

# 偏轴非球面红外光学系统的自动设计\*

张幼文 杨存武 仰晓东  
(中国科学院上海技术物理研究所)

## 提 要

本文给出了矢量形式的折、反射定律的完整表达式。推导了解析形式的球面、非球面、柱面、平面以及折射和反射通用的空间光线追迹公式, 处理了非同轴系统。目前国内外采用的 Feder 公式<sup>[1]</sup>, 相当于本文公式组的一个特殊情况——共轴球面系统。此外, 使用本文的公式组, 能自动排除 Feder 公式中可能出现的光线与曲面的不正确交点。五年来的实践证明, 本文的公式组使用方便, 精度较高, 是值得推广的。

应用上述公式组, 以点列图作系统评价函数, 用阻尼最小二乘法自动设计了偏轴球面折、反射系统和非球面双反射系统, 效果较好。此外, 还推导了光束截面最小的位置, 以便安放红外探测器。

## 一、前 言

光学自动设计的工作自五十年代初发展起来至今已有二十多年的历史, 目前广泛使用并行之有效的几种方法是: Wynne 的阻尼最小二乘法<sup>[2]</sup>, Glatzel 的适应法<sup>[3]</sup>, Grey 的规格正交化法<sup>[4]</sup>, 铃木等的领域型不等式法<sup>[5]</sup>。据报道, 已用这些方法成功地设计了不少复杂的高质量的镜头。我国在自动设计方面也开展了不少工作, 并对上述几种方法作了某些改进。

然而, 目前自动设计的工作主要集中在透射式共轴球面系统方面, 很少看到偏轴非球面折、反射系统的自动设计, 而红外光学系统, 往往是后者。这样, 只适用于共轴球面系统空间光线追迹的 Feder 公式, 就不能应用于红外系统的自动设计。为此, 我们于 1973 年推导了一组解析形式的球面、非球面、柱面、平面以及折射和反射通用的空间光线追迹公式, 并对非同轴系统用坐标变换的办法作了处理。后来, 我们又将这组公式作了简化和统一。五年来不断使用的实践证明, 这组公式的精度是高的, 比 Feder 公式要通用和方便得多。

要推导空间光线追迹公式, 必须应用矢量形式的折、反射定律, 为此, 我们推导了矢量形式的折、反射定律的正确而完整的表达式。

红外探测器是能量转换器件, 希望光学系统集中尽可能多的光能在探测器上。因此, 我们不采用可见光系统自动设计中的“象差加数平方和”作系统评价函数, 而用点列图作评价函数, 并由此推导了光束截面最窄的位置, 以便安放红外探测器, 这在实用上和光校

\* 1978 年 5 月 10 日收到。

时是很有用的。因为红外光是肉眼所看不见的, 不知道探测器应放在哪里。

## 二、矢量形式的折、反射定律的正确表达式

如图 1 所示,  $\mathbf{q}$  为入射光线单位矢量,  $\mathbf{q}'$  为折射光线单位矢量,  $\mathbf{q}''$  为反射光线单位矢量,  $\mathbf{\epsilon}$  为界面法线单位矢量。入射光线  $\mathbf{q}$  与法线  $\mathbf{\epsilon}$  的夹角  $I$  (按规定取锐角) 为入射角, 折射光线  $\mathbf{q}'$  与法线  $\mathbf{\epsilon}$  的夹角  $I'$  (取锐角) 为折射角, 反射光线  $\mathbf{q}''$  与法线  $\mathbf{\epsilon}$  的夹角  $-I''$  ( $I''$  为负值, 取锐角) 为反射角。 $n$  为入射媒质折射率,  $n'$  为折射媒质折射率。令

$$v = n/n', \quad (1)$$

三角形式的折射定律为

$$\sin I' = v \sin I; \quad (2)$$

三角形式的反射定律为 (令  $n' = -n$ )

$$\sin I'' = -\sin I \text{ 或 } I'' = -I. \quad (3)$$

应当指出的是: 不少书籍和文章中的矢量形式的折、反射定律是不完整的, 甚至是错误的, 他们往往把矢量形式的折、反射定律写成如下形式:

$$\text{折射定律: } \mathbf{q}' \times \mathbf{\epsilon} = v \mathbf{q} \times \mathbf{\epsilon} \text{ (不完整),} \quad (4)$$

$$\text{反射定律: } \mathbf{q}'' \times \mathbf{\epsilon} = -\mathbf{q} \times \mathbf{\epsilon} \text{ (错误).} \quad (5)$$

为什么说 (4) 式和 (5) 式是不完整的或者是错误的呢? 理由如下:

大家知道,  $\sin(\pi - \varphi) = \sin \varphi$ , 对三角形式的折、反射定律 (2) 式和 (3) 式, 可以有两个角度满足它们, 只是因为规定取锐角, 才只有一个解。矢量形式的折、反射定律是根据 (2) 式和 (3) 式写出来的, 只写 (4) 式和 (5) 式, 若不规定  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{q}'$ ,  $\mathbf{q}''$  的大小, 那么可以有无穷多个解满足 (4) 式和 (5) 式, 因为 (4) 式可写成  $|\mathbf{q}'| |\mathbf{\epsilon}| \sin I' = v |\mathbf{q}| |\mathbf{\epsilon}| \sin I$ , 取不同的  $|\mathbf{q}'|$  值, 可以有不同的  $I'$  满足上式。为了确定折射线的方向, 必须  $|\mathbf{q}'| = |\mathbf{q}|$  才行, 也就是说要限定折射线和入射线的大小。正因为这样, 才取  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{q}'$ ,  $\mathbf{q}''$  为单位矢量。为了方便起见, 取  $\mathbf{\epsilon}$  也为单位矢量 (虽然并无要求)。有了  $|\mathbf{q}'| = |\mathbf{q}|$  这一条件, 还不能唯一地由  $\mathbf{q}$  和  $\mathbf{\epsilon}$  决定  $\mathbf{q}'$  的方向, 因为尚有  $(\pi - I')$  和  $I'$  两个角度同时满足 (4) 式, 矢量形式并没有规定取锐角。为了消除  $(\pi - I')$  这个解, 必须再加一个条件才行。现在来证明它。

因为  $\mathbf{q}'$ ,  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{\epsilon}$  共面, 它们线性相关, 因此  $\mathbf{q}'$  可用  $\mathbf{q}$  和  $\mathbf{\epsilon}$  的线性组合来表示:

$$\mathbf{q}' = c_1 \mathbf{q} + c_2 \mathbf{\epsilon}. \quad (6)$$

把 (6) 式与  $\mathbf{\epsilon}$  作矢积, 再利用 (4) 式, 得  $c_1 = v$ 。再将 (6) 式与  $\mathbf{\epsilon}$  作标积, 得  $c_2 = (\mathbf{q}' \cdot \mathbf{\epsilon} - v \mathbf{q} \cdot \mathbf{\epsilon}) / \mathbf{\epsilon}^2 = (\mathbf{q}' \cdot \mathbf{\epsilon} - v \mathbf{q} \cdot \mathbf{\epsilon})$ 。把  $c_1$ ,  $c_2$  的值代入 (6) 式得

$$\mathbf{q}' = v \mathbf{q} + (\mathbf{q}' \cdot \mathbf{\epsilon} - v \mathbf{q} \cdot \mathbf{\epsilon}) \mathbf{\epsilon}. \quad (7)$$

由此可见, 要确定  $\mathbf{q}'$  的值, 除矢积 (4) 式外, 还必须同时有标积  $\mathbf{q}' \cdot \mathbf{\epsilon}$  才行。下面我们将来求  $\mathbf{q}' \cdot \mathbf{\epsilon}$  的表示式。

$$\mathbf{q}' \cdot \mathbf{\epsilon} = |\mathbf{q}'| |\mathbf{\epsilon}| \cos I' = \cos I' = [1 - \sin^2 I']^{1/2} = [1 - v^2 \sin^2 I]^{1/2}$$

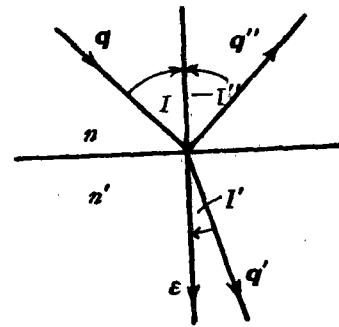


图 1

$$= [1 - \nu^2(1 - \cos^2 I)]^{\frac{1}{2}} = (\nu \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\epsilon}) \left[ 1 + \frac{1 - \nu^2}{(\nu \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\epsilon})^2} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (8)$$

记  $\left[ 1 + \frac{1 - \nu^2}{(\nu \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\epsilon})^2} \right]^{\frac{1}{2}} = k$ , 把(4)式写成分量形式, 取其中两式, 再与(8)式的分量形式联立得

$$\begin{aligned} 0q'_x + \epsilon_z q'_y - \epsilon_y q'_z &= \nu(\epsilon_z q_y - \epsilon_y q_z), \\ -\epsilon_z q'_x + 0q'_y + \epsilon_x q'_z &= \nu(\epsilon_x q_z - \epsilon_z q_x), \\ \epsilon_x q'_x + \epsilon_y q'_y + \epsilon_z q'_z &= \nu(\epsilon_x q_x + \epsilon_y q_y + \epsilon_z q_z)k. \end{aligned} \quad (9)$$

(9)式的系数行列式不等于零, 矩阵的秩等于未知数个数3, 特征行列式全为零. 因此, (9)式有唯一的解. 也不难利用线性代数证明, 若不规定  $\mathbf{q}$  和  $\mathbf{q}'$  的大小, (4)式有无穷多个解, 只有(4)式不能唯一地确定  $\mathbf{q}'$  的值. 根据以上分析, 可以写出完整的矢量形式的折射定律为

$$\begin{aligned} |\mathbf{q}'| &= |\mathbf{q}| = |\boldsymbol{\epsilon}| = 1, \\ \mathbf{q}' \times \boldsymbol{\epsilon} &= |\nu| \mathbf{q} \times \boldsymbol{\epsilon}, \\ \mathbf{q}' \cdot \boldsymbol{\epsilon} &= \nu \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\epsilon} [1 + (1 - \nu^2)/(\nu \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\epsilon})]^{1/2}. \end{aligned} \quad (10)$$

矢量形式的反射定律, 简单的令  $n' = -n$ , 由(4)式变成(5)式是错误的. 因为根据右手螺旋法则,  $\mathbf{q}'' \times \boldsymbol{\epsilon}$  与  $-\mathbf{q} \times \boldsymbol{\epsilon}$  指向相反方向, 它们理应指向同一方向才对. 此外,  $\mathbf{q}'' \times \boldsymbol{\epsilon} = \sin[\pi - (-I'')] = \sin(-I'')$ , 而  $-\mathbf{q} \times \boldsymbol{\epsilon} = -\sin(I) = \sin(-I)$ , 这样就得到  $I'' = I$  这一不正确结果, 不符合(3)式. 此外, 和(4)式一样, (5)式也是不完整的.

在(10)式中令  $n' = -n$ , 可得正确而完整的矢量形式的反射定律为

$$|\mathbf{q}''| = |\mathbf{q}| = |\boldsymbol{\epsilon}| = 1, \quad \mathbf{q}'' \times \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{q} \times \boldsymbol{\epsilon}, \quad \mathbf{q}'' \cdot \boldsymbol{\epsilon} = -\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\epsilon}. \quad (11)$$

由这个式子能唯一的得到三角形式的反射定律  $I'' = -I$ , 因此是可信的.

矢量形式的折、反射定律是下面要讲的空间光线追迹公式的基础, 必须正确.

### 三、通用空间光线追迹公式

如图2所示, 把坐标原点设在折射面的顶点, 在追迹过程中, 由于顶点移动, 坐标原点也相应移动. 入射光线的单位矢量为  $\mathbf{q}(\xi, \eta, \zeta)$ , 而  $\xi, \eta, \zeta$  为方向余弦; 折射光线的单位矢量为  $\mathbf{q}'(\xi', \eta', \zeta')$ . 由顶点  $O$  到投射点  $A$  的矢量为  $\mathbf{T}(x, y, z)$ , 其中  $x, y, z$  为坐标分量; 由顶点  $O'$  到投射点  $A'$  的矢量为  $\mathbf{T}'(x', y', z')$ ; 过  $A'$  点的法线单位矢量为  $\boldsymbol{\epsilon}$ ;

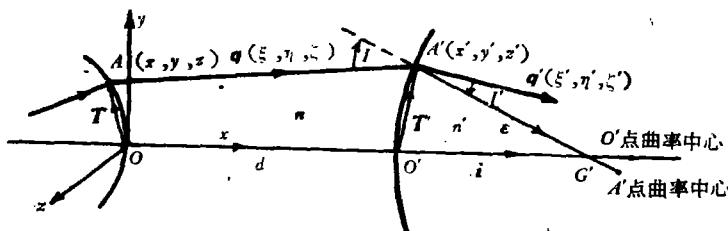


图 2

沿  $x$  轴的单位矢量为  $\mathbf{i}$ ; 二面间距为  $d$ ; 折射面二边的折射率分别为  $n$  和  $n'$ ; 入射角的余弦为  $\Delta = \mathbf{q} \cdot \mathbf{e}$ ; 折射角的余弦为  $\Delta' = \mathbf{q}' \cdot \mathbf{e}$ .

命题是已知光线在前一面的投射点  $A$  的坐标  $(x, y, z)$  和  $\mathbf{q}$  的方向余弦  $(\xi, \eta, \zeta)$ , 求下一面的投射点  $A'$  的坐标  $(x', y', z')$  及  $\mathbf{q}'$  的方向余弦  $(\xi', \eta', \zeta')$ . 也就是已知  $\mathbf{T}(x, y, z)$  和  $\mathbf{q}(\xi, \eta, \zeta)$  求  $\mathbf{T}'(x', y', z')$  和  $\mathbf{q}'(\xi', \eta', \zeta')$ .

第一步 求  $A'$  点的坐标  $(x', y', z')$  我们把旋转对称二次曲面方程写成如下形式:

$$F(X', Y', Z') = gY'^2 + kZ'^2 - bX'^2 - 2r_0X' = 0, \quad (12)$$

其中

$$b = e^2 - 1, \quad (13)$$

$e$  为表征曲面的非球面程度的一个常数, 叫偏心率.  $e = 0$  为球面;  $0 < e < 1$  为椭球面;  $e = 1$  为抛物面;  $e > 1$  为双曲面.  $r_0$  为顶点  $o'$  的曲率半径.  $g, k$  为两个人为取的判断面型用的常数:

(1)  $g = 1, k = 1$ , (12) 式表示的是绕  $X'$  轴旋转对称的二次曲面(包括球面、椭球面、抛物面、双曲面).

(2)  $g = 0, k = 1$ , (12) 式表示母线平行于  $Y'$  轴的二次柱面;  $g = 1, k = 0$ , (12) 式表示母线平行于  $Z'$  轴的柱面.

(3)  $g = 0, k = 0, b = 0, r_0 = 1$ , (12) 式表示平面  $(X' = 0)$ .

应当指出, 为了表示平面, 取  $b = 0$  和  $r_0 = 1$  是人为的, 是不追求物理意义的, 纯粹是为了计算方便. 因为平面的偏心率  $e$  并不等于 1, 而曲率半径  $r_0 = \infty$ , 也并不等于 1. 虽然在  $b$  和  $r_0$  前面再加两个人为常数可以弄得符合物理意义, 但太烦了.

把坐标原点由  $O$  移到  $O'$ , 在  $O'X'Y'Z'$  坐标系中  $\mathbf{q}$  的直线方程为

$$X' = x', Y' = y + \frac{\eta}{\xi}(d + x' - x), Z' = z + \frac{\zeta}{\xi}(d + x' - x). \quad (14)$$

把(14)式代入(12)式解出  $x'$  得

$$x' = (-B \pm \sqrt{B^2 - AC})/A \quad (\text{取 } |x'| \text{ 较小者}), \quad (15)$$

其中

$$\begin{aligned} A &= g \frac{\eta^2}{\xi^2} + k \frac{\zeta^2}{\xi^2} - b, \\ B &= (d - x) \left( g \frac{\eta^2}{\xi^2} + k \frac{\zeta^2}{\xi^2} \right) + gy \frac{\eta}{\xi} + kz \frac{\zeta}{\xi} - r_0, \\ C &= gy^2 + kz^2 + (d - x)^2 \left( g \frac{\eta^2}{\xi^2} + k \frac{\zeta^2}{\xi^2} \right) + 2(d - x) \left( gy \frac{\eta}{\xi} + kz \frac{\zeta}{\xi} \right). \end{aligned} \quad (16)$$

把(15)式代入(14)式得光线与曲面的交点  $A'$  的坐标为

$$x' = \begin{cases} \frac{-C}{B - \sqrt{B^2 - AC}} & \text{当 } B < 0, \\ \frac{-C}{B + \sqrt{B^2 - AC}} & \text{当 } B > 0; \end{cases}$$

$$y' = y + (d + x' - x) \frac{\eta}{\xi}; \quad z' = z + (d + x' - x) \frac{\zeta}{\xi}. \quad (17)$$

上式中的  $x'$  与 (15) 式是等价的, 但写成 (17) 式中那样的形式可以消除计算误差。因为当  $r_0$  很大时, (15) 式分子为两个相近的大数相减, 有效数字大为丧失; 此外, 直接用 (15) 式不能计算平行光入射到抛物面上和平面上的情形, 因为这时  $A = 0$ 。

Feder 在求  $A'$  点的坐标  $(x', y', z')$  时, 在直线方程中以光线长度  $\overline{AA'}$  为参变量。由于一根光线与一个二次曲面有两个交点,  $\overline{AA'}$  有两个值, Feder 取较小的值。对于透射系统,  $\overline{AA'}$  较大的肯定是不希望的交点, 不会出错。但对图 3 那样的折、反射系统, 若次镜的曲率半径较小, 则由主镜反射的光线与次镜球面方程的两个交点中,  $\overline{AA'}$  较小的一个(图中未画出), 可能是不希望的交点, 这样电子计算机计算时就会出错。对于红外中常用的卡塞格伦系统, 次镜常常为双曲面, 如图 4 所示。因为双曲面有两叶(图中另一叶没有画出), 电子计算机由光线最短长度所取的交点, 可能是实际不存在的一叶上的交点。所以这种方法在红外光学系统光线追迹中矛盾更为突出, 必须纠正。

我们在直线方程中不取光线长度为参变量, 而取  $x'$  为参变量。由于求  $x'$  时, 坐标原点已移到所考虑曲面的顶点(移动距离由  $d$  决定), 取  $|x'|$  较小的解, 肯定是所需要的交点, 自动排除了另一个  $|x'|$  较大的不需要的交点, 绝对不会出错。这一改进, 在实际计算中作用是很大的。

第二步 求过  $A'$  点的单位法线矢量  $\epsilon$  由三角形  $O'A'G'$  知:

$$T' + A'G'\epsilon = O'G'i. \quad (18)$$

为了求得  $A'G'$  和  $O'G'$  的长度, 让  $A'G'$  直线与  $O'G'$  直线相交求解。首先考虑二次曲面( $g = 1, k = 1$ ) 的情况。

过  $A'(x', y', z')$  点的法线(即  $A'G'$  直线)方程为:

$$\frac{x' - x'}{-\frac{\partial F}{\partial X'}|_{x'=x'}} = \frac{y' - y'}{-\frac{\partial F}{\partial Y'}|_{y'=y'}} = \frac{z' - z'}{-\frac{\partial F}{\partial Z'}|_{z'=z'}}, \quad (19)$$

其中  $\frac{\partial F}{\partial X'}|_{x'=x'}$  等为二次曲面方程 (12) 在  $A'$  点对  $X', Y', Z'$  的偏微商。

过  $O'$  点的  $X'$  轴(即  $O'G'$  直线)的直线方程为

$$X' = X', \quad Y' = 0, \quad Z' = 0. \quad (20)$$

把 (20) 式代入 (19) 式, 得交点  $G'$  的  $X'$  分量  $x'_G$  为

$$x'_G = O'G' = x' + bx' + r_0. \quad (21)$$

$A'$  和  $G'$  两点间的长度  $A'G'$  为

$$A'G' = [(x' - x'_G)^2 + (y' - 0)^2 + (z' - 0)^2]^{\frac{1}{2}} = [(bx' + r_0)^2 + y'^2 + z'^2]^{\frac{1}{2}}. \quad (22)$$

把 (21) 和 (22) 式代入 (18) 式得

$$\epsilon = \frac{1}{[(bx' + r_0)^2 + y'^2 + z'^2]^{\frac{1}{2}}} [(bx' + r_0)i - y'j - z'k], \quad (23)$$

其中  $i, j, k$  为沿三个坐标轴的单位矢量。

为了使  $\epsilon$  的表示式对柱面和平面也适用 (柱面和平面的法线与二次曲面的法线的取向是很不一样的), 以使追迹公式对柱面和平面也适用。我们在(23)式中的  $y'$  和  $z'$  前加入人为的常数  $g$  和  $k$ , 于是

$$\epsilon = \frac{1}{[(bx' + r_0)^2 + gy'^2 + kz'^2]^{1/2}} [(bx' + r_0)\mathbf{i} - gy'\mathbf{j} - kz'\mathbf{k}]. \quad (24)$$

令

$$l = [(bx' + r_0)^2 + gy'^2 + kz'^2]^{1/2}, \quad (25)$$

则  $\epsilon$  的三个坐标分量(或方向余弦)为

$$\epsilon_x = \frac{1}{l} (bx' + r_0), \quad \epsilon_y = \frac{1}{l} (-gy'), \quad \epsilon_z = \frac{1}{l} (-kz'). \quad (26)$$

第三步 利用折射定律求  $\mathbf{q}'(\xi', \eta', \zeta')$  用  $\epsilon$  对矢量折射定律(10)式中的第二式作矢积, 并利用公式

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}),$$

得

$$\mathbf{q}' = |\nu| \mathbf{q} + [(\mathbf{q}' \cdot \epsilon) - |\nu|(\mathbf{q} \cdot \epsilon)] \epsilon. \quad (\text{即(7)式})$$

根据定义:

$$\Delta' = \mathbf{q}' \cdot \epsilon, \quad \Delta = \mathbf{q} \cdot \epsilon. \quad (27)$$

令

$$m = \Delta' - |\nu| \Delta, \quad (28)$$

则

$$\begin{aligned} \mathbf{q}' &= |\nu| \mathbf{q} + m \epsilon = (|\nu| \xi + m \epsilon_x) \mathbf{i} + (|\nu| \eta + m \epsilon_y) \mathbf{j} + (|\nu| \zeta + m \epsilon_z) \mathbf{k} \\ &= \xi' \mathbf{i} + \eta' \mathbf{j} + \zeta' \mathbf{k}. \end{aligned}$$

因此

$$\xi' = |\nu| \xi + \frac{m}{l} (bx' + r_0), \quad \eta' = |\nu| \eta - \frac{m}{l} gy', \quad \zeta' = |\nu| \zeta - \frac{m}{l} kz'. \quad (29)$$

为了求得  $m$  的值, 必须求出  $\Delta$  和  $\Delta'$  的值。根据定义,

$$\Delta = \mathbf{q} \cdot \epsilon = \xi \epsilon_x + \eta \epsilon_y + \zeta \epsilon_z = \frac{1}{l} [(bx' + r_0)\xi - gy'\eta - kz'\zeta]. \quad (30)$$

由(10)式第三式得

$$\Delta' = \mathbf{q}' \cdot \epsilon = \nu \Delta \left[ 1 + \frac{(1 - \nu^2)}{\nu^2 \Delta^2} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (31)$$

对于反射,  $n' = -n$ ,  $\Delta' = -\Delta$ , 显然符合反射定律(11)式。

综合以上, 得到对球面、非球面、柱面、平面以及折射和反射通用的空间光线追迹公式如下:

初始条件: 已知折射率  $n$ ,  $n'$ ; 面型因子  $g$ ,  $k$ ,  $e$ ,  $r_0$ ; 面间距  $d$ ; 前一面折射点坐标  $(x, y, z)$ ; 入射光线方向余弦  $(\xi, \eta, \zeta)$ 。

计算公式:

$$A = g \frac{\eta^2}{\xi^2} + k \frac{\zeta^2}{\xi^2} - b,$$

$$B = (d - x) \left( g \frac{\eta^2}{\xi^2} + k \frac{\zeta^2}{\xi^2} \right) + gy \frac{\eta}{\xi} + kz \frac{\zeta}{\xi} - r_0,$$

$$C = gy^2 + kz^2 + (d - x)^2 \left( g \frac{\eta^2}{\xi^2} + k \frac{\zeta^2}{\xi^2} \right) + 2(d - x) \left( gy \frac{\eta}{\xi} + kz \frac{\zeta}{\xi} \right),$$

$$x' = \begin{cases} \frac{-C}{B - \sqrt{B^2 - AC}} & \text{当 } B < 0; \\ \frac{-C}{B + \sqrt{B^2 - AC}} & \text{当 } B > 0, \end{cases}$$

$$y' = y + (d + x' - x) \frac{\eta}{\xi},$$

$$z' = z + (d + x' - x) \frac{\zeta}{\xi},$$

$$l = [(bx' + r_0)^2 + gy'^2 + kz'^2]^{\frac{1}{2}},$$

$$\Delta = \frac{1}{l} [(bx' + r_0)\xi - \eta gy' - \zeta kz'],$$

$$\nu = \frac{n}{n'}, \quad (32)$$

$$\Delta' = \nu \Delta \left[ 1 + \frac{1 - \nu^2}{\nu^2 \Delta^2} \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$m = \Delta' - |\nu| \Delta,$$

$$\xi' = |\nu| \xi + \frac{m}{l} (bx' + r_0),$$

$$\eta' = |\nu| \eta - \frac{m}{l} gy',$$

$$\zeta' = |\nu| \zeta - \frac{m}{l} kz'.$$

如果在直线方程中以光线长度  $\overline{AA'}$  为参变量, 仿照上面的推导过程不难证明, Feder 公式相当于 (32) 式中  $g = 1$ ,  $k = 1$ ,  $e = 0$  (球面) 的情况.

利用 (32) 式从系统第一面追迹到最后一面, 设所得光线参数为  $x, y, z$  和  $\xi, \eta, \zeta$ , 则象面上的光线参数为

$$\xi' = \xi, \quad \eta' = \eta, \quad \zeta' = \zeta, \quad x' = 0, \quad y' = y + \frac{\eta}{\xi} (l'_0 - x), \quad z' = z + \frac{\zeta}{\xi} (l'_0 - x). \quad (33)$$

上式中  $l'_0$  为最后一个面的顶点到象面的距离, 即后截距. 对于高次非球面, 则需要作迭代处理<sup>[6]</sup>.

#### 四、偏轴系统的处理方法

不少红外系统, 为了对目标扫描, 往往把次镜的光轴相对于主镜的光轴偏转一个角度  $\theta$  ( $\theta$  很小) 安装, 这样次镜旋转就实现扫描. 现在我们来讨论这种偏轴系统如何进行光

线追迹。

如图3所示, 设主镜光轴为  $o_i o_{i+1}$ , 次镜光轴为  $o_{i+1} A$ , 偏轴角  $\theta (\theta > 0)$ 。此二光轴我们总可以认为在子午面内。设从第  $i$  面射出的光线参数为  $x, y, z$  和  $\xi, \eta, \zeta$ , 以光轴  $o_i o_{i+1}$  为基准。由于第  $i+1$  面的光轴为  $o_{i+1} A$  与第  $i$  面不同轴, 因此这组光线参数不能用作第  $i+1$  面的初值直接利用(32)式进行追迹。但是, 如果我们能把这组光线参数用次光轴  $o_{i+1} A$  为基准的  $o_{i+1} x_1 y_1 z_1$  坐标系表示出来, 则仍旧可以用(32)式进行追迹。

把坐标原点由  $o_i$  移到  $o_{i+1}$ , 然后逆时针旋转  $\theta$  角, 使  $o_i xyz$  坐标系成为  $o_{i+1} x_1 y_1 z_1$  坐标系, 显然在  $o_{i+1} x_1 y_1 z_1$  坐标系上光线参数  $x, y, z$  和  $\xi, \eta, \zeta$  变成(注意方向余弦与坐标平移无关):

$$\begin{aligned} x_1 &= (x - d) \cos \theta + y \sin \theta, & y_1 &= -(x - d) \sin \theta + y \cos \theta, \\ z_1 &= z, & \xi_1 &= \xi \cos \theta + \eta \sin \theta, \\ \eta_1 &= -\xi \sin \theta + \eta \cos \theta, & \zeta_1 &= \zeta. \end{aligned} \quad (34)$$

把这组光线参数  $x_1, y_1, z_1$  和  $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$  作为初值对第  $i+1$  面进行追迹, 并取(32)式中的  $d_i = d = 0$ , 因为这组参数的坐标原点已移到  $o_{i+1}$  不再在  $o_i$  了。

当第  $i+2$  面的光轴又回到主光轴时, 则只需要把相对于次光轴  $o_{i+1} A$  的对第  $i+1$  面追迹所得的光线参数  $x_1, y_1, z_1$  和  $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$  又用以主光轴  $o_{i+1} o_{i+2}$  为基准的坐标系表示出来就可以了。这时坐标原点不需要位移, 只要坐标系顺时针旋转  $\theta$  角, 因此变换公式为(或不用下面的变换(35)式, 仍用(34)式, 不过  $\theta$  取负值, 因为由次轴转到主轴)

$$\begin{aligned} x &= x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta, & y &= x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta, \\ z &= z_1, & \xi &= \xi_1 \cos \theta - \eta_1 \sin \theta, \\ \eta &= \xi_1 \sin \theta + \eta_1 \cos \theta, & \zeta &= \zeta_1. \end{aligned} \quad (35)$$

把这组光线参数  $x, y, z$  和  $\xi, \eta, \zeta$  作为初值对第  $i+2$  面进行追迹, 并取(32)式中的  $d_{i+1} = d$  (不可以取为零), 因为坐标原点仍在  $o_{i+1}$ 。对于偏轴不在子午面内的一般情形, 两组参数间是一个三维空间的平移加转动的坐标变换, 可用三个欧拉角来表示<sup>[7]</sup>。

## 五、系统评价函数和自动设计

由于光学系统有象差, 从物面上一个没有大小的几何点发出的许多光线经过光学系统后不再会聚于一个几何点, 而在象面上形成一个弥散的图形, 这种图形叫点列图, 这个模糊的光斑叫弥散盘, 弥散盘包含着各种实际象差。由于红外探测器是能量转换器件, 希望接收尽可能多的光能, 因此用点列图作红外光学系统的评价函数是合适的, 探测器应当放在弥散最小的地方。

设有  $r$  种不同波长的色光, 在瞬时视场内取  $s$  个不同高度的物点, 每种色光每个物点投射到系统入瞳上的空间光线有  $t$  根(不包括主光线), 则总共有  $rst$  根空间光线, 在每根主光线周围形成一个弥散盘。

定义所有  $M$  根空间光线与相应的  $s$  根主光线的距离的平方的平均值为光学系统的清晰度  $\phi_0$ , 则

$$\phi_s = \frac{1}{rst} \sum_{\lambda=1}^r \sum_{W=1}^s \sum_{k=1}^t [(y'_{\lambda W k} - y'_P)^2 + z'_{\lambda W k}^2] = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M g_i^2, \quad (36)$$

其中

$$g_i = [(y'_i - y'_P)^2 + z'_i]^{\frac{1}{2}} \quad (37)$$

为每根空间光线与对应的主光线之间的距离, 相当于自动设计中的“象差”。下标  $i$  已包含不同  $\lambda W k$  的  $M$  根光线, 下标  $P$  包含  $s$  根主光线。  $y'_i, y'_P, z'_i$  均为光线在象面上的坐标分量, 由空间光线轨迹得到。

把(33)式代入(36)式, 并将  $\phi_s$  对  $l'_0$  求微商令它等于零, 再解出  $l'_0$  得

$$l'_0 = - \sum_{\lambda=1}^r \sum_{W=1}^s \sum_{k=1}^t \left[ \left( y_{\lambda W k} - y_{WP} - \frac{\eta_{\lambda W k}}{\xi_{\lambda W k}} x_{\lambda W k} + \frac{\eta_{WP}}{\xi_{WP}} x_{WP} \right) \left( \frac{\eta_{\lambda W k}}{\xi_{\lambda W k}} - \frac{\eta_{WP}}{\xi_{WP}} \right) \right. \\ \left. + \left( z_{\lambda W k} - \frac{\zeta_{\lambda W k}}{\xi_{\lambda W k}} x_{\lambda W k} \right) \frac{\zeta_{\lambda W k}}{\xi_{\lambda W k}} \right] / \sum_{\lambda=1}^r \sum_{W=1}^s \sum_{k=1}^t \left[ \left( \frac{\eta_{\lambda W k}}{\xi_{\lambda W k}} - \frac{\eta_{WP}}{\xi_{WP}} \right)^2 + \left( \frac{\zeta_{\lambda W k}}{\xi_{\lambda W k}} \right)^2 \right], \quad (38)$$

式中光线参数为最后一个折射面上的值。  $l'_0$  为系统清晰度最好的位置, 探测器应当放在这里。近似地可以认为  $\sqrt{\phi_s}$  就是  $s$  个弥散盘的平均弥散盘半径。

把光线分成主光线和非主光线是人为的, 主要是为了考虑光束通过系统后的对称性。对于偏轴系统, 在象面上主光线本身可能偏离光束中心很远; 由于次反射镜挡光, 有时主光线实际上无法通过系统。因此, 把那些不同色光同一物点的所有能通过系统的空间光线(包括主光线)的重心作中心来计算平均弥散盘半径应该说更合理些。设同一色光同一物点能通过系统的光线有  $t$  根, 则光线重心为

$$y'_{wc} = \frac{1}{rt} \sum_{\lambda=1}^r \sum_{k=1}^t y'_{\lambda W k}, \quad z'_{wc} = \frac{1}{rt} \sum_{\lambda=1}^r \sum_{k=1}^t z'_{\lambda W k}. \quad (39)$$

当系统不偏轴或偏轴于子午面内时,  $z'_c = 0$ 。

定义所有空间光线(包括主光线)与对应的重心的距离的平方的平均值为光学系统的清晰度  $\phi_0$ , 则

$$\phi_0 = \frac{1}{rst} \sum_{\lambda=1}^r \sum_{W=1}^s \sum_{k=1}^t [(y'_{\lambda W k} - y'_{wc})^2 + (z'_{\lambda W k} - z'_{wc})^2]. \quad (40)$$

把(33)式代入(40)式, 将  $\phi_0$  对  $l'_0$  求微商令它等于零, 再解出  $l'_0$  得

$$l'_0 = - \sum_{\lambda=1}^r \sum_{W=1}^s \sum_{k=1}^t \left[ \left( y_{\lambda W k} - \frac{1}{rt} \sum_{\lambda=1}^r \sum_{k=1}^t y_{\lambda W k} - \frac{\eta_{\lambda W k}}{\xi_{\lambda W k}} x_{\lambda W k} + \frac{1}{rt} \sum_{\lambda=1}^r \sum_{k=1}^t \frac{\eta_{\lambda W k}}{\xi_{\lambda W k}} x_{\lambda W k} \right) \right. \\ \left. \times \left( \frac{\eta_{\lambda W k}}{\xi_{\lambda W k}} - \frac{1}{rt} \sum_{\lambda=1}^r \sum_{k=1}^t \frac{\eta_{\lambda W k}}{\xi_{\lambda W k}} \right) + \left( z_{\lambda W k} - \frac{1}{rt} \sum_{\lambda=1}^r \sum_{k=1}^t z_{\lambda W k} - \frac{\zeta_{\lambda W k}}{\xi_{\lambda W k}} x_{\lambda W k} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{rt} \sum_{\lambda=1}^r \sum_{k=1}^t \frac{\zeta_{\lambda W k}}{\xi_{\lambda W k}} x_{\lambda W k} \right) \left( \frac{\zeta_{\lambda W k}}{\xi_{\lambda W k}} - \frac{1}{rt} \sum_{\lambda=1}^r \sum_{k=1}^t \frac{\zeta_{\lambda W k}}{\xi_{\lambda W k}} \right) \right] / \sum_{\lambda=1}^r \sum_{W=1}^s \sum_{k=1}^t \left[ \left( \frac{\eta_{\lambda W k}}{\xi_{\lambda W k}} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{rt} \sum_{\lambda=1}^r \sum_{k=1}^t \frac{\eta_{\lambda W k}}{\xi_{\lambda W k}} \right)^2 + \left( \frac{\zeta_{\lambda W k}}{\xi_{\lambda W k}} - \frac{1}{rt} \sum_{\lambda=1}^r \sum_{k=1}^t \frac{\zeta_{\lambda W k}}{\xi_{\lambda W k}} \right)^2 \right]. \quad (41)$$

当使用阻尼最小二乘法<sup>[2]</sup>进行自动设计时, 定义系统评价函数  $\Phi$  为

$$\Phi = \phi_0 + p \sum_{j=1}^N q_j \Delta x_j = \sum_{i=1}^M f_i^2 + p \sum_{j=1}^N q_j \Delta x_j^2, \quad (42)$$

其中  $f_i = g_i/\sqrt{M}$  为把权因子  $1/\sqrt{M}$  吸收在内的“象差”， $\rho$  为阻尼因子， $q_i$  为对第  $i$  个结构参数的阻尼系数， $\Delta x_i$  为第  $i$  个结构参数的校正量。由  $\text{grad}\Phi = 0$ ，可解出结构参数的校正量  $\Delta x_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 。不难证明，当  $\Phi$  为极小时， $\phi_0$  也为极小<sup>[8]</sup>。

对于阻尼因子和阻尼系数的选择，边界条件的处理，初始条件的确定以及详细的迭代过程。限于篇幅，在此不作介绍，只把两个自动设计的例子列在下面，以说明本文所述内容的实用价值。

### 例 1 搜索跟踪系统

如图 3 所示，空对空红外搜索跟踪系统由头罩、主反射镜、背面反射的次反射镜、会聚透镜构成，均为球面。其中次镜相对于主镜偏轴  $\theta = 1^\circ$  安装。头罩在主镜顶点同心，主镜为孔径光阑并与入瞳重合。头罩材料为  $\text{MgF}_2, n = 1.35125$ ；次镜和透镜材料为  $\text{Si}, n = 3.42550$ 。这种光学系统配合  $\text{InSb}$  探测器在  $3-5 \mu\text{m}$  波段使用，我们取  $4 \mu\text{m}$  的单色光进行自动象差平衡，因此评价函数中不包括不同波长  $\lambda$  的空间光线（即  $r = 1$ ）。校正结果见表 1。校正后，不但平均弥散盘半径  $\phi_0^{1/2}$  缩小，而且理想象面位置  $l_0^*$  与实际象面位置  $l_0'$  十分接近，系统象质改善。

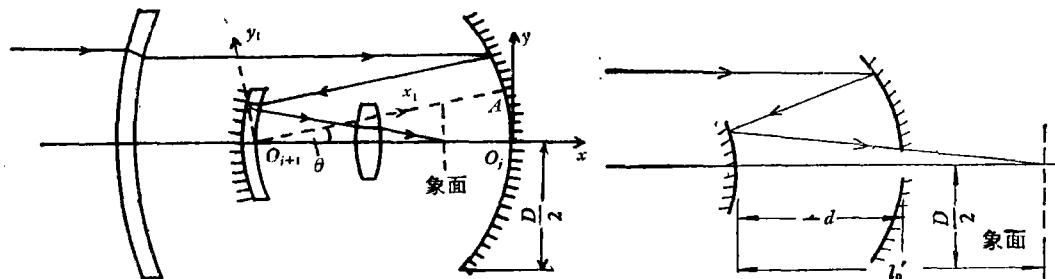


图 3

图 4

表 1 图 3 系统自动校正前后的结构参数

参数	$r_1$	$d_1$	$r_2$	$d_2$	$r_3$	$d_3$	$r_4$	$d_4$	$r_5$	$d_5$	$r_6$	$d_6$
校正前	96	6	90	90	-240	-70	230	-4	310	4	230	26
校正后	96.66	8.26	88.40	88.40	-244.27	-69.26	229.36	-3.87	313.93	3.87	229.36	25.94
参数	$r_7$	$d_7$	$r_8$	$l_0$	$f'$	$D$	$W$	$\phi_0^{1/2}$	$l_0^*$			
校正前	510	4	-580	16.90	97.16	115	$\pm 2^\circ$	0.14	16.76			
校正后	465.60	3.88	-527.58	19.66	96.00	115	$\pm 2^\circ$	0.06	19.64			

### 例 2 卡塞格伦系统

系统结构如图 4，主镜为抛物面反射镜，次镜为双曲面反射镜。主镜偏心率  $e_1$ ，次镜偏心率  $e_2$ 。校正结果见表 2。 $LA'$  为轴上点边缘球差， $K_T'$  为最大视场边缘子午彗差，可见随着平均弥散盘半径  $\phi_0^{1/2}$  缩小，它们也减小，象质改善。

表2 图4系统自动校正前后的结构参数

参数	$e_1$	$e_2$	$r_{01}$	$d_1$	$r_{02}$	$t'_0$	$f'$	$D$	$W$	$\phi_0^{1/2}$	$LA'$	$K'_T$
校正前	1	3	-800	-240	-480	473.84	1200	141	$\pm 0.17^\circ$	0.11	7.95	-0.0260
校正后	1	2.15	-867.07	-263.93	-531.04	469.41	1200	141	$\pm 0.17^\circ$	0.003	0.089	0.0088

## 参 考 文 献

- [1] D. P. Feder, *J. O. S. A.*, **41** (1951), 630.
- [2] C. G. Wynne, *Proc. Phys. Soc. (London)*, **73** (1959), 316, 777; *Appl. opt.*, **2** (1963), 1233.
- [3] E. Glatzel, *Optik*, **18** (1961), 577; *Appl. Opt.*, **7** (1968), 265.
- [4] D. S. Grey, *J. O. S. A.*, **53** (1963), 672, 677.
- [5] Tatsuro Suzuki and Seiji Yonezawa, *J. O. S. A.*, **56** (1966), 677.
- [6] B. Ф. Бабинцев, *Опт. мех. про.*, **5** (1966), 14.
- [7] И. Н. 布隆什坦, К. А. 谢缅佳也夫, 《数学手册》(1960), p. 205.
- [8] 苏定强、王亚男, 天文学报, **15** (1974), 51.

## AUTOMATIC DESIGN OF NON-COAXIAL ASPHERICAL INFRARED OPTICAL SYSTEM

ZHANG YOU-WEN YANG CHEN-WU YANG XIAO-DONG

(Shanghai Institute of Technical Physics, Academia Sinica)

### ABSTRACT

The correct formulae are given for refractive and reflective laws in vector form. An analytic set of general purpose skew ray tracing formulae is derived for spherical, aspherical, cylindrical and plane surfaces, and applied to the coaxial optical system and non-coaxial optical system. The well known Feder's formulae correspond to the case of sphere treated here. Furthermore, by using the formulae given here, the uncorrect intersecting point between the ray and sphere that may appear in the Feder's formulae can be eliminated automatically. By five year's practice, it is found that the formulae given here are convenient in automatic design of optical systems, and have fairly high accuracy.

We take the blur circle as the merit function and use the method of damped least-squares, the formulae are applied to design the non-coaxial Catadioptric (Bouwers) objective and aspherical Cassegrainian objective automatically, and fairly good result are obtained. Furthermore, the position of minimum cross-section of ray bundles is determined for locating infrared detector.