

部分相干情形下象差光学系统的直边衍射*

庄松林 陈祥祯

(上海光学仪器研究所)

提 要

本文从理论上研究了部分相干情形下,各种相干函数及相干度,对直边象场分布的影响。指出了照明条件与成象之间的密切关系,从而得到选择最佳照明条件的可靠途径;从对象差光学系统的理论计算表明,直边影象的辐射强度分布,很灵敏地反映了光学系统的品质,从而它可以作为部分相干情形下,实际光学系统的质量判据。

一、引 言

光学系统的成象性质,对相干及非相干系统都进行了较充分的研究,两者分别可以用对振幅或强度的正弦周期物的调制度及位相的传递来描写,这是基于它们分别对振幅或强度是线性的。但对部分相干系统,由于它对振幅及强度的非线性,原则上不能用类似的方法进行处理。为了便于描述,Becharer 及 Parrent^[1] 讨论了振幅型正弦物的部分相干象,而 Swing 及 Clay^[2] 讨论了强度型正弦物的部分相干象,并用对基频的对比传递来定义表观传递函数 (apparent transfer function),而忽略了部分相干象中高次谐波部分的影响;Jaiswal 等人^[3] 讨论了正弦波、方波、三角波等振幅型周期物。Ichioka 等人^[4,5] 讨论了正弦复振幅周期物的部分相干象,并用象的最大、最小亮度来定义广义的对比度,去研究物象的广义的对比度的变化关系,这样就抛开了正弦基准物的概念,比较易于测量。但是,无论用表观传递函数还是广义对比度传递,都是勉强借用了相干或非相干传递函数的概念,理论上有很明显的不足;另一方面,基于部分相干系统对相互强度为线性, Hopkins^[6] 用对相互强度谱的传递而定义交叉传递函数,这样虽然对线性系统的描述方式而言是严格的,但由于相互强度是空间两点的函数,而交叉传递函数是两个频率之间的关联函数,两者既不能测量而又无直观的形象,不易用来对系统进行评价。所以为解决部分相干系统的评价方式,对直边的衍射象场分布进行了不少研究。Watrasiwiz^[7], Baraket^[8], Möller^[9] 等对直边影象进行了理论计算。但大多数的工作是对理想系统进行研究,或者只考虑简单的离焦或初级球差系统,而未对实际的象差系统进行实用的计算;亦没有研究直边影象的性质与物面互可干函数之间的密切联系。本文从理论上研究了部分相干情形下,各种不同类型的相干函数及不同大小的相干度对直边象场分布的影响。考虑了 Bessel 型, Sinc 型, Gauss 型等相干函数,从而指出了照明条件与成象之间的密切关系,为了使直边衍射

* 1978 年 5 月 22 日收到。

象在对部分相干象差系统的评价中达到实用化,研究了各种类型的象差对直边子午及弧矢影象的影响。由理论计算表明,直边影象的辐射强度分布,很灵敏地反映了光学系统象差的数量,从而它可能作为部分相干情形下实际光学系统的质量判据。

二、基本公式

部分相干象的性质与物平面上任意两点 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ 的相干度 $\mu(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ 有密切的关系,而物平面的相干度,可以由照明系统的相互强度的传播特性来确定。其中 \mathbf{u} 表示坐标点,即 $\mathbf{u} = (u, v)$, 相同的表示方法为: $\mathbf{x} = (x, y)$, $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ 等等。为了便于研究照明条件对物面相干度的影响, Hopkins^[10] 提出了照明系统的非相干等效光源的概念,如果确定了等效光源的辐射分布 $\gamma(\mathbf{x}_0)$, 就可按 Van Cittert-Zernik^[11] 理论来得到物面的相干度。因为 $\mu(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ 与 $\gamma(\mathbf{x}_0)$ 成傅里叶变换对,即

$$\mu(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \mathcal{F}\{\gamma(\mathbf{x}_0)\}, \quad (1)$$

当讨论稳态的情形时,

$$\mu(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) = \mathcal{F}\{\gamma(\mathbf{x}_0)\}. \quad (2)$$

等效光源的概念一般情况下仅有数学上的意义,在实际光学系统中并无明确的物理意义。但是,在某些通常的条件下,即当光源象比透镜光孔的夫琅和费衍射图的线度大得多时,可以将等效光源看成与照明系统的出瞳相重合,其尺寸、形状及辐射振幅分布与照明系统出瞳处相同。但因它是一个非相干的次级光源,故没有一个固定的周相关系,这是与照明系统出瞳处复振幅分布的不同之处,并由此可见,由于照明系统的象差只影响出瞳处的位相变化,所以它并不影响物面的相干度,即照明系统的象差不会影响最后象场的辐射分布状况。若物的复透过率为 $M(\mathbf{u})$, 当系统满足等晕条件时,象面的辐射强度分布为

$$I(\mathbf{u}') = \iint \mu(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) M(\mathbf{u}_1) M^*(\mathbf{u}_2) K(\mathbf{u}' - \mathbf{u}_1) K^*(\mathbf{u}' - \mathbf{u}_2) d\mathbf{u}_1 d\mathbf{u}_2, \quad (3)$$

其中 $K(\mathbf{u}' - \mathbf{u})$ 是系统的脉冲响应函数,与光阑函数 $f(\mathbf{x})$ 互为傅里叶变换:

$$K(\mathbf{u}) = \mathcal{F}\{f(\mathbf{x})\}. \quad (4)$$

若透过物的谱为 $m(\mathbf{x})$, 即

$$m(\mathbf{x}) = \mathcal{F}\{M(\mathbf{u})\}, \quad (5)$$

则由(3)–(5)式可得强度分布为

$$I(\mathbf{u}') = \iint C(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) m(\mathbf{x}_1) m^*(\mathbf{x}_2) \exp[-2\pi i(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \cdot \mathbf{u}'] d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2, \quad (6)$$

其中 $C(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ 称为交叉传递函数,表示两个空间频率之间的关联

$$\begin{aligned} C(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &= \iint \mu(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) K(\mathbf{u}' - \mathbf{u}_1) K^*(\mathbf{u}' - \mathbf{u}_2) \exp\{2\pi i[(\mathbf{u}' - \mathbf{u}_1)\mathbf{x}_1 \\ &\quad - (\mathbf{u}' - \mathbf{u}_2)\mathbf{x}_2]\} d\mathbf{u}_1 d\mathbf{u}_2 \\ &= \iiint \gamma(\mathbf{x}_0) K(\mathbf{u}' - \mathbf{u}_1) K^*(\mathbf{u}' - \mathbf{u}_2) \exp\{2\pi i[(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1)(\mathbf{u}' - \mathbf{u}_1) \\ &\quad - (\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_2)(\mathbf{u}' - \mathbf{u}_2)]\} d\mathbf{u}_1 d\mathbf{u}_2 d\mathbf{x}_0 \end{aligned}$$

$$= \int \gamma(\mathbf{x}_0) f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1) f^*(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_0. \quad (7)$$

光阑函数表示光学系统的振幅位相透过特性及带限性质, 即

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} A(\mathbf{x}) \exp[2\pi i w(\mathbf{x})] & \|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x}\|_{\max}; \\ 0 & \text{其余.} \end{cases} \quad (8)$$

(8) 式中 $w(\mathbf{x})$ 是系统的波象差函数, (6)、(7) 式是用以计算部分相干象场分布的基本公式, (6) 式的积分域是光学系统出射光瞳交错位移后与等效光源三者的公共区域 (见图 1).

考虑直边的场分布时, 其复透过函数为

$$M(\mathbf{u}) = \begin{cases} \varepsilon(\mathbf{u}) \exp[i\phi(\mathbf{u})] & u \leq 1; \\ 1 & u > 1. \end{cases} \quad (9)$$

对于高对比直边, 令 $\varepsilon(\mathbf{u}) = 0$, 则

$$\begin{aligned} m(\mathbf{x}) &= \int_{-\infty}^{\infty} M(\mathbf{u}) \exp(2\pi i \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}) d\mathbf{u} \\ &= \frac{1}{2} \delta(y) \left[\delta(x) - \frac{i}{\pi x} \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

这样

$$I(\mathbf{u}') = I_0 + I_1(\mathbf{u}') + I_2(\mathbf{u}') + I_3(\mathbf{u}'), \quad (11a)$$

其中
$$I_0 = \frac{1}{4} C(0, 0; 0, 0),$$

$$I_1(\mathbf{u}') = \frac{i}{4\pi} \int \frac{C(x_1, 0; 0, 0)}{x_1} \exp(2\pi i x_1 u'_1) dx_1,$$

$$I_2(\mathbf{u}') = -\frac{i}{4\pi} \int \frac{C(0, 0; x_2, 0)}{x_2} \exp(-2\pi i x_2 u'_2) dx_2,$$

$$I_3(\mathbf{u}') = \frac{1}{4\pi^2} \iint \frac{C(x_1, 0; x_2, 0)}{x_1 x_2} \exp[-2\pi i (x_1 - x_2) u'_1] dx_1 dx_2, \quad (11b)$$

I_0 是直流分量, 它保证 $I(\mathbf{u}')$ 为非负, 当光学系统无切趾, 且为旋转对称的均匀照明时,

$$I_0 = \frac{1}{4} \int \gamma(\mathbf{x}_0) d\mathbf{x}_0 = \frac{\pi s^2}{4}. \quad (12)$$

(11) 式给出了用以计算部分相干情形下直边象场分布的基本公式, s 是照明孔径与物镜孔径之比, 即

$$s = \frac{n_c \sin \alpha_c}{n_0 \sin \alpha_0}. \quad (13)$$

三、互相干函数

透射物的相干度表示了物面上任意两点所发出的子波间的可干程度, 而相干度随物点相对位置而变化的规律称相干函数。由于物面互可干度是等效光源辐射分布的傅里叶

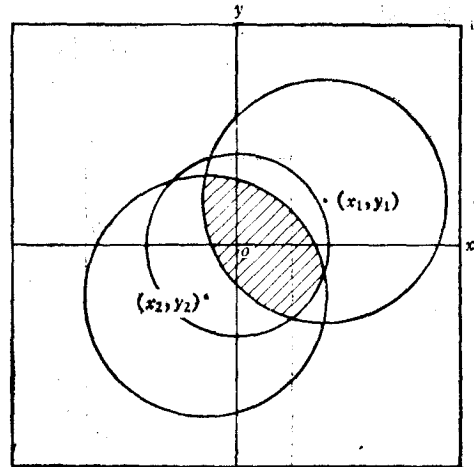


图 1 $C(x_1, x_2)$ 的积分域

变换,所以它就完全取决于照明系统的性质. 对于通常遇到的照明条件,我们研究如下几
种类型的相干函数.

1. Bessel 型

$$1) \mu_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \frac{2J_1(s\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|)}{s\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|}; \quad (14)$$

$$2) \mu_2(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \frac{1}{1 - \eta^2} \left[\frac{2J_1(s\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|)}{s\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|} - \eta \frac{2J_1(\eta s\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|)}{s\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|} \right]. \quad (15)$$

这相当于旋转对称的均匀照明, μ_2 对应中心遮拦情况. η 为遮拦比.

2. Sinc 型

$$3) \mu_3(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \frac{\sin(s_u|u_1 - u_2|)}{s_u|u_1 - u_2|} \cdot \frac{\sin(s_v|v_1 - v_2|)}{s_v|v_1 - v_2|}. \quad (16)$$

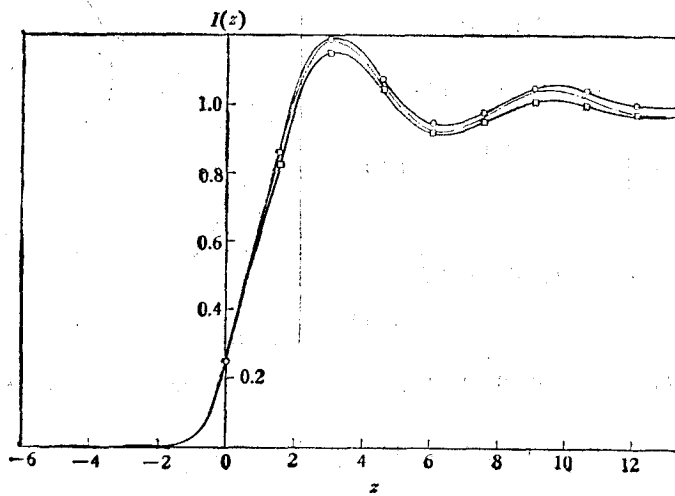


图2 $s = 0.2$ 时三类相干函数的直边衍射分布(图2—图4图例相同)
 $z = \frac{2\pi n \sin \alpha}{\lambda} \xi$, ξ 为象面实际坐标; \circ 为 Bessel; \square 为 Sinc, $-\cdot-$ 为 Gauss 型

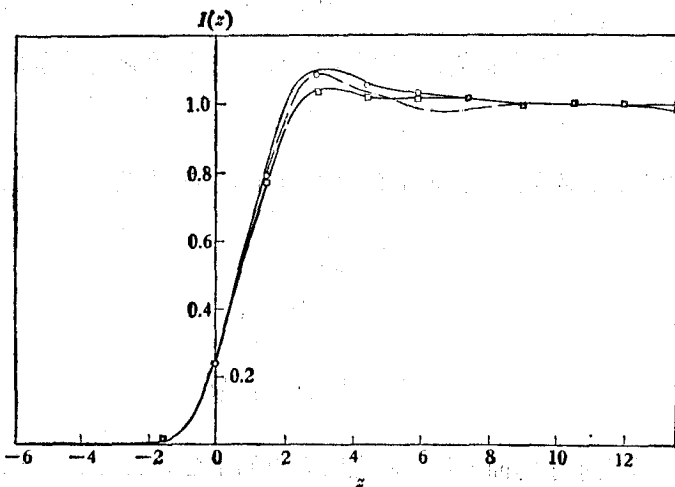


图3 $s = 0.6$ 时

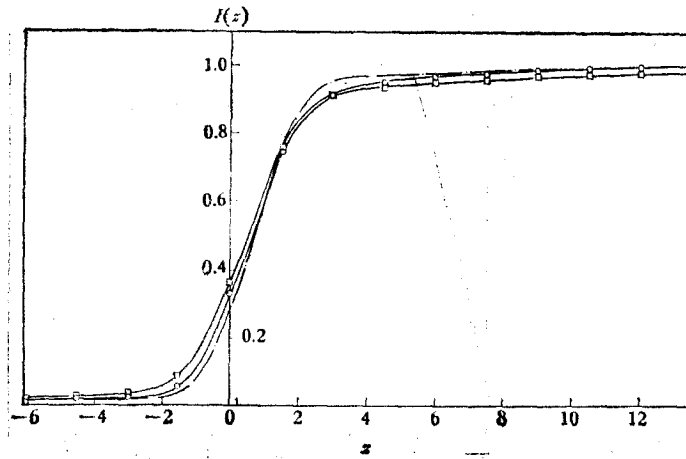


图 4 $s = 1.0$ 时

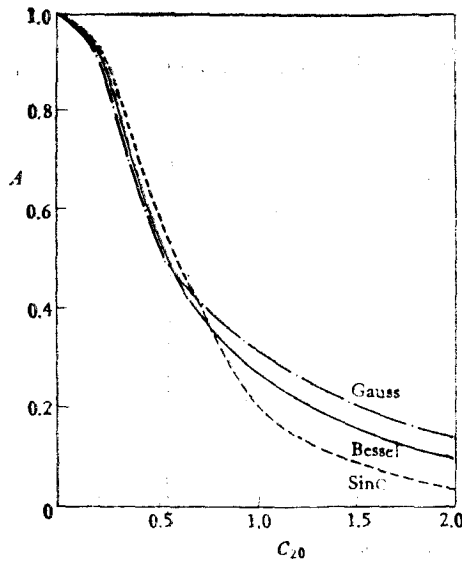


图 5 直边衍射象锐度 A 与离焦系数的关系

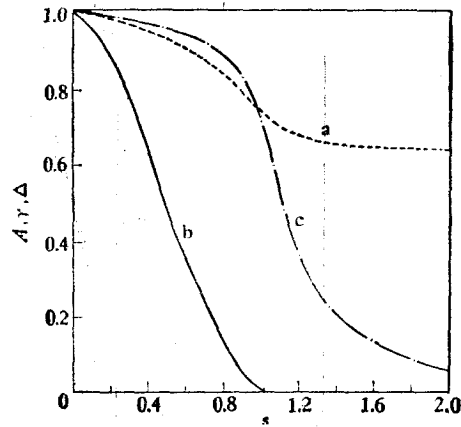


图 6

(a) 锐度 A , (b) 对比度 γ , (c) 几何位置位移量 Δx 与 s 的依赖关系

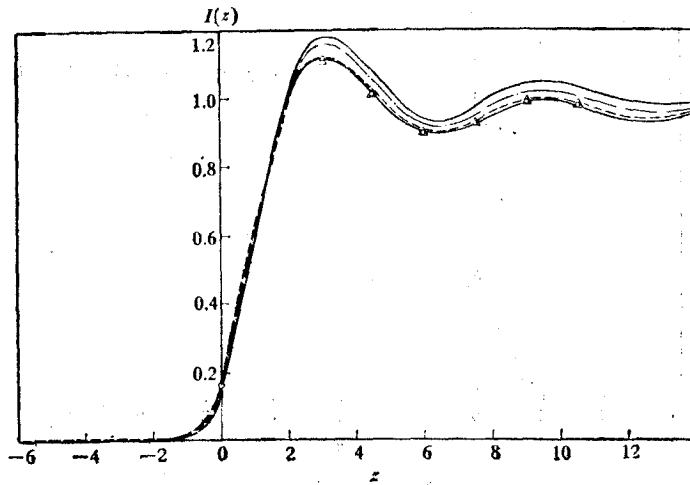
这种情况相当于等效光源形状为矩形, 其中 $s_u^2 + s_v^2 = s^2$.

3. Gauss 型

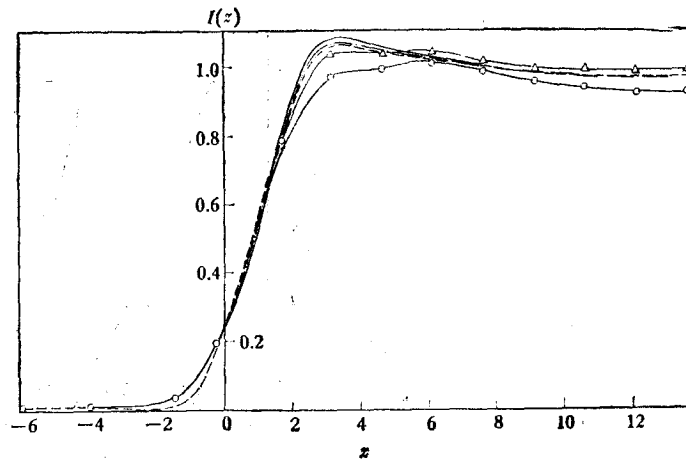
$$4) \mu_4(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \exp(-\alpha s \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|^2). \quad (17)$$

当等效光源的辐射分布为 Gauss 分布时, 透射物的相干函数亦是 Gauss 型的.

对所研究的四种相干函数, 不管是哪一种类型, 当 $s \rightarrow \infty$ 时, $\mu_i \rightarrow 0$, 这对应于非相干极限; 当 $s \rightarrow 0$ 时, $\mu_i \rightarrow 1$, 这对应于相干极限. 其中 μ_i 是 s 的单调函数, 而对 Bessel 型或 Sinc 型, 通常只关心 μ 从 1 下降到第一个零点的范围, 因为从第一个零点以后, 相干函数都是相当接近于零, 所以可以直接用 s 的大小来衡量相干度. 即当物镜孔径不变时, 照明孔径决定了透射物相干度的大小.

图7 $s = 0.2$ 环状光源时的直边衍射分布

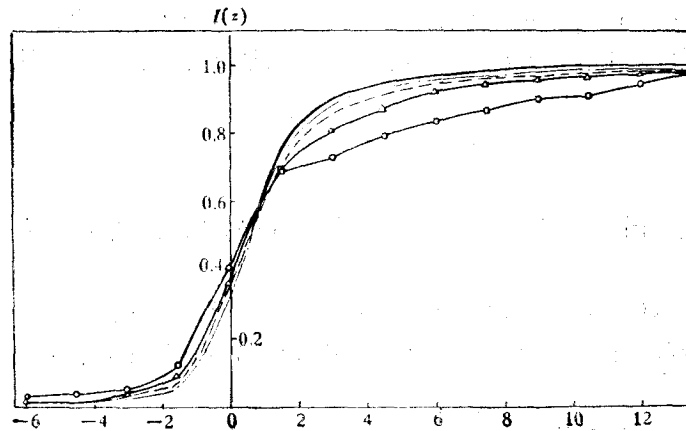
(图7—图9图例相同)

 $\eta = 0$ (为实线); 0.2 (为---); 0.4 (为虚线); 0.6 (为 Δ); 0.8 (为 \circ)图8 $s = 0.6$

数值计算以 $s = 0.2$ 及 $s = 1$ 分别表示接近相干及非相干情形, 而以 $s = 0.6$ 作为典型的部分相干情形. 图2—图4分别表示三种相干度及三类相干函数下, 理想系统的直边衍射分布. 为了进一步比较相干函数的作用, 以理想系统的直边象锐度为单位, 计算了当 $s = 0.6$ 时归化锐度随离焦系数 C_{20} 的变化情况, 如图5所示. 由理论计算得到的结果可见:

1. 相干度 无论何种类型的相干函数, 直边衍射分布与相干系数间的依赖关系, 主要有下列三种表现:

(a) 直边象的归化锐度 A (以 $s = 0$ 时的锐度为单位), 随 s 的增加而单调减少, 由于锐度与象的清晰度相对应, 即为获得清晰的影象应采取高相干照明. 而锐度的变化, 在

图9 $s = 1.0$

相干及非相干极限附近趋于缓慢, 在 $s = 1$ 附近存在拐点 (图 6(a)).

(b) 直边衍射菲涅尔环的对比度 γ (以 $s = 0$ 时的对比度为单位) 随 s 的增加而单调降低, 当 $s > 0.6$ 时, 由于相干度的破坏, 使菲涅尔环被明显地抑止. 当 $s > 1$ 时已完全抑止了菲涅尔环. 此时, 实际上已接近非相干情形 (图 6(b)).

(c) 直边衍射象对几何成象点的位移量 Δz (以 $s = 0$ 时的位移量为单位) 随 s 的增加而单调减少, 当 $s > 2$ 时位移量已趋于零.

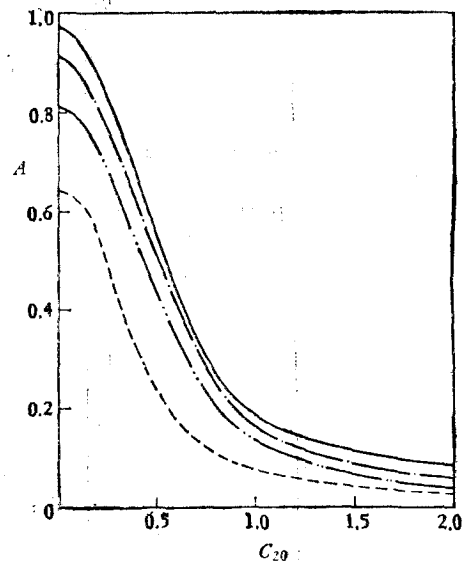
综上所述, 为了得到清晰的影象, 而又希望抑止直边衍射象中的菲涅尔环及不出现几何位置的明显移动. 必须适当地选择 s 值而使两者得到合理的折衷, 可以认为 $s = 0.6-0.8$ 是可取的. 而另一方面, 当 $s \approx 1.4$ 时可以获得最大的点分辨率^[11]. 所以, 为得到清晰影象必须以降低分辨率为代价. 这样, 可以得到以直边类型为对象的成象系统中物面应有的最佳相干度, 从而去决定最佳照明条件^[12].

2. 相干函数 对四类相干函数的理论计算表明:

(a) 该四种相干函数对直边衍射象影响的差别并不十分显著. 但 Gauss 型相干可获得较大的锐度, 而这种依赖关系随 s 的增加而趋于明显.

(b) 对于不同的离焦系数, 计算直边衍射象锐度的变化 (图 6), 可以看到, 在小离焦时 Sinc 相干有较好的清晰度, 而增大离焦时, Bessel 相干所获得的清晰度较好.

(c) 对于环状光源, 当中心遮拦比 η 增加时, 直边象锐度降低, 这亦随 s 的增加而变得显著. 图 7—图 9 是相干函数为 $\mu_2(u_1, u_2)$ 时的计算结果; 而图 10 表示以无遮拦时直

图 10 环状光源各种遮拦比 η 时锐度 A 与离焦 C_{20} 的关系

$\eta = 0.2$ (为实线); 0.4 (为---);
 0.6 (为-·-·-); 0.8 (为虚线)

边象的锐度为单位, 当 $s = 0.6$ 时各种遮拦比的锐度与 C_{20} 的关系, 明显地看到遮拦比变化时的影响。所以, 采用环状光源对直边衍射象的清晰度并不会带来好处。

四、象 差

为了研究部分相干情形下象差与直边衍射分布间的关系。取如下波差形式作为对象:

$$w(x, y) = C_{40}(x^2 + y^2) + C_{31}(x^2 + y^2)y + C_{22}y^2. \quad (18)$$

以 Bessel 相干为例, 对 $s = 0.2, 0.6$ 及 1 三种相干度分别计算了存在初级球差 (C_{40})、初

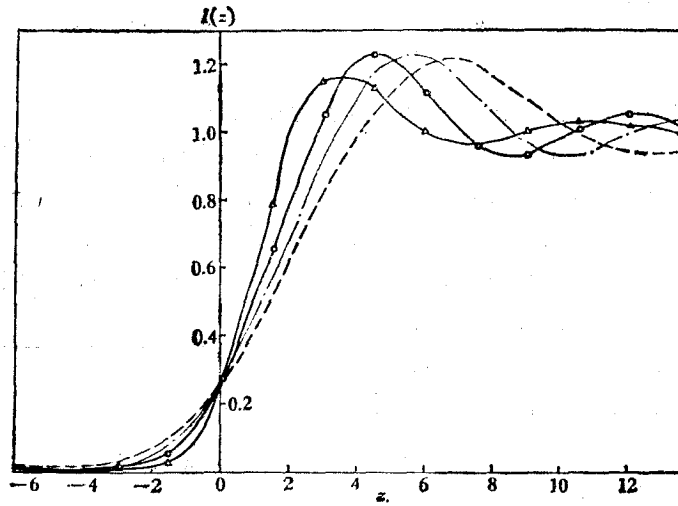


图 11 $s = 0.2$, $C_{40} = 0.25\lambda$ 为 Δ ; 0.5λ 为 \circ ; 0.75λ 为 $- \cdot -$; 1λ 为虚线时的直边衍射分布 (图 11—图 13 图例相同)

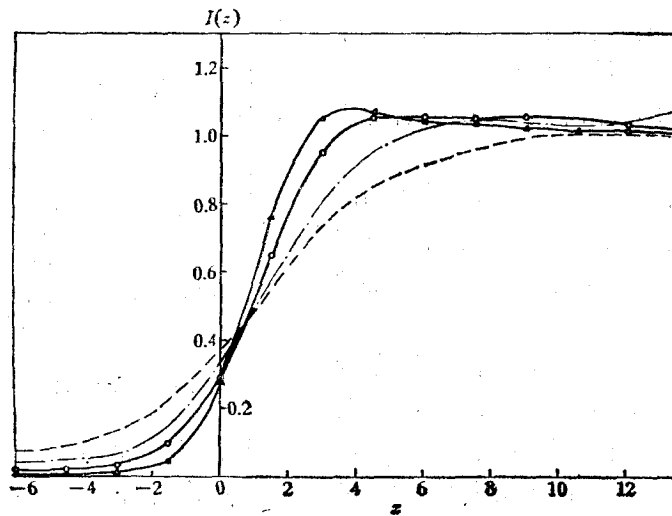
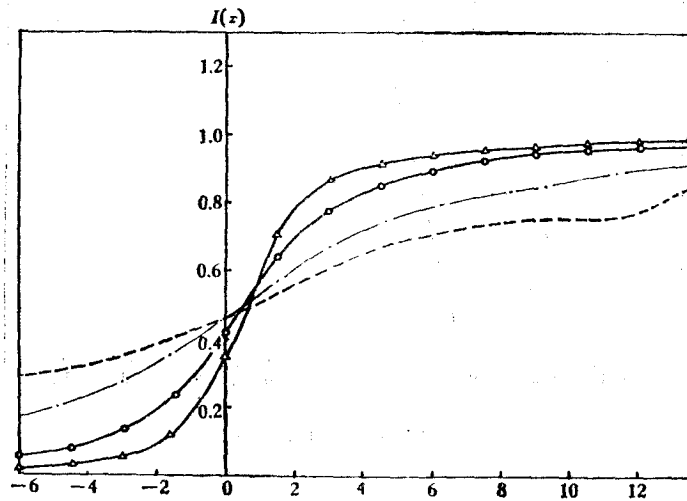
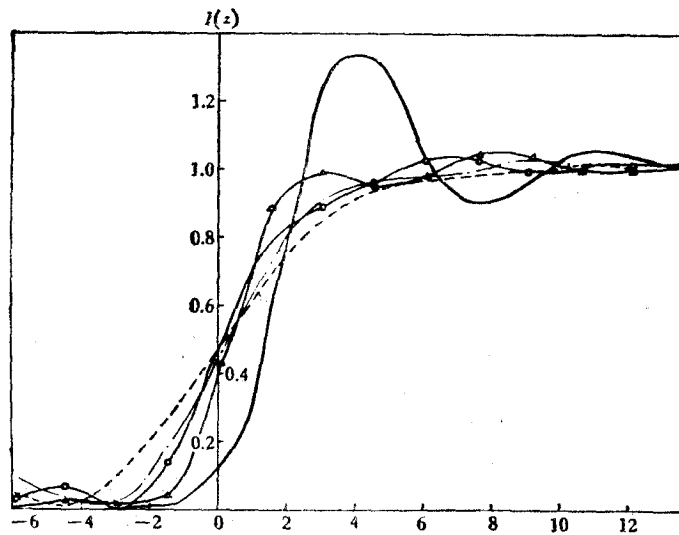


图 12 $s = 0.6$

图 13 $s = 1.0$ 图 14 $s = 0.2$, $C_{31} = -0.25\lambda$ 为实线; 0.25λ 为 Δ ; 0.5λ 为 \circ ; 0.75λ 为一·一; 1λ 为虚线时的直边衍射分布(图 14—图 16 图例相同)

级彗差(C_{31})及初级象散(C_{22})时的直边衍射分布,如图 11—图 19。理论计算表明:

1. 无论哪一类型的象差,它对直边衍射分布的影响,随 s 的增加而加剧。这种影响,包括了锐度的降低、对比度的减小及几何位移量的增加。图 20—图 22 表示了锐度与三类象差间的关系,可以清楚地看到当相干度较差时,象差的影响变得明显。

2. 非对称象差(彗差类)将引起直边象几何位置的明显移动,而对称象差(球差类)没有这种效应。这样成象的几何位移量直接综合地反映了系统的非对称象差的状况。

3. 象散及彗差主要影响弧矢方向直边的衍射分布,而对于子午方向仅有很小的影响,这与通常的直观判断亦是一致的。

4. 无论哪一种象差,当它引起的最大波差大于四分之一波长时,直边象的锐度已降低

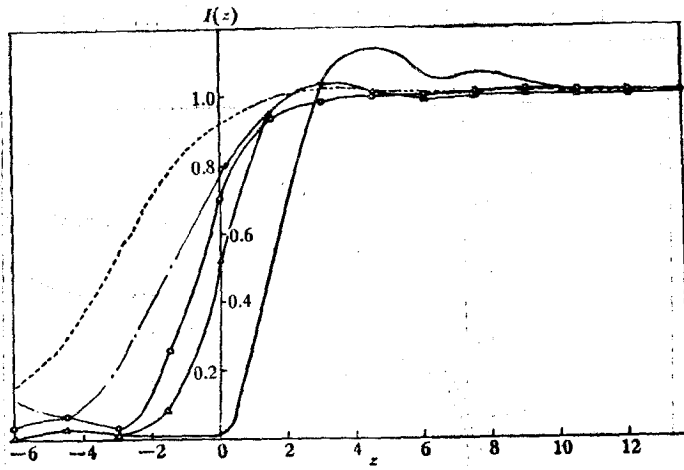


图 15 $s = 0.6$

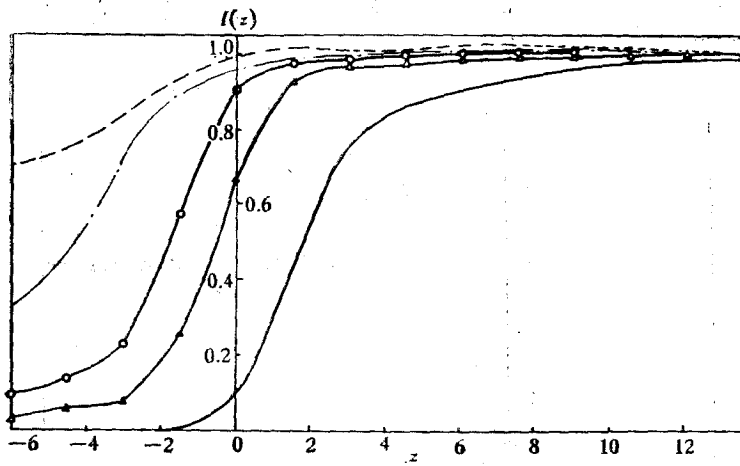


图 16 $s = 1.0$

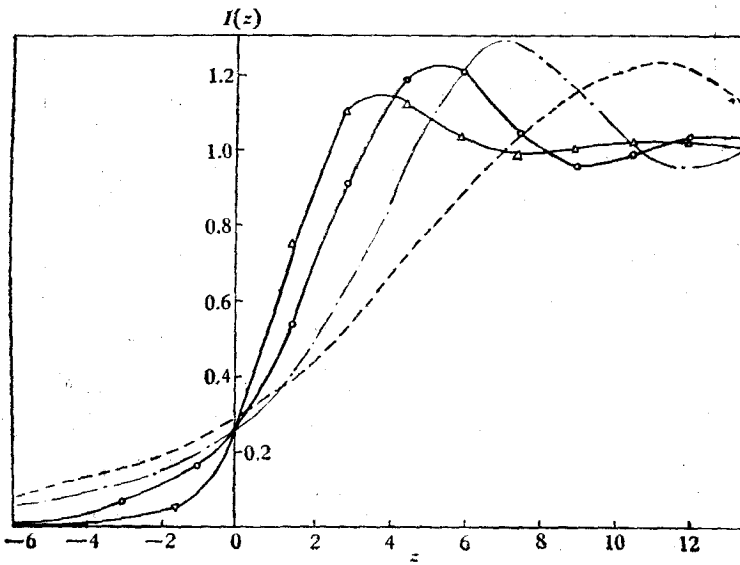


图 17 $s = 0.2$, $C_{12} = 0.25\lambda$ 为 Δ ; 0.5λ 为 \circ ; 0.75λ 为 $- \cdot -$;
 1λ 为虚线时的直边衍射分布 (图 17—图 19 图例相同)

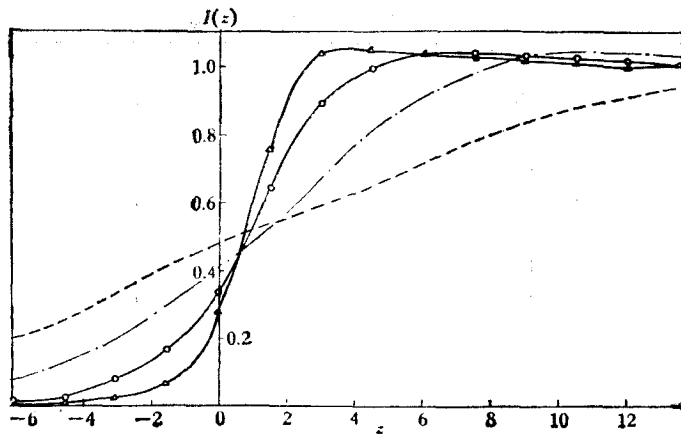


图18 $s = 0.6$

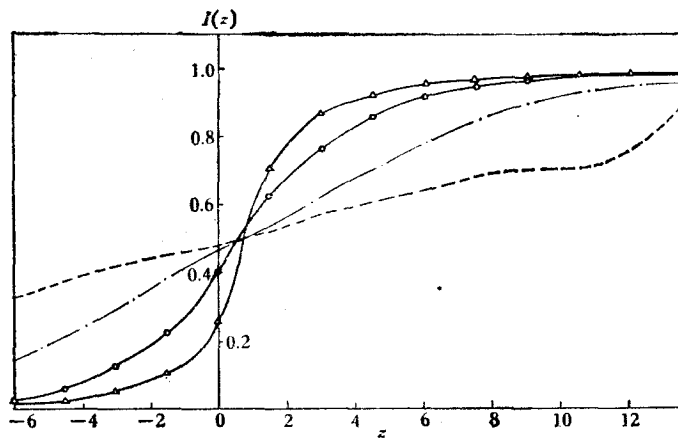


图19 $s = 1.0$

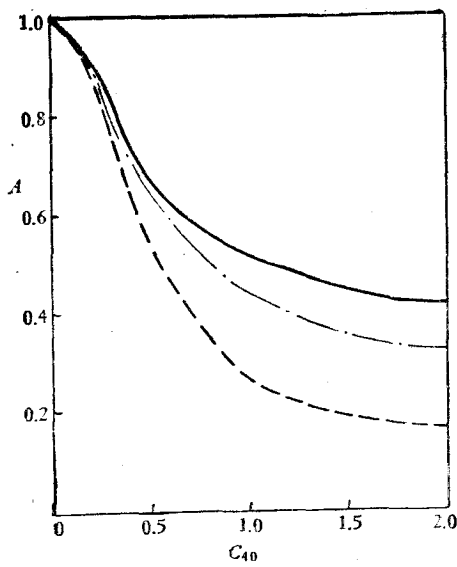


图20 锐度 A 与 C_{40} 的关系(图20 - 图22 图例相同)
 $s = 0.2$ 为实线; 0.6 为一·一; 1.0 为虚线

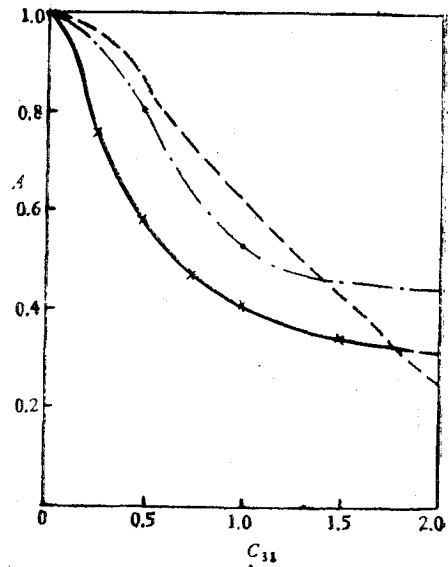
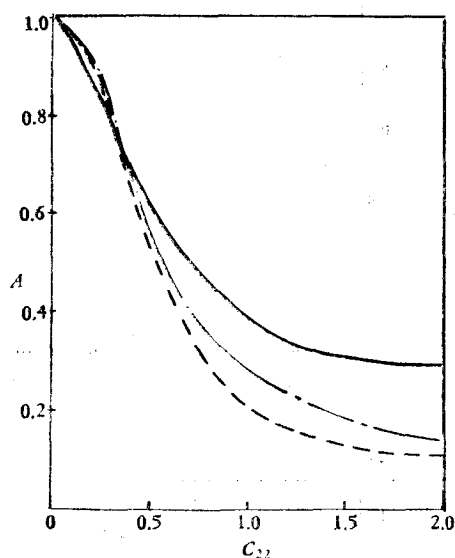


图21 锐度 A 与 C_{31} 的关系

图 22 锐度 A 与 C_{22} 的关系

至理想系统的 80% 左右,所以直边衍射分布很灵敏地反映了象差的状况。

五、结 论

光学系统的直边衍射分布,提供了关于光学系统的特征、物空间光辐射场的相干性、以及它们两者间的联系的许多信息,因此对于直边衍射的深入研究,是很有兴趣的。本文通过对各种不同类型的相干函数及相干度情形下的直边衍射分布的研究,指出了它们对光学系统成象质量的影响,从而得到选择最佳照明条件的可靠途径;而由对各种类型象差下,部分相干直边衍射分布的理论计算,指出了直边衍射分布灵敏地、综合地反映了光学系统的品质,特别是直边象的锐度及几何位置的位移可用来作为反映这种品质的数字特征,从而可进一步研究确立相应的质量标准。由我们所建立的对实际光学系统的此类计算程序,在评定部分相干光学系统的设计质量方面已带来了很大的好处,由于它与应用条件的紧密结合,对观察对象的直观反映,以及对照明条件的充分考虑,在一定程度上克服了将光学传递函数应用于部分相干系统时所遇到的理论上的不足及处理上的种种困难,从而显示了它的独特的优点。

还需指出,本文所讨论的仅限于高对比直边,但在实践中,对具有复透过直边的衍射象同样感到兴趣,由于这个问题的复杂性,我们将另文给以详细的讨论。

本工作曾得到中国科学院上海光学精密机械研究所王之江同志的热情指导;与上海光学仪器研究所方芳、钱振邦等同志进行了有益的讨论。特此谢忱。

参 考 文 献

- [1] R. J. Becherer and G. B. Parrent, *JOSA*, 57 (1967), 1479.

- [2] R. E. Swing and J. R., Clay, *JOSA*, 57 (1967), 1180.
- [3] A. K. Jaiswal and R. K. Bhogra, *Opt. Acta*, 20 (1973), 469.
- [4] Y. Ichioka, K. Yamamoto and T. Suzuki, *JOSA*, 65 (1975), 892.
- [5] Y. Ichioka and T. Suzuki, *JOSA*, 66 (1976), 921.
- [6] H. H. Hopkins, *Proc. Roy. Soc.*, A217 (1953), 408.
- [7] B. M. Watrasiewicz, *Opt. Acta*, 12 (1965), 391.
- [8] R. Baraket, *Opt. Acta*, 17 (1970), 337.
- [9] B. Möller, *Opt. Acta*, 15 (1968), 223.
- [10] H. H. Hopkins, *Proc. Roy. Soc.*, A208 (1951), 263.
- [11] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*, Fourth edition (1970), Pergamon Press.
- [12] 陈祥祯、庄松林, 自然杂志, 1 (1978), 9, 276.

THE DIFFRACTION AT A STRAIGHT EDGE IN OPTICAL SYSTEM WITH ABERRATION UNDER PARTIALLY COHERENT ILLUMINATION

ZHUANG SONG-LIN CHEN XIANG-ZHEN

(The Institute of Shanghai Optical Instrument)

ABSTRACT

This paper deals theoretically with the influences of various kinds of mutual coherence function and the degree of coherence on the distribution of straight-edge generated image field. Indicating the close connections between the illuminating condition and image formation, we thus obtain the reliable method to select the optimal illuminating condition. Based on our theoretical calculation on optical system with aberration, it is shown that the radial intensity distribution of the straight-edge generated imagery can reflect sensitively the quality of the optical system. This can be adopted as the quality criterion for practical optical system under partially coherent illumination.