，相当于理想平面表面(即 $h = 0$)情况下的合场乘以因子， $\rho_{mn}/R_{mn} = \rho/R$ 。因而接收面上相应的光强分布等于理想平面反射的高斯光强分布乘以 $(\rho/R)^2$ ，即(参看文献[1])

$$I_0(\theta, \alpha) = \left[\frac{(\sin H - \beta \cos H) e^{-\beta H} + \beta}{\frac{1}{\beta}(1 - e^{-\beta H})(1 + \beta^2)} \right]^2 \left(\frac{\omega_{s1}}{\omega_{s2}} \right)^2 \exp[-2b^2(\theta^2 + \alpha^2)/\omega_{s2}^2]. \quad (33)$$

而所有第二分步的合成距离则相当于下述变形的无规则行走问题：一人从原点出发在平面上行走，从第 $-M, -N$ 步走到第 M, N 步，其中第 m, n 步的步长为^[1]

$$T_{mn} = \exp[-(m^2 + n^2 \cos^2\gamma)\lambda^2/\omega_{s1}^2] \cdot \sqrt{H - \frac{1}{2} \sin(2H)} / \sqrt{\pi}. \quad (34)$$

问当 $M, N \rightarrow \infty$ 时行走终点到起点距离平方的期望值为若干？附录一中对此概率求解问题进行了推导，结果得到散射光强表达式如下：

$$I_s(\theta, \alpha) = \frac{\omega_{s1}^2}{\pi \lambda^2 \cos\gamma} \left[H - \frac{1}{2} \sin(2H) \right]. \quad (35)$$

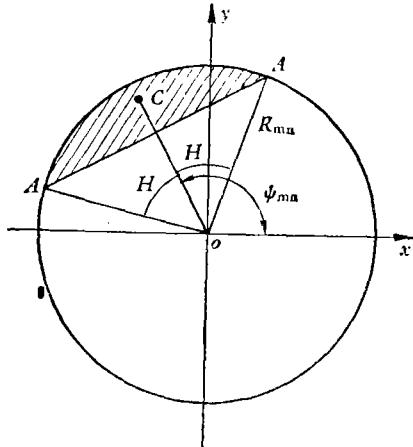


图 6

最后,由(33)和(35)式得出接收面上总的光强分布为

$$\begin{aligned} I(\theta, \alpha) &= I_0 + I_r \\ &= K^2 \left(\frac{\omega_0}{\omega_{s2}} \right)^2 \exp \left[-2b^2(\theta^2 + \alpha^2)/\omega_{s2}^2 \right] \\ &\quad + \frac{\omega_{s1}^2}{\pi \lambda^2 \cos \gamma} \left[H - \frac{1}{2} \sin(2H) \right], \end{aligned} \quad (36)$$

其中

$$K = \frac{(\sin H - \beta \cos H) e^{-\beta H} + \beta}{\frac{1}{\beta} (1 - e^{-\beta H}) (1 + \beta^2)}. \quad (37)$$

由于 K 的表达式(37)与文献 [1] 中相同,所以,当接收器 D_1 接收的是四周散射总光能时, D_2 上光能与 D_1 上光能的比值 R 的表达式与一维情况下形式完全相同,只不过现在 H 与 h_{\max} 的关系[见(3)式]不同而已。

四、球面二维起伏

对于二维随机起伏的凹球面和凸球面表面在采用双接收器测量方案时,应设计一种操作简便的装置,使得接收器 D_1 上位置与大小固定的开孔对于尽量大范围的球面半径 r 值皆适用。为此,须利用高斯波面族的包络面。首先来推导此包络面的表达式。

1. 高斯圆族的包络线 设高斯光束的束腰半径为 ω_0 , 波长为 λ , 并令 $z_0 = \omega_0^2 \pi / \lambda$ 。设直角坐标系 xoy , 原点 o 位于束腰中点(图 7), y 轴与光轴方向垂合。对于某一个 z 值 ($z < 0$), 过 $y = z$ 处的球面波的几何半径为

$$r = -z \left[1 + \left(\frac{\pi \omega_0^2}{\lambda z} \right)^2 \right]. \quad (38)$$

设此球面的球心 c 的坐标为 $(0, y_c)$, 则

$$y_c = r + z = -z \left(\frac{\pi \omega_0^2}{\lambda z} \right)^2. \quad (39)$$

令

$$u = \frac{\pi \omega_0^2}{\lambda z}, \quad z_0 = \frac{\pi}{\lambda} \omega_0^2,$$

则 $z = z_0/u$ 。将这些值代入(38),(39)式,得

$$r = -\frac{1 + u^2}{u} z_0, \quad y_c = -uz_0. \quad (40)$$

因轴对称性之故,只需考察球面在 xoy 平面上的截圆(高斯圆)。于是此圆的方程为

$$f(x, y) \equiv x^2 + (y - y_c)^2 - r^2 = 0,$$

即

$$f(x, y, u) \equiv x^2 + (y + z_0 u)^2 - (1 + u^2)^2 \frac{z_0^2}{u^2} = 0, \quad (41)$$

其中 u 是参数, z_0 是常数,(41)式表示一个圆族。此圆族的包络线(图 7 中的曲线 BE)求法如下^[2]: 将(41)式对 u 求偏导数并令其等于零:

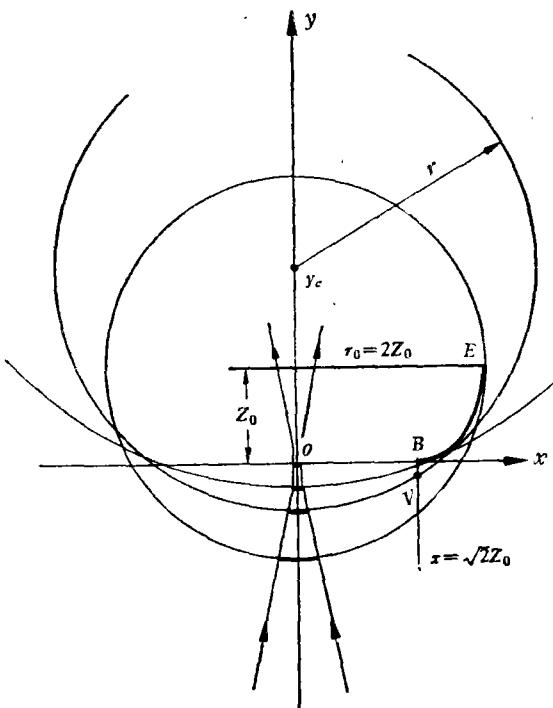


图 7

$$\frac{\partial f(x, y, u)}{\partial u} = 2(y + z_0 u) z_0 - z_0^2 \left[-\frac{2}{u^3} (1+u^2)^2 + \frac{2}{u^2} (1+u^2) 2u \right] = 0.$$

从而得出 y 作为 u 的函数为

$$y = -z_0/u^3. \quad (42)$$

将 (41) 与 (42) 式联立, 消去 u , 便得到包络线方程如下:

$$x = \pm \{(2z_0^{2/3}y^{-2/3} + z_0^{4/3}y^{-4/3} + 3)z_0^{3/2}y^{2/3} - (y^2 + z_0^{8/3}y^{-2/3})\}^{1/2}. \quad (43)$$

令

$$y = pz_0, \quad (44)$$

则 (43) 式成为(只取正号的一支)

$$x = \sqrt{2 + 3p^{2/3} - p^2} z_0. \quad (45)$$

(44) 与 (45) 式便是包络线 BE 的参数方程(以 p 为参数). 表 1 列出了曲线 BE 上一些取样点的坐标, 单位是 $z_0 = \pi\omega_0^2/\lambda$. 图 8 是曲线 BE .

表 1 (单位: z_0)

$x =$	1.414	1.624	1.728	1.804	1.862	1.908	1.943	1.968	1.986	1.997	2.000
$y =$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0

以下再来推导高斯圆族与直线 $x = \sqrt{2}z_0$ 交点 V (图 7) 的 y 坐标与圆的半径 r 的关系. 令

$$y = qz_0, \quad (46)$$

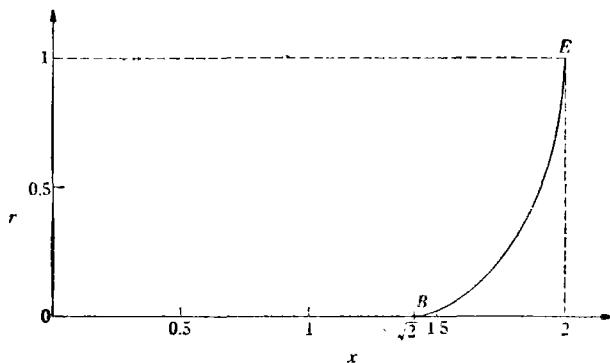


图 8

$$\text{曲线 } \begin{cases} x = \sqrt{2 + 3P^{1/3} - P^2} z_0, \\ y = Pz_0 \end{cases} \quad (\text{单位: } z_0, \text{ 即 } \frac{\pi}{\lambda} \omega_0^2)$$

代入(41)式得

$$2 + (q + u)^2 - \frac{1}{u^2} (1 + u^2)^2 = 0,$$

即 $q + u = \pm \sqrt{\frac{1}{u^2} (1 + u^2)^2 - 2}.$

只取“+”号的一支,并利用(46)式,得

$$y = \left(\frac{1}{u} \sqrt{1 + u^4} - u \right) z_0. \quad (47)$$

(47)与(40)式中的r表达式联立,便是上述V点所对应的r与y值。对于u的一系列取样点算出的r,y值如表2所列。图9是y随r的变化曲线。

表2 (r与y的单位: z_0)

u	r	y	u	r	y
-1	2	-0.414	-3	3.333	-0.0183
-1.1	2.009	-0.326	-4	4.25	-0.0078
-1.2	2.033	-0.261	-5	5.2	-0.0040
-1.3	2.070	-0.209	-6	6.167	-0.0023
-1.5	2.167	-0.142	-7	7.143	-0.00146
-1.7	2.288	-0.091	-8 以下	≥ 8.125	$ y < 0.001$
-2	2.5	-0.062			

2. 凹球面的情况 图10的装置可以用来对任意半径 $r (\geq 2z_0)$ 的凹球面工件表面进行测量。图中高斯光束经透镜 L 会聚后,沿-y轴向上传播,束腰位于o处。A为一载物台,它是一个以y轴为旋转对称的刚性体,其外表面的截线为上述的包络线BE。根据包络线性质,任意半径 $r \geq 2z_0$ 的凹球面坐落在载物台上时,在激光束射在表面上的G处,

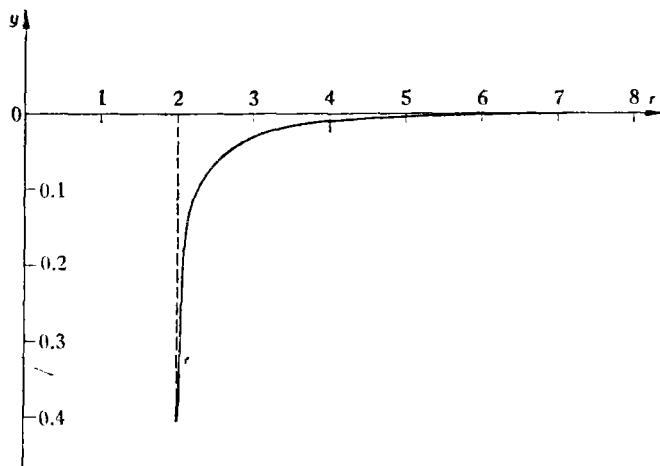


图 9

$$\text{曲线} \begin{cases} r = -\frac{1}{u}(1+u^2)z_0, \\ y = \left(\frac{1}{u}\sqrt{1+u^4} - u\right)z_0. \end{cases}$$

(单位: z_0 , 即 $\frac{\pi}{\lambda} \omega_0^2$)

入射波面恰与凹球面重合。于是,反射波的传播成为入射波场的时间反演。因而反射波经 45° 半反射镜 P 反射后,射在接收面上的光斑位置与大小总是固定的,与 r 无关。这就达到了简便测量的目的。

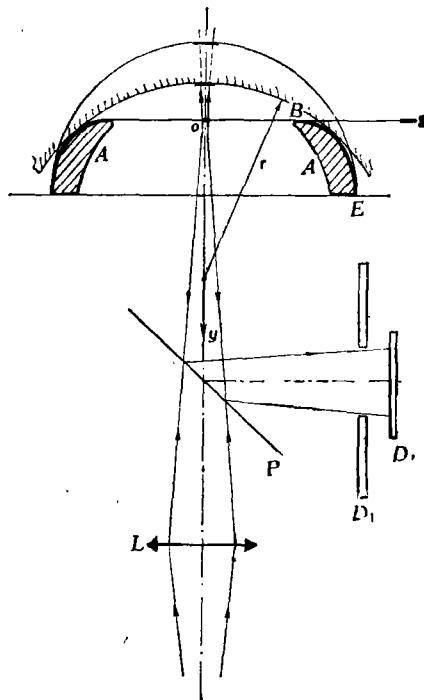


图 10

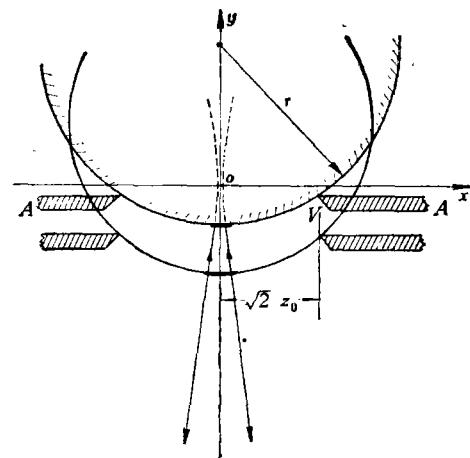


图 11

3. 凸球面的情况 对于凸球面表面, 上述包络线无法应用, 只好采用可上下调节的载物台, 如图 11 所示。(图中下半部省略, 与图 10 相同。) 载物台 A 是一刚性圆环, 只有尖锐的周边 V 与工件接触。圆周 V 的半径可取为 $\sqrt{2} z_0$ 。由前面第 1 小节的推导可知, 对于半径为 r 的工件凸球面, 将载物台的圆周 V 的高度调到图 9 中相应的 y 值, 则可保证射在球面上的波面与球面重合。

由图 9 看出, 当 $r > 4z_0$ 时, y 值很接近于零。因此, 若要求测量手续简捷, 可将圆周 V 固定于 $y = 0$ 平面, 而对 $r > 4z_0$ 的所有半径范围进行测量。

作为具体例子, 取 $\lambda = 0.6328 \times 10^{-3}$ mm, $\omega_0 = 0.02$ mm, 则 $z_0 = \frac{\pi}{\lambda} \omega_0^2 = 1.985$ mm。

这时, 将 V 固定于 $y = 0$ 后, 对于 $r > 7.941$ mm 的所有半径的凸球面工件皆可测量。

高斯光束的上述这些可利用的特性是普通球面波所不具备的。

根据第一节中的原则不难看出, 对于本节的球面测量而言, 接收面上光强分布公式与 $\gamma = 0$ 情况下平面二维起伏表面的公式完全相同。

附 录

与第 m, n 个 λ^2 面元对应的步长为(34)式:

$$T_{mn} = D \exp [-(m^2 + n^2 \cos^2 \gamma) \lambda^2 / \omega_{s1}^2], \quad (A.1)$$

其中

$$D = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[H - \frac{1}{2} \sin(2H) \right]^{1/2}. \quad (A.2)$$

将工件表面坐标 xz 进行变换:

$$x' = x, \quad z' = z \cos \gamma, \quad (A.3)$$

再作极坐标变换:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x'^2 + z'^2}, \\ \theta = \arctan \frac{z'}{x'}, \end{cases} \quad (A.4)$$

则 $r =$ 常数的一个圆周对应着同一步长。取 r 的一系列取样点:

$$r = n\lambda \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

并令 $n = um + s$, 其中 m 为远大于 1 的整数, 且 $m\lambda \ll \omega_{s1}$; 则在 $r_1 = um\lambda$ 到 $r_2 = (u+1)m\lambda$ 的范围内可近似认为每一面元所对应的步长为常数:

$$T_{um} = D \exp(-u^2 m^2 \lambda^2 / \omega_{s1}^2). \quad (A.5)$$

而 r_1 与 r_2 之间所围环域面积为

$$\pi(r_2^2 - r_1^2) = \pi[(u+1)^2 m^2 - u^2 m^2] \lambda^2 = \pi(2u+1)m^2 \lambda^2. \quad (A.6)$$

此面积为 xz' 平面上的值, 对应到原 xz 平面, 此面积应为[见(A.3)式]:

$$\frac{\pi}{\cos \gamma} (2u+1)m^2 \lambda^2. \quad (A.7)$$

即此环域对应着一个无规则行走问题, 步长为(A.5)式, 方向在 $[-\pi, \pi]$ 内作均匀概率分布, 从第零步走到第 N 步,

$$N = \frac{\pi}{\cos \gamma} (2u+1)m^2. \quad (A.8)$$

这一段行走造成距离平方的期望值为

$$E(A_s^2) = 2NT_{um}^2 = \frac{2\pi m^2}{\cos \gamma} (2u+1) D^2 \exp(-2u^2 m^2 \lambda^2 / \omega_{s1}^2). \quad (A.9)$$

因而从 $u = 0$ 到 ∞ 的各段总行走产生的距离平方的期望值(即散射光强 I_s)为

$$I_s = E(A^2) = \frac{2\pi m^2 D^2}{\cos \gamma} \sum_{u=0}^{\infty} (2u+1) \exp(-2u^2 m^2 \lambda^2 / \omega_{s1}^2).$$

将求和用积分近似，得

$$I_r = \frac{2\pi m^2 D^2}{\cos \gamma} \int_0^\infty (2u + 1) \exp(-2u^2 m^2 \lambda^2 / \omega_{s1}^2) du. \quad (\text{A.10})$$

由于

$$\int_0^\infty 2u \exp(-2u^2 m^2 \lambda^2 / \omega_{s1}^2) du = \frac{\omega_{s1}}{2m^2 \lambda^2}, \quad (\text{A.11})$$

$$\int_0^\infty \exp(-2u^2 m^2 \lambda^2 / \omega_{s1}^2) du = \frac{\omega_{s1}}{\sqrt{2} m \lambda} \int_0^\infty e^{-S^2} dS = \frac{\omega_{s1}}{\sqrt{2} m \lambda} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad (\text{A.12})$$

所以将(A.11), (A.12)式代入(A.10)式，并用(A.2)式右端代D，便得到 I_r ，即 $I_r(\theta, \alpha)$ 为

$$I_r(\theta, \alpha) = \frac{m^2}{\cos \gamma} \left[\frac{1}{\pi} \left(H - \frac{1}{2} \sin(2H) \right) \right] \cdot \left[\frac{\omega_{s1}^2}{m^2 \lambda^2} + \frac{\sqrt{\pi} \omega_{s1}}{\sqrt{2} m \lambda} \right].$$

由于 $m\lambda \ll \omega_{s1}$ ，因而上式中的 $\frac{\sqrt{\pi} \omega_{s1}}{\sqrt{2} m \lambda}$ 可以忽略，于是最后得出

$$I_r(\theta, \alpha) = \frac{\omega_{s1}^2}{\pi \lambda^2 \cos \gamma} \left[H - \frac{1}{2} \sin(2H) \right]. \quad (\text{A.13})$$

参 考 文 献

[1] 程路，物理学报，27(1978)，651。

[2] В. И. Смирнов，Курс высшей математики (Москва, 1959)，Том 2, § 10.

SCATTERING OF LASER BEAM BY DIFFUSING SURFACES

CHENG LU

(Physics Department, Nankai University)

ABSTRACT

Applying the simplified statistical model developed in the previous paper^[1], we treat in this article the following three cases and give the corresponding designs of measuring apparatus:

1. Cylindrical surface, one-dimensionally random scores perpendicular to the generatrix of the cylinder;
2. Plane surface, two-dimensionally random fluctuations;
3. Convex and concave spherical surface, two-dimensionally random fluctuations.