第28卷 第4期 物理学报 Vol. 28, No. 4
1979年7月 ACTA PHYSICA SINICA July, 1979

等离子体环的竖直位移不稳定性*

王 中 天
(中国西南物理所)

因为在非圆截面环电流器装置中等离子体可能获得较高的 β 值，最近这类截面电流器的研究发展较快．有些作者[1]指出，在没有导体壁的直线等离子体柱中，等离子体的椭圆拉长影响竖直位移扰动的稳定性．环形效应及适当的三角形变对竖直扰动的稳定性有一定改善[2,3]． 可是，由于竖直扰动不能用纵向磁场实现稳定化，所以它是一种很危险的不稳定性．因此对它进行深入研究是十分必要的．

以前研究竖直位移不稳定性是把等离子体作为刚体进行的[2,3]．在等离子体中扰动可以写成

$$\boldsymbol{\xi} = \zeta \boldsymbol{e}_z, \tag{1}$$

这里 ζ 在等离子体中是一个常量，(1) 式中所表示的扰动我们称它为均匀竖直扰动．

现在我们来研究 ζ 是 r 的任意函数的非均匀扰动的情况，这时

$$\boldsymbol{\xi} = \zeta(r)\boldsymbol{e}_z. \tag{2}$$

这种推广了的竖直扰动包括了等离子体内部相对的竖直滑动．

由 (2) 式可以计算得到

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\xi} = 0. \tag{3}$$

假设平衡等离子体没有面电流，并且考虑到 (3) 式，能量原理[4]可以表述如下：$\delta w > 0$，则对这种扰动等离子体是稳定的；$\delta w < 0$，则等离子体是不稳定的．其中

$$\delta w = \delta w_P + \delta w_V; \tag{4}$$

$$\delta w_P = \frac{1}{2}\int_P \{\boldsymbol{Q} \cdot [\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{j}]\} d\tau; \tag{5}$$

$$\delta w_V = \frac{1}{2}\int_V \{|\boldsymbol{Q}_e|^2\} d\tau, \tag{6}$$

这里 $\boldsymbol{Q} = \nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{B})$，$\boldsymbol{Q}$ 与 $\boldsymbol{Q}_e$ 分别是等离子体中和真空区域的扰动磁场．

在柱坐标 (r, φ, z) 中，平衡磁场为

$$\boldsymbol{B} = \nabla\varphi \times \nabla\Psi + T\nabla\varphi, \tag{7}$$

电流为

$$\boldsymbol{j} = -\nabla\varphi \times \nabla\Psi \frac{dT}{d\Psi} + j_\varphi \boldsymbol{e}_\varphi, \tag{8}$$

其中

* 1978年9月18日收到．

$$j_\varphi = -r\frac{dP}{d\Psi} - \frac{T}{r}\frac{dT}{d\Psi}.$$

这里 T/r 是环向磁场，P 是等离子体压强，T 与 P 是 Ψ 的任意函数，Ψ 是磁面函数．设

$$X = \zeta\Psi_z, \quad \Psi_z = \frac{\partial\Psi}{\partial z},$$

于是 δw_P 可以写成

$$\delta w_P = \frac{1}{2}\int_P\left\{\frac{|\nabla X|^2}{r^2} - \frac{\zeta j_\varphi}{r}\frac{\partial X}{\partial z}\right\}d\tau. \tag{9}$$

现在考虑 δw_V 的极小化问题．由于扰动是轴对称的以及在无穷远的边界条件，外部扰动磁场是纯极向的[2]．所以 $\boldsymbol{Q}_e$ 可以写成

$$\boldsymbol{Q}_e = \nabla X_e \times \nabla\varphi, \tag{10}$$

这时

$$\delta w_V = \frac{1}{2}\int_V\left\{\frac{|\nabla X_e|^2}{r^2}\right\}d\tau, \tag{11}$$

δw_V 对 X_e 极小化得到欧拉方程：

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial X_e}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 X_e}{\partial z^2} = 0, \tag{12}$$

在等离子体与真空界面上 $X_e = X$[5]，在无穷远 $X_e = 0$.

考虑到欧拉方程(12)式及边值条件，δw 可以由(9)式和(11)式得到

$$\delta w = \frac{1}{2}\int_P\left\{\left(\Psi_z\frac{d\zeta}{dr}\right)^2\right\}d\tau + \frac{1}{2}\int_\Sigma\left\{\left[\frac{\zeta}{r|\nabla\Psi|}\left(\Psi_r\Psi_{zr} + \frac{\Psi_z\Psi_r}{r} - \Psi_z\Psi_{rr}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial X_e}{\partial n}\right]\frac{\zeta\Psi_z}{r}\right\}d\sigma. \tag{13}$$

这里 Σ 表示等离子体与真空的界面，$\boldsymbol{n}$ 表示在这个面上单位法向矢量，$\partial/\partial n$ 表示法向导数．

因为 ζ 表示物理上的扰动，因此要求 ζ 在等离子体区域是正则的，于是(13)式中的 ζ 在磁轴附近可以用泰勒级数表示：

$$\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(r - r_0)^n. \tag{14}$$

这里 r_0 是等离子体的磁轴位置．设 ζ 带有约束条件

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n^2 = 1. \tag{15}$$

于是(13)式变成 C_n 的二次型，考虑到(15)式，竖直位移稳定性的问题化为矩阵的本征值问题．这样，用(13)，(14)和(15)式就可以研究非圆截面等离子体对非均匀竖直扰动的稳定性．

很明显，当 ζ 为常量时，由(13)式可以直接导出雷伯汉(Rebhan)的结果[2]．

为了计算(13)式中的 $(1/r)(\partial X_e/\partial n)$，令

$$y = -\frac{1}{r}\frac{\partial X_e}{\partial n}. \tag{16}$$

这里 y 相当于在界面的外部扰动磁场的切向分量．根据文献 [2]，y 满足如下积分方程：

$$\frac{y}{2}=\int K(l,l')y'dl'+\int L(l,l')\sigma'dl', \tag{17}$$

其中

$$K(l,l')=\frac{r'}{\pi|\nabla\Psi|r_\sigma^3(1-k^2)}\Big\{-r'\Psi_rE(k)+\frac{1}{k^2}[r\Psi_r+(z-z')\Psi_z]\cdot[(2-k^2)E(k)-2(1-k^2)K(k)]\Big\}; \tag{18}$$

$$L(l,l')=\frac{1}{\pi|\nabla\Psi|r_\sigma^3(1-k^2)}\Big\{[r\Psi_z-(z-z')\Psi_r]E(k)-\frac{r'\Psi_z}{k^2}[(2-k^2)E(k)-2(1-k^2)K(k)]\Big\}; \tag{19}$$

$$\sigma=\frac{1}{|\nabla\Psi|}[\Psi_zX_r-\Psi_rX_z];\quad r_\sigma=\frac{2}{k}\sqrt{rr'}.$$

这里 $K(k)$，$E(k)$ 分别是第一类和第二类完全椭圆积分，宗量为

$$k=\sqrt{\frac{4rr'}{(r+r')^2+(z-z')^2}}.$$

积分方程 (17) 的齐次方程的解对 $z=0$ 平面是对称的，而 Ψ_z 是反对称的，所以齐次方程的解对 (13) 式没有贡献，加一个条件可以把它除掉，令

$$\oint ydl=0, \tag{20}$$

这时积分方程 (17) 式可以得到唯一解．

不难证明：

$$\oint K(l,l')dl=\frac{1}{2};\quad \oint L(l,l')dl=0,$$

于是积分方程 (17) 可以转换为

$$\oint[K(l,l')y'-K(l',l)y]dl'=\oint[L(l',l)\sigma-L(l,l')\sigma']dl'. \tag{21}$$

这样 $K(l,l')$，$L(l,l')$ 在 $k=1$ $(r=r',\ z=z')$ 处的奇异性在计算中可以消除．

作为一个例子，对雷伯汉计算的一类平衡位形，我们试用了一类非均匀扰动来研究它的稳定性．

在准均匀电流的情况下，由 (9) 和 (11) 式可以得到

$$\delta w=-\frac{1}{2}\int_P X\nabla\cdot\frac{\nabla X}{r^2}d\tau+\frac{1}{2}\int_\Sigma\Big\{\frac{X}{r^2}\Big[\frac{\partial X}{\partial n}-\frac{\partial X_e}{\partial n}\Big]-\frac{j_\varphi X^2}{r|\nabla\Psi|}\Big\}d\sigma. \tag{22}$$

(22) 式第一项是正定的，它表明扰动体电流引起的稳定作用，第二个积分前一部分表明扰动面电流引起的稳定作用，第二个积分的后一部分是扰动引起的去稳定项．

对于雷伯汉[2]计算的位形，我们取其无量纲形式：

$$\Psi=\frac{1}{e}[Q+(1-Q)r^2]z^2+\frac{e}{4}(r^2-1)^2. \tag{23}$$

这里 Q 表征磁面函数三角形变的参量．e 是磁轴处的半轴比（椭圆在 z 方向的半轴与 r

方向的半轴之比).

在等离子体与真空界面上的Ψ值为

$$\Psi_\Sigma = e(A^2 - 1)/A^4.$$

这里A是环径比，$A = r_0/a(\Psi_\Sigma)$，而 $2a(\Psi_\Sigma)$ 是在 $z = 0$ 时等离子体的边界宽度.

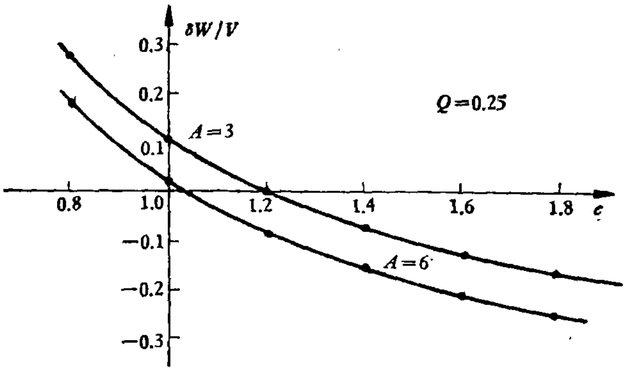


图 1　曲线是文献 [2] 的结果，点是本文的结果

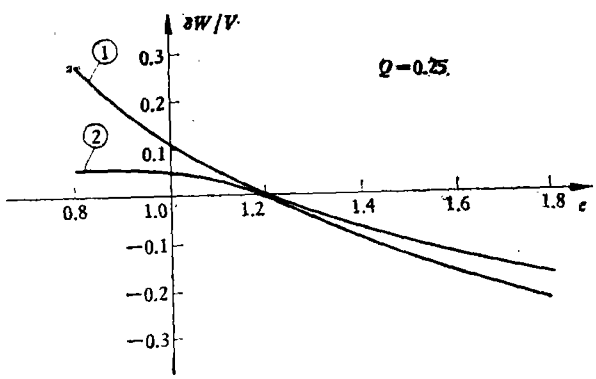
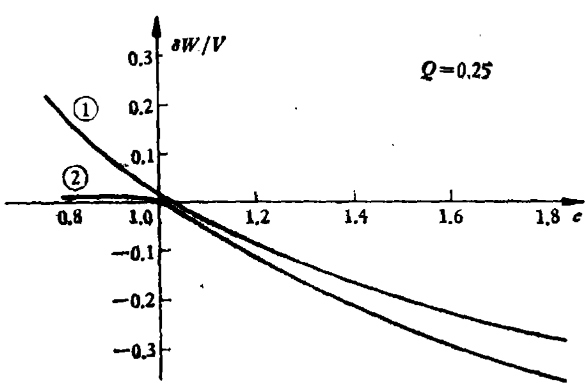


图 2　在 $A = 3$ 的情况下，曲线 1 是均匀竖直扰动的结果；曲线 2 是非均匀竖直扰动的结果



3 图　在 $A = 6$ 的情况下，线曲 1 是均匀竖直扰动的果结；曲线 2 是非均匀竖直扰动的结果

(22) 式不显含 ζ，只出现 X，其中 X 为

$$X = \zeta \Psi_z = \xi z. \tag{24}$$

我们选取

$$\zeta = \frac{\bar{C}_0 + \bar{C}_2 r^2}{2[Q + (1-Q)r^2]} e,$$

则有

$$\xi = \bar{C}_0 + \bar{C}_2 r^2. \tag{25}$$

这样 (22) 式第一个积分为零，这使体电流引起的自由能取极小，于是有

$$\delta w = \frac{1}{2} \int_\Sigma \left\{ \frac{X}{r^2} \left[\frac{\partial X}{\partial n} - \frac{\partial X_e}{\partial n} \right] - \frac{j_\varphi X^2}{r|\nabla \Psi|} \right\} d\sigma. \tag{26}$$

$\bar{C}_0$, $\bar{C}_2$ 是任意常数，所以 ζ 一般地说表示一类非均匀竖直扰动．当 $\bar{C}_0$, $\bar{C}_2$ 取特殊值时，ζ 为常量，表示均匀竖直扰动．设 $\bar{C}_0$, $\bar{C}_2$ 满足约束条件：

$$\bar{C}_0^2 + \bar{C}_2^2 = 1, \tag{27}$$

于是 δw 的极小化问题转化为求二阶矩阵最小本征值问题．

我们对 A, Q, e 选取了不同参数进行了计算．对于均匀竖直扰动，我们的计算结果与雷伯汉[2]的结果是完全相同的（见图 1）．图中 V 是等离子体边界包围的体积乘 $\pi e^2/4[Q^2 + (1-Q)^2]$ 之积．

图 2，图 3 对均匀竖直扰动和非均匀竖直扰动做了比较．可以看到，非均匀竖直扰动对于位形的椭圆拉长提出了更严格的要求，这和雷伯汉预示的是一致的．我们还可以看到小的环径比对非均匀扰动仍然具有稳定作用．

图 4 中指出了在 $A = 3$ 的情况下作为 Q 的函数 e 的临界值．对均匀竖直扰动而言三角形变总是具有稳定作用的，这是雷伯汉的结论；而对于非均匀竖直扰动则不然，Q 取负值（这相当于 D 形截面）有明显的去稳定作用，它与均匀竖直扰动不同，是本文的结论．最近 Cenacchi 等[6]在平衡位形计算中指出竖直位移不稳定性限制了等离子体的椭圆拉长；计算的位形中没有得到有意义的三角形变，也许与我们这里讨论的竖直不稳定性有关．

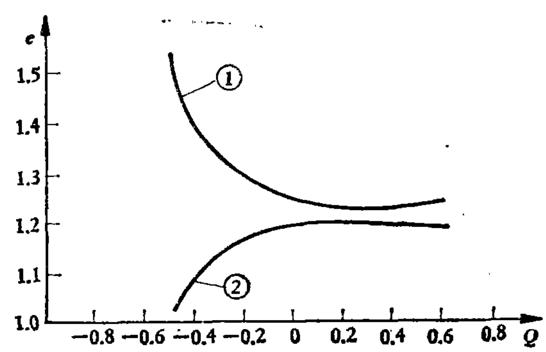


图 4　作为 Q 的函数 e 的临界值　曲线 1 是均匀竖直扰动的结果；
曲线 2 是非均匀竖直扰动的结果

对于大环径比的情况，e 的临界值接近 1；Q 的影响也很小，这里就不详叙．

上海计算技术研究所邓礼武同志，在本文的数值计算方面给予很多帮助，在此表示感谢。

参 考 文 献

[1] P. H. Rutherford. *MATT*-976 (1973).
[2] E. Rebhan, *Nuclear Fusion*, **15** (1975). 277..
[3] M. Okabyashi, G. Sheffield, *Nuclear Fusion*, **14** (1974). 263.
[4] I. B. Bernstein *et al.*, *Proc. Roy. Soc.*, **A244** (1958), 17.
[5] G. Laval *et al.*, *Phys. Fluids*, **17** (1974), 835.
[6] G. Cenacchi *et al.*, *Nuclear Fusion*, **16** (1976), 457.

VERTICAL DISPLACEMENT INSTABILITY OF A PLASMA TORUS

WANG ZHONG-TIAN

(*Southwestern Institute of Physics, China*)