

# 变动边界微扰法及其对精密电容器 误差计算的应用\*

张 钟 华

(中国计量科学研究院)

## 提 要

在研究精密电容器的几何尺寸误差引起的电容量误差时，往往需在不规则边界的边值条件下求解拉普拉斯方程。这里提供一种解决这类问题的计算方法——“变动边界微扰法”，并给出了微扰过程的收敛条件。在此方法的基础上，还求出了电极系统有任意变形时电荷量变化的一般计算公式。把这些结果应用于 Lampard-Thompson 型的计算电容时，可以证明关于这种电容器的一些普遍性质。

## 一、变动边界微扰法

在设计精密电容器时，常会遇到这样一类问题：实际上能加工出来的电极往往和设计的理想几何形状有一些差别，因而带来了电容量误差。我们希望能计算出这种误差。

在数学上，这种误差计算相当于求解边界发生某种变形时的拉氏方程狄义赫利问题的解。一般说来，要求出边界有任意不规则变形时的解答是相当困难的。但是我们可以注意到这样的情况：电极的理想几何形状往往是较为规则的，比较容易求得电位函数的解。如果能够把变形后的电位函数用变形前的电位函数的某种展开式表示出来，问题就可以解决。这就是所要介绍的“变动边界微扰法”。

为了叙述清楚，我们先从形式上推导出所需的计算公式，以后再给出关于收敛性的证明。

设在三维空间中有一个域  $\Omega_0$ ，其边界为  $\Gamma_0$ 。 $\Gamma_0$  上定义了一个有界函数  $f_0(M_0)$ 。 $M_0$  为  $\Gamma_0$  上的变点。假定对于边值  $f_0(M_0)$  的  $\Omega_0$  域内的拉氏方程狄义赫利内问题可以求解，其解为调和函数  $\varphi_0(N_0)$ 。 $N_0$  为  $\Omega_0$  域内的变点。

现令  $\Gamma_0$  上的各点作一微小位移  $\delta_{M_0}$ 。位移后  $M_0$  移到对应点  $M$  处。 $\delta_{M_0}$  表示  $M_0$  点的位移向量。假定位移后的各点构成一连续闭曲面  $\Gamma$ ，所包围的域为  $\Omega$ ，并假定在位移时对应点上定义的函数值不变，这样就可得到一个对应于  $\Gamma$  上的边值条件的  $\Omega$  域中的拉

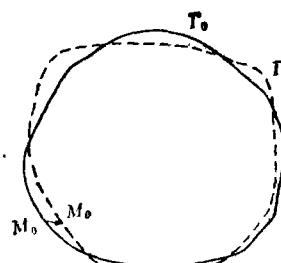


图 1

\* 1978 年 7 月 20 日收到。

氏方程狄义赫利内问题的解  $\varphi(N)$ ,  $N$  为  $\Omega$  域内的变点。

$\Omega$  和  $\Omega_0$  域可能是相互交错的, 即  $\Omega_0$  域有一部分不包括在  $\Omega$  域中。为了便于进一步研究, 我们对调和函数  $\varphi(N)$  用幂级数作解析延拓。利用多元复变函数的理论, 和二维情形相似, 可以证明这种延拓的唯一性。假设延拓后的  $\Omega$  域包括了闭域  $\Omega_0 + \Gamma_0$  的全部。

现在可以以  $\Gamma_0$  上的任意点  $M_0$  为中心把函数  $\varphi$  展成幂级数, 这样  $\varphi$  在  $\Gamma$  上的值可表示为

$$\varphi(M) = \varphi(M_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_{M_0}^k}{k!} \cdot \frac{\partial^k \varphi(M_0)}{\partial \delta_{M_0}^k}, \quad (1.1)$$

其中  $\delta_{M_0}$  表示位移向量  $\delta_M$  的模,  $\partial^k \varphi / \partial \delta_{M_0}^k$  表示  $\delta_M$  方向上的第  $k$  阶方向导数。

前面已假定在边界移动时对应点上定义的函数值不变, 即有

$$f(M_0) = \varphi(M). \quad (1.2)$$

因而 (1.1) 式成为

$$\varphi(M_0) = f_0(M_0) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_{M_0}^k}{k!} \cdot \frac{\partial^k \varphi(M_0)}{\partial \delta_{M_0}^k}. \quad (1.3)$$

引入函数  $\Delta\varphi(N_0)$ , 其定义为

$$\Delta\varphi(N_0) = \varphi(N_0) - \varphi_0(N_0). \quad (1.4)$$

$\Delta\varphi(N_0)$  为两个调和函数之差, 它也是个调和函数。设它在边界  $\Gamma_0$  上的值为  $\Delta f(M_0)$ , 则

$$\Delta f(M_0) = \varphi(M_0) - f_0(M_0) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_{M_0}^k}{k!} \frac{\partial^k \varphi(M_0)}{\partial \delta_{M_0}^k}. \quad (1.5)$$

显然  $\Delta f(M_0)$  仍是个未知函数。现在我们用和它相近的已知函数代替它。为此, 可作一个以  $\Gamma_0$  上的点为变点的函数  $f_1(M_0)$ , 其定义为

$$f_1(M_0) = -\delta_{M_0} \frac{\partial \varphi_0(M_0)}{\partial \delta_{M_0}}. \quad (1.6)$$

由于  $\varphi_0$  只定义在  $\Omega_0$  域内, 所以 (1.6) 式中的方向导数是指从  $\Omega_0$  内部的点逼近  $\Gamma_0$  时  $\varphi_0$  的方向导数的极限值(以下推导类同)。

当  $\varphi_0(N_0)$  和  $\delta_{M_0}$  已知时, (1.6) 式表示一个定义在  $\Gamma_0$  上的已知函数。如以  $f_1(M_0)$  为边值条件, 又可得到一个  $\Omega_0$  内拉氏方程狄义赫利内问题的解  $\varphi_1(N_0)$ 。这个调和函数实际上就是在一级近似中由 (1.4) 式定义的调和函数  $\Delta\varphi(N_0)$  的近似值。为了说明这一点, 可以再令

$$\Delta^2\varphi(N_0) = \Delta\varphi(N_0) - \varphi_1(N_0). \quad (1.7)$$

然后求调和函数  $\Delta^2\varphi(N_0)$  在边界  $\Gamma_0$  上的值  $\Delta^2 f(M_0)$ 。这只需把 (1.4) 式代入 (1.5) 式的右边,

$$\begin{aligned} \Delta f(M_0) &= - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_{M_0}^k}{k!} \frac{\partial^k \varphi_0(M_0)}{\partial \delta_{M_0}^k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_{M_0}^k}{k!} \frac{\partial^k \Delta\varphi(M_0)}{\partial \delta_{M_0}^k} \\ &= f_1(M_0) - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\delta_{M_0}^k}{k!} \frac{\partial^k \varphi_0(M_0)}{\partial \delta_{M_0}^k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_{M_0}^k}{k!} \cdot \frac{\partial^k \Delta\varphi(M_0)}{\partial \delta_{M_0}^k}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

把(1.8)和(1.7)式相比较,就得

$$\Delta^2 f(M_0) = - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\delta_{M_0}^k}{k!} \cdot \frac{\partial^k \varphi_0(M_0)}{\partial \delta_{M_0}^k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_{M_0}^k}{k!} \cdot \frac{\partial^k \Delta \varphi(M_0)}{\partial \delta_{M_0}^k}. \quad (1.9)$$

当  $\delta_{M_0}$  很小时,由(1.4)式给出的  $\Delta \varphi(N_0)$  也是个小量。因而  $\Delta^2 f(M_0)$  的表达式中只包括了二阶以上的小量。由调和函数的极值原理,可从(1.7)和(1.9)式推知,  $\Delta \varphi(N_0)$  和  $\varphi_1(N_0)$  只差一个二阶小量,因此  $\varphi_1(N_0)$  可以取作  $\Delta \varphi(N_0)$  的近似值。

下面再进行二级近似。同样可以作函数

$$f_2(M_0) = - \sum_{k=1}^2 \frac{\delta_{M_0}^k}{k!} \cdot \frac{\partial^k \varphi_{2-k}(M_0)}{\partial \delta_{M_0}^k}. \quad (1.10)$$

并设对应于边值条件  $f_2(M_0)$  的  $\Omega_0$  域内拉氏方程狄义赫利内问题的解为  $\varphi_2(N_0)$ 。参照(1.7)式,再令

$$\Delta^3 \varphi(N_0) = \Delta^2 \varphi(N_0) - \varphi_2(N_0). \quad (1.11)$$

把(1.7)式代入(1.9)式右边的第二项,就可以相似地求得  $\Delta^3 \varphi(N_0)$  在  $\Gamma_0$  上的值  $\Delta^3 f(M_0)$ :

$$\Delta^3 f(M_0) = - \sum_{l=2}^3 \sum_{k=l}^{\infty} \frac{\delta_{M_0}^k}{k!} \frac{\partial^k \varphi_{3-l}(M_0)}{\partial \delta_{M_0}^k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_{M_0}^k}{k!} \frac{\partial^k \Delta^2 \varphi(M_0)}{\partial \delta_{M_0}^k}. \quad (1.12)$$

显然,  $\Delta^3 f(M_0)$  的表达式中只包含了三阶以上的小量。

把此过程一直做下去,可以得到

$$\begin{aligned} \varphi(N_0) &= \varphi_0(N_0) + \Delta \varphi(N_0) \\ &= \varphi_0(N_0) + \varphi_1(N_0) + \Delta^2 \varphi(N_0) \\ &= \varphi_0(N_0) + \varphi_1(N_0) + \varphi_2(N_0) + \Delta^3 \varphi(N_0) \\ &\quad \dots \\ &= \varphi_0(N_0) + \sum_{n=1}^m \varphi_n(N_0) + \Delta^{m+1} \varphi(N_0), \end{aligned} \quad (1.13)$$

其中各  $\varphi_n(N_0)$  均为调和函数,它们在  $\Gamma_0$  上的边值为

$$f_n(M_0) = - \sum_{k=1}^n \frac{\delta_{M_0}^k}{k!} \cdot \frac{\partial^k \varphi_{n-k}(M_0)}{\partial \delta_{M_0}^k} \quad n = 1, 2, 3 \dots. \quad (1.14)$$

余项  $\Delta^{m+1} \varphi(N_0)$  也是调和函数,在  $\Gamma_0$  上的边值为

$$\Delta^{m+1} f(M_0) = - \sum_{l=2}^{m+1} \sum_{k=l}^{\infty} \frac{\delta_{M_0}^k}{k!} \frac{\partial^k \varphi_{m+1-l}(M_0)}{\partial \delta_{M_0}^k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_{M_0}^k}{k!} \frac{\partial^k \Delta^m \varphi(M_0)}{\partial \delta_{M_0}^k}. \quad (1.15)$$

当  $\varphi_0(N_0)$  和  $\delta_{M_0}$  已知时,可以从(1.6)式求得  $f_1(M_0)$  及相应的  $\varphi_1(N_0)$ ,再从(1.10)式由  $\varphi_0(N_0)$  和  $\varphi_1(N_0)$  求得  $f_2(M_0)$  及  $\varphi_2(N_0)$ 。这样一直做下去,就可以求出所有的  $\varphi_n(N_0)$ ,  $n = 1, 2, 3 \dots$

如果级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(N_0)$  收敛,并且  $\lim_{m \rightarrow \infty} \Delta^m \varphi(N_0) = 0$ ,我们所作的微扰过程就是收敛的。未知函数  $\varphi(N_0)$  就由(1.13)式表示成一系列已知函数之和,原来的问题就解决了。

在附录中我们给出了关于微扰过程收敛的充分条件及相应的证明。

由(1.14)及(1.15)式可以看到,  $\varphi_n(N_0)$  是  $n$  阶小量, 而  $\Delta^{m+1}\varphi(N_0)$  只包括  $m+1$  阶以上的小量。因此, (1.13) 式中的  $\sum_{n=1}^m \varphi_n$  项直接表示精确到  $m$  阶小量时由于边界变动而使  $\varphi_0(N_0)$  产生的误差。这对实际计算误差是很方便的。由于误差量本身一般说来并不要求计算到很高的精度, 通常只作一两次微扰就足够了。

## 二、接入定压源的电极系统发生微小变形时, 电荷量变化的计算公式

上节给出的方法, 可以计算边界发生微小变形时空间各点的电位函数的变化量。计算时需求解一系列边值问题。但在实际计算精密电容器的误差时, 并不需要知道空间各点电位函数的全部情况, 只要求得电极上的电荷量的变化就可以了。下面给出一个计算电极系统发生微小变形时电荷量的变化公式。它仅对一阶近似成立, 但计算起来简便得多。

**定理一**  $N$  个导体组成电极系统, 设各电极表面发生了任意的微小变形, 而电位保持不变, 则在一阶近似中各电极的电荷量的变化为

$$\Delta q_i = \sum_{j=1}^N \oint_{S_j} \epsilon (\mathbf{E}_j \cdot \boldsymbol{\delta}_j) \mathbf{E}_{ji} \cdot d\mathbf{S}_j, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N. \quad (2.1)$$

这里  $d\mathbf{S}_j$ ,  $\mathbf{E}_j$ ,  $\mathbf{E}_{ji}$  均为变形前的电极系统的物理量,  $d\mathbf{S}_j$  为第  $j$  个电极表面的向量面积元, 指向外法线方向,  $\mathbf{E}_j$  为该电极表面的电场强度,  $\mathbf{E}_{ji}$  为第  $j$  个电极加单位电位而其他电极均接地时第  $i$  个电极表面的电场强度,  $\boldsymbol{\delta}_j$  为电极表面变形时的位移向量。

证明 我们来考虑第  $i$  个电极上电荷量的变化。

先令  $\boldsymbol{\delta}_i \equiv 0$ 。按(1.4)–(1.9)式, 在一阶近似中第  $j$  个电极 ( $j \neq i$ ) 表面的变形等效于在未变形的电极表面上加上了附加电位

$$(\varphi_1)_j = -\boldsymbol{\delta}_j \cdot (\nabla \varphi_0)_j = \mathbf{E}_j \cdot \boldsymbol{\delta}_j. \quad (2.2)$$

面积元  $dS_j$  上的附加电位在第  $i$  个电极上引起的附加感应电荷量为

$$dq_{ji} = -(\varphi_1)_j dC_{ji} = -(\mathbf{E}_j \cdot \boldsymbol{\delta}_j) dC_{ji}, \quad (2.3)$$

$dC_{ji}$  为  $dS_j$  对第  $i$  个电极的部分电容量。为了求出  $dC_{ji}$ , 我们在第  $i$  个电极上加单位电位而把其他电极均接地, 此时  $dS_j$  上的电荷量应为

$$dq'_{ji} = \epsilon \mathbf{E}_{ji} \cdot d\mathbf{S}_j = -dC_{ji}. \quad (2.4)$$

由(2.3)和(2.4)式就得到第  $i$  个电极上电荷量的变化为

$$\Delta q'_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \oint_{S_j} \epsilon (\mathbf{E}_j \cdot \boldsymbol{\delta}_j) \mathbf{E}_{ji} \cdot d\mathbf{S}_j. \quad (2.5)$$

再假设  $\boldsymbol{\delta}_i \neq 0$  而  $\boldsymbol{\delta}_j \equiv 0$  ( $j \neq i$ )。此时

$$dq_{ji} = (\varphi_1)_j dC_{ji} = (\mathbf{E}_j \cdot \boldsymbol{\delta}_j) dC_{ji}, \quad (2.6)$$

$dC_{ji}$  表示  $dS_j$  对除第  $i$  个电极以外的所有其他电极的部分电容。当第  $i$  个电极加单位电位而其他电极均接地时显然有

$$dC_{ii} = \epsilon \mathbf{E}_{ii} \cdot d\mathbf{S}_i. \quad (2.7)$$

由(2.6)和(2.7)式就得到第*i*个导体的电荷量由于变形 $\delta_i$ 而引起的变化为

$$\Delta q_i^{(1)} = \iint_{S_i} \epsilon (\mathbf{E}_i \cdot \delta_i) \mathbf{E}_{ii} \cdot d\mathbf{S}_i. \quad (2.8)$$

由于一阶近似中可以利用叠加原理，把(2.5)和(2.8)式相加就得到(2.1)式。证毕。

可以看到，按(2.1)式，如果我们对未变形的电极系统求出了 $\mathbf{E}_i$ 和 $\mathbf{E}_{ii}$ ，任意变形引起的电荷量变化可用积分求出，无需再求解边值问题。计算比较方便。(2.1)式的物理意义也较明显。

### 三、对 Lampard-Thompson 型计算电容的应用

把(2.1)式应用于 Lampard-Thompson 型的计算电容时<sup>[1]</sup>，可以证明关于这种电容器的一些普遍性质。这里仅举两个例子。

先证明一个关于这种电容器的电极发生任意微小变形时电容量变化的定理。

**定理二** 设有一无限长的 Lampard-Thompson 型计算电容，其截面为一任意闭曲线，四个绝缘气隙把柱壳分成了四块电极。电容器的轴向坐标为 $z$ 。

现设各电极发生了任意的微小变形 $\delta$ ，则“交叉电容量” $C_1$ 和 $C_2$ 由于变形 $\delta$ 而引起的变化量，在一阶近似中，就等于电极发生了二度的“轴向平均变形” $\delta$ 时的变化量。 $\delta$ 的定义为

$$\delta = \lim_{L_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{L_0} \int_{L_0} \delta dz. \quad (3.1)$$

$L_0$ 表示电容器的轴向长度。

如果变形前 $C_1 = C_2$ ，则变形后平均电容量 $\bar{C} = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)$ 在一阶近似中仍保持不变。

证明 先研究 $C_1$ 的变化。设此时电极4作为指零极。高压极2加上单位电位。

按(2.1)式，此时 $C_1$ 的变化量为

$$\Delta C_1 = -\Delta q_4 = - \sum_{i=1}^4 \iint_{S_i} \epsilon (\mathbf{E}_i \cdot \delta_i) \mathbf{E}_{i4} \cdot d\mathbf{S}_i. \quad (3.2)$$

此式中的面积分是沿着未变形的柱壳表面进行的。这样的积分可以分解为沿着截面周线上的线元 $dl$ 的积分和沿着 $z$ 方向的积分。由于 $\mathbf{E}_i$ ， $\mathbf{E}_{i4}$ 都属于未变形时的物理量，与 $z$ 无关。再考虑到(3.1)式的定义，就可以把(3.2)式写为

$$\Delta C_1 = - \sum_{i=1}^4 \iint_{S_i} \epsilon (\mathbf{E}_i \cdot \delta_i) \mathbf{E}_{i4} \cdot d\mathbf{S}_i. \quad (3.3)$$

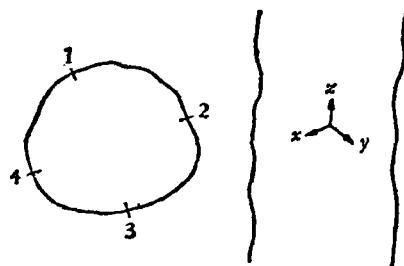


图 2

此式正好就表示电极发生了与  $z$  无关的二度轴向平均变形  $\delta$  时  $C_1$  的变化量。

对  $C_2$  也可进行类似的证明而得到同样的结论。

由于  $\delta$  与  $z$  无关, 所以如变形前  $C_1 = C_2$ , 利用文献 [1] 中已证明过的结论可知, 平均电容量在一阶近似中是保持不变的。

这个定理的主要作用是把文献 [1] 中关于二度场证明过的结论推广到了三维的微小变形的情形。

文献 [2] 中对“可动屏蔽”型的计算电容进行了较详细的实验研究, 发现这种电容器的精度主要取决于端部效应引起的附加长度  $\Delta L$  能否在两次测量过程中精确相等。由于  $\Delta L$  与电极间距离  $a$  有关, 所以对电极系统的平行性及直线性提出了很高的要求。

下面我们给出一个把 (2.1) 式应用到“可动屏蔽”型的计算电容时得到的结果。

利用 (2.1) 式及电极系统的对称性可以证明, 在一阶近似中,  $\Delta L$  只和两个交叉电容的极间距离  $a$  和  $b$  的平均值  $s$  有关, 即有

$$\Delta L = A \cdot s \left[ 1 + B \left( \frac{a - b}{s} \right)^2 + \dots \right]. \quad (3.4)$$

此式的证明过程极为简单, 故不再写出。 (3.4) 式可在实际设计中加以应用。例如可以在移动屏蔽杆上装上一个绝缘的“指零环”, 作为电容传感器。指零环对四个主电极的电容量之和就反映了  $s$  的变化。如求得了 (3.4) 式中的系数, 就可以利用所得的关于  $s$  的数据进行修正, 以提高电容量的精度。

对方形截面的“可动屏蔽”型计算电容, 我们已利用 (2.1) 式求出了 (3.4) 式中两个系数  $A$  和  $B$  的解析表达式

$$A = \frac{16}{\pi^2 \ln 2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m m^2}{(2n-1)^2 [m^2 + (2n-1)^2]^{3/2}} = -0.3618448, \quad (3.5)$$

$$B = \frac{24}{\pi^2 \ln 2 \cdot A} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m m^2 [4(2n-1)^2 - m^2]}{[m^2 + (2n-1)^2]^{5/2}} = 2.506126. \quad (3.6)$$

文献 [2] 中给出了

$$\left. \frac{d\Delta L}{da} \right|_{a=b} \approx -0.2. \quad (3.7)$$

而按我们求得的 (3.4) 和 (3.5) 式有

$$\left. \frac{d\Delta L}{da} \right|_{a=b} = \frac{A}{2} = -0.1809224. \quad (3.8)$$

两者结果相当接近。这说明方形截面的计算电容中电场的分布规律和实际的计算电容是相差不多的。如需对实际计算电容求出更精确的  $A$  值以便于修正, 可利用 (2.1) 式结合电子数字计算机求出。

## 附 录

### 变动边界微扰法的收敛条件

**定理三** 如果第一节中的位移向量函数  $\delta_{M_0}$  及逐级微扰求得的  $\varphi_n(N_0)$  满足以下条件:

1. 以  $\Gamma_0$  上各点为中心把函数  $\varphi_n(N_0)$  ( $n = 0, 1, 2, 3 \dots$ ) 展成幂级数时, 位移  $\delta_{M_0}$  小于相应点的收敛半径;  
2. 存在一个小于 1 的正常数  $\lambda$ , 使由 (1.14) 式表示的函数  $f_n(M_0)$  满足

$$\left| \frac{f_{n+1}(M_0)}{f_n(M_0)} \right| \leq \lambda < 1 \quad n = 0, 1, 2, 3 \dots; \quad (\text{A.1})$$

则对闭域  $\Omega + \Gamma$  中的各点, 级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n$  一致收敛, 且有

$$\varphi(N) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(N) \quad N \in \Omega + \Gamma. \quad (\text{A.2})$$

对于不在  $\Omega + \Gamma$  中的  $\Omega_0$  域中的点, 则函数  $\varphi(N)$  可以进行解析延拓, 且级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n$  就收敛于  $\varphi(N)$  的解析延拓值.

证明 由第一个假设条件可知, 凡在  $\delta_{M_0} \neq 0$  处, 函数  $\varphi(N_0)$  ( $n = 0, 1, 2, 3 \dots$ ) 均是解析的, 故从 (1.6) — (1.14) 式的全部推导均是有效的.

再由 (A.1) 式进行递推可得

$$|f_n(M_0)| \leq \lambda^n |f_0(M_0)|. \quad (\text{A.3})$$

级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n$  在  $0 \leq \lambda < 1$  时是收敛的. 前面已假设  $f_0(M_0)$  是有界函数. 由外氏准则便可判知, 级数  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(M_0)$  对  $\Gamma_0$  上各点是一致收敛的.

现在再把  $f_n(M_0)$  的定义 (1.14) 式代入级数, 可得

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(M_0) &= f_0(M_0) - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \frac{\delta_{M_0}^k}{k!} \cdot \frac{\partial^k \varphi_{n-k}(M_0)}{\partial \delta_{M_0}^k} \\ &= f_0(M_0) - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_{M_0}^k}{k!} \cdot \frac{\partial^k \varphi_n(M_0)}{\partial \delta_{M_0}^k}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

但由第一个假设条件又可知, 以  $M_0$  为圆心把  $\varphi_n(N_0)$  展成幂级数时, 其收敛半径大于  $\delta_{M_0}$ . 故可把  $\varphi_n(N_0)$  用幂级数延拓到和  $M_0$  相对应的  $M$  点处. 这样就可以用幂级数来表示  $M$  点处的  $\varphi_n(M)$  值

$$\varphi_n(M) = \varphi_n(M_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_{M_0}^k}{k!} \cdot \frac{\partial^k \varphi_n(M_0)}{\partial \delta_{M_0}^k} = f_n(M_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_{M_0}^k}{k!} \cdot \frac{\partial^k \varphi_n(M_0)}{\partial \delta_{M_0}^k}. \quad (\text{A.5})$$

把 (A.5) 式代入 (A.4) 式就得到

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(M_0) = f_0(M_0) - \sum_{n=0}^{\infty} [\varphi_n(M) - f_n(M_0)]. \quad (\text{A.6})$$

等式两边同类项相消后得

$$f_0(M_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(M). \quad (\text{A.7})$$

再由 (1.2) 式就有

$$\varphi(M) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(M). \quad (\text{A.8})$$

由 (A.4) 到 (A.7) 式的推导中可以看出, 级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(M)$  是两个一致收敛级数之差, 故它也是一致收敛级数 ( $M$  和  $M_0$  可以建立一一对应的关系).

以上我们证明了对  $\Omega$  域的边界  $\Gamma$  上的任意点  $M$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(M)$  是一致收敛级数, 其和就等于函数  $\varphi(N)$  在  $M$  点的值  $\varphi(M)$ . 因而对  $\Omega$  域的任一内点也成立:

$$\varphi(N) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(N). \quad (\text{A.9})$$

对于不在闭域  $\Omega + \Gamma$  内的  $\Omega_0$  域中的点可以这样考虑: 前面已证明级数  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(M_0)$  对  $\Gamma_0$  上的点是一致收敛的, 故对  $\Omega_0$  的内点  $N_0$ , 级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(N_0)$  也一致收敛, 且级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(N_0)$  的和是调和函数. 这样, 对于不在  $\Omega + \Gamma$

内的  $\Omega_0$  中的点，可以把  $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(N_0)$  看作函数  $\varphi(N)$  在这些点上的解析延拓。由延拓的唯一性可知，级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(N_0)$  的和与  $\varphi(N)$  直接用幂级数延拓到这些点处的数值是一致的。证毕。

### 参 考 文 献

[1] D. G. Lampard, *Proc. I. E. E.*, **104C** (1957), 271.

[2] W. K. Clothier, *Metrologia*, **1** (1965), 35.

## PERTURBATION METHOD FOR VARIABLE BOUNDARY PROBLEMS AND APPLICATION TO THE EVALUATION OF ERRORS IN PRECISE CAPACITORS

ZHANG ZHONG-HUA

*(National Institute of Metrology, Peking)*

### ABSTRACT

In evaluation of errors of precise capacitors due to geometric imperfection, one has to solve Laplace equation subject to irregular boundary condition. To solve such problems, a special method of calculation "Perturbation Method for Variable Boundary Problems" has been put forward, including the corresponding condition of convergence. On the basis of this method, a general formula is derived for the calculation of the variation of charges on electrodes of arbitrary shape. Applying these results to cross-capacitor based on Thompson-Lampard theorem, some general characteristics of this kind of capacitor can be predicted.