

研究简报

环形非圆截面等离子体自由界面的 磁流体平衡方程解*

庆承瑞

周玉美

(中国科学院理论物理研究所)

(中国科学院物理研究所)

提 要

在有导体壁的条件下,对于各种趋肤的及趋中心分布的等离子体纵向电流,用一种统一的迭代方法,计算了相应的自由界面的磁流体平衡方程解,并讨论了这种方法适用的范围。

目前在磁约束的环形受控热核反应装置中,非圆截面的环流器(托卡马克)受到较大的注意。这类装置需要解决这样的问题:怎样设计成形场的电流分布,使能得到一定形状的等离子体截面,以及在成形线圈的电流分布给定以后,是否能得到原来设计的等离子体截面?类似的问题在环形压缩的装置上,如带状压缩装置也存在,即等离子体经压缩加热后,最终平衡的等离子体具有怎样形状的截面?物理上这一平衡的等离子体位型是由外部磁场和等离子体全部荷电粒子运动共同耦合的结果。在等离子体的流体力学模型中,这一问题归结为解磁流体平衡方程:

$$\nabla p = \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B},$$

其中 p 是等离子体压强, $\mathbf{j}$ 是等离子体电流密度, $\mathbf{B}$ 是总磁场。等离子体界面将从这一方程中自动得出。这就是通常所称的自由界面的磁流体平衡方程。找寻这一非线性方程的解,在理论和计算方法上都存在问题。因为解不唯一。各种迭代计算方法,且不论其计算方法之繁杂,怎样选取初值,是否收敛,以及收敛到怎样的解都不大清楚。特别是因为现有的理论和实验都不能给出函数 $\mathbf{j}$ 的确切形式,因此为了保证理论设计的有效性,计算中要允许 $\mathbf{j}$ 的形式有各种可能的变化。但某一特定的计算方法往往只是对某一特定的 $\mathbf{j}$ 的形式才是好的。因此,能否找到一种较为简单的计算方法,使之尽可能广泛地适用于各种不同的电流分布,将是十分重要的。在现有文献中,在有导体壁的条件下,除在某些特殊情况下可以采用保角变换的方法^[1]求解以外,常用两种迭代计算方法。一种如文献[2]所用,但要引入限制器,或每次变动界面。另一种在文献[3]中采用,计算了扩散型电流分布的磁面,但对于如何选取初值,以及该方法适用的范围,文中未予讨论。此外,也有用变分法^[4]进行计算的,但也只限于扩散型电流分布。本文中,我们利用文献[5]的工作结果,在有导体壁的情况下,用一简单的迭代计算,从统一的初值出发,对于准均匀的及各种趋

* 1978年10月25日收到。

肤的(包括指数型的)等离子体电流分布,可以找到磁流体平衡方程的最大解. 对文献[5]的方法加以改进,增加文献[6]的迭代过程,对趋中心的,包括扩散型的和指数型的电流分布,可以找到相应磁面方程的解. 这样我们就有了一个较为统一而简单的方法,对各种不同的电流分布,来计算自由界面的磁流体平衡方程的解.

一、自由界面的磁流体平衡方程

具有轴对称的磁流体平衡方程,在柱坐标中,用高斯单位表示,有如下形式:

$$\text{在等离子体内部 } L\phi_i = -\frac{8\pi^2}{c} r j_\varphi; \text{在等离子体外部 } L\phi_e = 0. \quad (1)$$

这里 ϕ 是角向磁场的流函数,或称磁面函数. L 表示一二阶微分算符

$$L \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

j_φ 是等离子体的纵向电流密度. 平衡条件要求

$$j_\varphi = 2\pi c r p' + \frac{1}{c r} (I^2)', \quad (2)$$

式中带撇的量表示该量对 ϕ 的微商, p 是等离子体压强, I 是环向磁场 B_φ 的流函数,它们都是 ϕ 的函数. 等离子体全部运动学过程决定这些函数,也即是 j_φ 的形式. 但到目前为止,确切的 j_φ 对 ϕ 的依赖关系,尚未得知. 通常在计算中,都是根据实验和理论计算的要求,对 p' 和 $(I^2)'$ 作某种假定. 最简单的情况是假定 p' 和 $(I^2)'$ 都是不依赖于 ϕ 的常数,即通常所说的准均匀的电流分布,或者假设它们都是 ϕ 的线性函数;此外,也可以取非线性性的分布,例如指数型的 $j_\varphi \propto \exp(\alpha\phi)$.

对于方程(1)还必须给出相应的边界条件和交界面的连接条件. 如果真空区的边界是导体壁 r_0 , 则有

$$\phi|_{r_0} = -C \quad (C \text{ 为一正常数}). \quad (3)$$

如果除导体壁外,还有成形场,设成形场线圈在导体壁外,则成形场本身必须完全透过导体壁. 在实验上相当于要求成形场线圈电流的时间参数要大大超过导体壁磁场渗透时间. 令 ϕ_{ex} 代表成形场线圈产生的流函数,则条件(3)式应改为^[3]

$$\phi|_{r_0} = -C + \phi_{ex}|_{r_0}. \quad (4)$$

等离子体和真空区的交界面 r 是待定的,在此面上,如果我们取 ϕ 为零,则有

$$\phi_i|_r = \phi_e|_r = 0, \quad \frac{\partial \phi_i}{\partial n} \Big|_r = \frac{\partial \phi_e}{\partial n} \Big|_r. \quad (5)$$

这里 $\frac{\partial}{\partial n}$ 代表沿交界面外法线方向的微商.

正如文献[3, 5]中都指出的,引进断续的电流密度函数后,方程(1)连同边条件(3)式或(4)式以及(5)式可以化为拟线性椭圆方程的边值问题. 令 ϕ_0 为 ϕ 在磁轴 r_0 处的值,连同条件(3), (4)式以及(5)式,在做了 $\phi/\phi_0 \rightarrow u$ 的归一化变换后,可以写成

$$Lu = -F(r, u), \quad u|_{r_0} = -C \text{ 或 } -C + u_{ex}|_{r_0}, \quad (6)$$

$$F(r, u) = \begin{cases} \frac{8\pi^2 r}{C} i_\varphi & u > 0; \\ 0 & u \leq 0. \end{cases} \quad (7)$$

从理论上讲, 方程(6)的优点是: 如果交界面是光滑且无奇点的曲线, 则(6), (7)式与(1), (3), (5)式等价, 但如果交界面有奇点, 如像有磁偏置器时磁面呈8字形, 在奇点处条件(5)式无定义, 但方程(6), (7)仍然可以用来描述这种磁面. 从计算上看, 从方程(6)及(7)出发可以免去变动界面的问题. 因此本文以下的计算和讨论都是从(6), (7)式出发的.

为了便于和相应的等离子体参数作比较, 对于线性的电流分布, i_φ 又可以写成^[2]

$$i_\varphi = i_0 \left[\frac{r}{r_0} \beta_p + \frac{r_0}{r} (1 - \beta_p) \right] [y - (y - 1)u], \quad (8)$$

式中 i_0 , r_0 , β_p 和 y 都是参数. r_0 是磁轴的径向坐标, i_0 是磁轴处电流密度, y 是边缘和磁轴处电流密度之比, β_p 与磁轴处的磁压比有关. $y = 1$ 时是准均匀电流分布, $y > 1$ 代表有趋肤现象的线性电流分布. $y = 0$ 是扩散型电流分布, $0 \leq y < 1$ 则代表不同程度趋中心的电流分布. 以上四个参数决定了线性电流分布的全部特征.

同样, 对于指数型电流分布, 可以将 i_φ 写成

$$i_\varphi = i_0 \left[\frac{r}{r_0} A \beta_p + \frac{r_0}{r} (1 - A \beta_p) e^{A(u-1)} \right], \quad (9)$$

参数 A 为正时电流分布是趋中心的, A 为负时电流为趋肤分布.

二、自由界面的磁面方程解法

我们研究自由界面磁面方程(6)和(7), 其中不仅电流分布可以是趋肤的, 也可以是趋中心的. 文献[5]中证明: 从方程(6)、(7)出发, 可以构造两个迭代序列, 一个序列从 $-F(r, u)$ 的上界开始, 既选取 $-F(r, u)$ 的上界 Max, 求下列方程的解:

$$Lu = \text{Max}, \quad u|_{r_0} = -C,$$

以所求得的 u 作为初值, 进行下列简单迭代:

$$Lu^{n+1} = -F(r, u^n), \quad u^{n+1}|_{r_0} = -C. \quad (10)$$

另一序列从 $-F(r, u)$ 的下界开始, 既选取 $-F(r, u)$ 的下界 Min, 求下列方程的解:

$$Lu = \text{Min}, \quad u|_{r_0} = -C,$$

然后以此作为初值作简单迭代(10)式. 如果 $F(r, u)$ 是 u 的单调不减的有界函数, 则上述两迭代序列都单调收敛到方程(6)的解. 其中前一迭代序列从下方收敛到方程(6)的最小解; 后一序列从上方收敛到方程(6)的最大解. 所有其他解都在这两个解之间. 如果方程(6)只有一个解, 则最大解和最小解重合. 对于给定的电流函数, 解的个数与边界值 C 有关, 或只有平庸解, 或有三个以上的解. 所有前节提及的趋肤分布的电流在方程(6)的两侧各减去一正比于 u 的线性项后, 都满足文献[5]中对非齐次项的要求. 因此利用简单迭代(10)式, 每次只需解一线性椭圆方程, 对准均匀电流分布和各种趋肤的电流分布, 包括指数型的, 都能找到方程(6)的最大解. (最小解是平庸解, 即真空解.)

方程(6)的最大解因距导体壁最近,所以导体壁的形状和稳定作用对这一平衡形态影响最大.看来在通常环流器中实现的也是希望得到的,大都是对应最大解的平衡位型.对于有快磁压缩过程的环形装置,原则上可以获得不同的平衡位型,而通常所说压缩比不超过2的结论仅指对应最大解的平衡位型才可能是正确的^[7],这在一维模型的解析分析中已明显看到^[8].

对于趋中心的电流分布,因为没有上界,上述简单迭代法不收敛.但如果在迭代过程(10)式中再加进文献[6]的迭代,

$$\begin{aligned} Lu^{n+1/3} &= -F(r, u^n), \quad Lu^{n+2/3} = -F(r, u^{n+1/3}), \\ Lu^{n+1} &= (1-C)u^n + 2Cu^{n+1/3} - Cu^{n+2/3}, \end{aligned} \quad (11)$$

其中 C 是一可调参数,则同样用前面所述两种初值做迭代.则第一序列同样收敛到平庸解,后一序列收敛到物理上有兴趣的解.

这里需要指出的是:迭代形式(11)式收敛的条件是局域性的,即要求初始解离真解较近.在有导体壁的情况下,用第二序列的初值,一般都能满足这一要求,这是文献[3]用来解扩散型电流分布成功的主要原因.不仅如此,这一方法可以应用在所有(8)式中 $\gamma < 1$ 和(9)式中 $A > 0$ 的情况.另外,迭代形式(11)式虽由文献[6]给出,但作为解文献[6]所提出的方程,采用这一迭代过程并非必要,因为文献[6]中讨论的方程的非齐次项基本上就是(9)式所描述的,其中系数 $A < 0$.因此为了得到另一深层解,而且是最小解,只需按文献[5]的方法选取初值,用简单迭代(10)式就可以了.

三、计算方法与结果

首先我们用简单迭代(10)式对趋肤型的电流分布求解方程(6).线性椭圆方程在化为差分方程后,曾用超松弛法和平方根法分别求解,外边界 r_0 上的常数 C 则是利用磁轴处函数 u 归一的条件选出.两种方法计算的结果在计算误差范围内是重合的.但从计算速度上看,超松弛法更快.对于趋中心的电流分布,则在程序中加上迭代(11)式,其他一

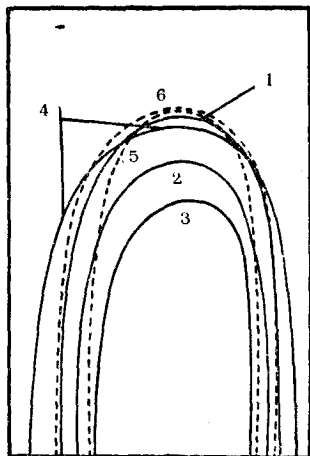


图1 1表示 $y=1$; 2表示 $y=3$; 3表示 $y=10$;
4表示 $y=0$; 5表示 $i_{\phi} u e^{-\psi}$; 6表示 $i_{\phi} \sim e^{\psi}$

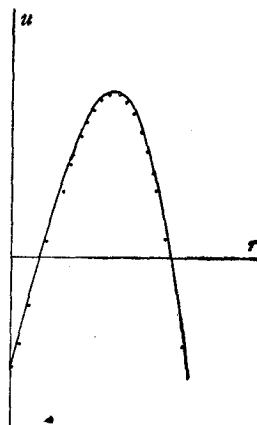


图2 实心圆点代表后次
迭代结果

切不变。

作为检验,对于 $y = 1$ 的情况,曾用一维的计算结果和解析解相比较^[8],两者符合得很好。对于 $y = 0$ 的情况,我们将迭代计算的结果作为初值,用牛顿法直接求解非线性方程组(6)来进行核算。两种方法的结果在误差范围内相符。但引进迭代方程(11)后,作为精度的控制,不仅要比较 u^n 和 u^{n+1} ,还要比较 u^n 和 $u^{n+1/3}$,否则会因为偶然相消的原因出现假收敛¹⁾。

图1是 j_0/u_0 在 2.5 到 3 之间,在大致相同的总电流时,各种不同电流分布的平衡位型。所有这些曲线都是在边条件为(3)式时的结果。

图2是准均匀电流分布时一维计算的结果(即只保留 r 方向的微商。)图中所示是同一迭代序列中迭代次数不同的磁面函数 u^n 。可以看出:对于最大解的序列,每次迭代的结果都是递减的,这说明理论上证明的单调收敛性在计算中相当好地得到实现。二维的计算情况也是一样。

最后,作者感谢张恭庆同志对本工作的支持。

参 考 文 献

- [1] G. Becker, *Nucl. Fusion*, **14**(1974), 319; A. Kadish, D. C. Stenens, *Nucl. Fusion*, **14**(1974), 821.
- [2] M. S. Chu, D. Dobnott, T. H. Jensen, *Phys. Fluids*, **17**(1974), 1183; D. C. Stevens, *Phys. Fluids*, **17**(1974), 222; W. Feinkerg, K. Lackner, *Nucl. Fusion*, **13**(1973), 549.
- [3] Y. Suzuki, *Nucl. Fusion*, **14**(1974), 345.
- [4] R. Teman, *Plasma Phys.*, **17**(1975), 707.
- [5] 张恭庆, *科学通报*, **5** (1976), 225; 张恭庆, *中国科学*, (1977), 415.
- [6] B. Marder, H. Weitzner, *Plasma Phys.*, **12**(1970), 435.
- [7] A. Radish, *Nucl. Fusion*, **13**(1973), 756.
- [8] 庆承瑞、周玉美, *物理学报*, **26** (1977), 179.

THE FREE BOUNDARY SOLUTION TO THE EQUATION OF PLASMA MAGNETOHYDRODYNAMIC EQUILIBRIUM WITH AXISYMMETRY AND NON-CIRCULAR CROSS-SECTION

QING CHENG-RUI

ZHOU YU-MEI

(*Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica*)

(*Institute of Physics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

A generalized method of iteration is developed for solving the equation of plasma MHD equilibrium with free boundary in axial-symmetric tori with non-circular cross-section and conducting shell. The plasma current distributions may be peaked at the center of the plasma or have various forms of skin distributions. The conditions under which this method can effectively be used are also discussed.

1) 事实上迭代过程(11)相当于提高原方程的阶数,从而会出现并非方程(6)的解。假收敛的出现可能正是这种附加的解。这一点是数学研究所林群、吴绍平同志指出的,对此作者谨致谢意。