

非均匀等离子体湍流的重正化准线性理论(I)

Misguich-Balescu 理论的推广

邱孝明

(中国西南物理研究所)

1979年2月1日收到

提 要

本文将 Misguich 和 Balescu 的理论推广到非均匀等离子体的情形,导出了包括非均匀性效应的扩散方程与扩散张量的表式以及色散关系。指出 Pelletier 等人对等离子体湍流可作马尔科夫近似处理的论证完全不适用于非均匀等离子体湍流的问题。

一、引 言

近来, Misguich 和 Balescu^[1] 提出了等离子体湍流的重正化准线性理论(以下简称 M-B 理论),在一些方面改进了 Dupree^[2], Weinstock 等人^[3-6]的理论结果,把等离子体湍流(特别是强湍流)的理论研究向前推进了一大步。他们的工作与前人的主要不同在于对传播算符的处理上以及引入湍性碰撞算符这一点。他们用时序指数算符和按涨落电场的时空相关函数或等价的谱密度定每一项的数量级作为其数学处理的基础(前人都是按涨落电场的幅值定级),因而等离子体湍流的非马尔科夫过程的特点在 M-B 理论的一些结果中得到了正确的反映。M-B 是对均匀等离子体的情形建立他们的重正化准线性理论的;本文主要是将 M-B 理论推广到非均匀等离子体的情形,导出了包括非均匀性效应的扩散方程与扩散张量的表式以及色散关系。在 M-B 的扩散方程与扩散张量的最后表式中代表非马尔科夫贡献的项被扩散项抵销,因而等离子体湍流的非马尔科夫过程的特点似乎并不明显地出现在 M-B 理论的最后结果中。这一点引导 Pelletier 等人^[7,8]去论证:如果等离子体湍流可以认为是马尔科夫过程,则现有关于等离子体强湍流的各家理论处理便可以得到统一。本文指出 Pelletier 等人的论证完全不适用于非均匀等离子体湍流。

二、等离子体湍流的随机处理

设想有这样一种等离子体,离子与电子的空间分布都是不均匀的、且有相同的梯度(因而平衡电场 $\langle \mathbf{E} \rangle = 0$),但离子由于质量大可以假定是不动的。我们把这样的体系称

为空间非均匀的电子等离子体,即(电子的)平均分布函数 $\bar{f} \equiv \langle f \rangle$ 与空间位置 $\mathbf{x}$ 有关:

$$\bar{f} = \langle f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \rangle.$$

描述这样一种等离子体的静电湍流的基本方程为

$$\left[\partial_t + \mathbf{v} \cdot \partial_{\mathbf{x}} + \frac{q}{m} \mathbf{E}'(\mathbf{x}, t) \cdot \partial_{\mathbf{v}} \right] f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = 0, \quad (2.1)$$

$$\partial_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{E}'(\mathbf{x}, t) = 4\pi q \int f'(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}, \quad (2.2)$$

(本文的(2.2)式与 M-B 用的相应方程 (2.4)^[1] 不同,后者只适用于均匀等离子体的情形)

式中, $\partial_t \equiv \frac{\partial}{\partial t}$, $\partial_{\mathbf{v}} \equiv \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}$, $q \equiv -e$ (e 是电子的电荷量), $\mathbf{E}'$ 是涨落电场, f' 是电子分布函数 f 的涨落部分. 下面依使用方便有时用—、有时又用 $\langle \rangle$ 和算符 A 表示同一个运算——求系综平均.

把(2.1)式改写成

$$[\partial_t + \bar{L} + L'(t)]f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = 0, \quad (2.3)$$

式中

$$\bar{L} = \mathbf{v} \cdot \partial_{\mathbf{x}}, \quad L'(t) = \frac{q}{m} \mathbf{E}'(\mathbf{x}, t) \cdot \partial_{\mathbf{v}}. \quad (2.4)$$

(2.3) 式可分成平均方程和涨落方程:

$$\partial_t \bar{f}(t) + \bar{L} \bar{f}(t) + A L'(t) f'(t) = 0, \quad (2.5)$$

$$(f = \bar{f} + f'), \quad (2.6)$$

$$\partial_t f'(t) + [\bar{L} + (1 - A)L'(t)]f'(t) = -L'(t)\bar{f}(t). \quad (2.7)$$

为要得到描述平均分布函数 $\bar{f}(t)$ 演变的一个闭合方程,我们必须先从方程 (2.7) 形式地解出 $f'(t)$ (因为 $L'(t)$ 中还包含 $f'(t)$, 所以暂时还只能说形式地求解),然后代入(2.5)式中.

定义一个算符 $A(t, t')$, 它是方程(2.7)的齐次部分的解,即

$$\partial_t A(t, t') + [\bar{L} + (1 - A)L'(t)]A(t, t') = 0,$$

并满足条件

$$A(t', t') = 1. \quad (2.8)$$

(这里的 1 应理解为恒等算符.)这个算符方程的解是时序指数算符的形式^[2],

$$\begin{aligned} A(t, t') &= X e(-\bar{L} - (1 - A)L') \\ &\equiv X e(t, t' | -\bar{L} - (1 - A)L') \\ &\equiv X \exp \left[- \int_{t'}^t dt'' [\bar{L} + (1 - A)L'(t'')] \right]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

于是(2.7)式的形式解为

$$f'(t) = A(t, t_0)f'(t_0) + \int_{t_0}^t dt' A(t, t') [-L'(t')\bar{f}(t')]. \quad (2.10)$$

把(2.10)式代入 (2.5) 式,像 M-B 理论中所作的近似处理那样,我们也略去初始涨落的传播,则

$$(\partial_t + \bar{L})\bar{f}(t) = \int_{t_0}^t dt' \langle L'(t) \Lambda(t, t') L'(t') \rangle \bar{f}(t'). \quad (2.11)$$

引入算符 $G(t)$,

$$G(t)\bar{f}(t) = \int_{t_0}^t dt' \langle L'(t) \Lambda(t, t') L'(t') \rangle \bar{f}(t'), \quad (2.12)$$

(2.11) 式变成

$$(\partial_t + \bar{L})\bar{f}(t) = G(t)\bar{f}(t). \quad (2.13)$$

这个方程形式上与分布函数为 $\bar{f}(t)$ 的玻耳兹曼方程一样, 右边是碰撞项, 所以 $G(t)$ 称为湍性碰撞算符. 我们得到了形式上描述平均分布函数 $\bar{f}(t)$ 演变的一个闭合方程. 把 (2.13) 式写成

$$\partial_t \bar{f}(t) + [\bar{L} - G(t)]\bar{f}(t) = 0, \quad (2.14)$$

仿照由 (2.7) 式得到 (2.10) 式的推导过程, 由 (2.14) 式导出了

$$\begin{aligned} \bar{f}(t') &= \bar{U}(t', t)\bar{f}(t), \\ \bar{U}(t', t) &= X e(-\bar{L} + G), \quad (t', t \text{ 是两个任意的时刻.}) \end{aligned} \quad (2.15)$$

由 $\bar{f}(t') = \bar{U}(t', t)\bar{f}(t)$, 直接推出传播算符 $\bar{U}$ 的群性质:

$$\begin{aligned} \bar{U}(t, t')\bar{U}(t', t_0) &= \bar{U}(t, t_0), \\ \bar{U}(t, t')\bar{U}(t', t) &= 1. \end{aligned} \quad (2.15')$$

把 (2.15) 式代入 (2.12) 式, 则

$$G(t)\bar{f}(t) = \int_{t_0}^t dt' \langle L'(t) \Lambda(t, t') L'(t') \rangle \bar{U}(t', t)\bar{f}(t). \quad (2.16)$$

三、重正化准线性近似

把 (2.9) 式改写成

$$\Lambda(t, t') = X e(-\bar{L} + G - (1 - A)L' - G). \quad (3.1)$$

由时序指数算符的展开定理^[9],

$$\Lambda(t, t') = \sum_{n=0}^{\infty} [\bar{U} * (-(1 - A)L' - G)]^n \bar{U}, \quad (3.2)$$

式中 $*$ 是时间褶积的简化符号. 我们把这个展开式只取到第一项的近似叫做准线性近似,

$$\Lambda(t, t') \simeq \bar{U}(t, t'). \quad (3.3)$$

于是在重正化准线性近似下, (2.13), (2.16), (2.15) 式和忽略了初始涨落传播的 (2.10) 式变成 (代入了 L' 的具体表式 (2.4), 又把 $t' \rightarrow t - \tau$)

$$(\partial_t + \bar{L})\bar{f}(t) = G(t)\bar{f}(t), \quad (3.4)$$

$$G(t) = \frac{q^2}{m^2} \partial_v \cdot \int_0^{t-t_0} d\tau \langle \mathbf{E}'(\mathbf{x}, t) \bar{U}(t, t - \tau) \mathbf{E}'(\mathbf{x}, t - \tau) \rangle \cdot \partial_v \bar{U}(t - \tau, t), \quad (3.5)$$

$$\bar{U}(t, t - \tau) = X \exp \left[\int_{t-\tau}^t dt' [-\bar{L} + G(t')] \right], \quad (3.6)$$

$$f'(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = -\frac{q}{m} \int_0^{t-t_0} d\tau \bar{U}(t, t - \tau) \mathbf{E}'(\mathbf{x}, t - \tau) \cdot \partial_v \bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t - \tau). \quad (3.7)$$

(3.4)–(3.7) 式[再加上(2.2)式]就是重正化准线性近似下描写非均匀等离子体静电湍流的基本方程。

1. 湍性碰撞算符的第零次(迭代)近似 G^0

把令 $G(t') = 0$ 的 (3.6) 式代入 (3.5) 式, 由此求得的 $G(t)$ 称为湍性碰撞算符的第零次近似, 记为 $G^0(t)$:

$$G^0(t)\bar{f}(t) = \frac{q^2}{m^2} \partial_v \cdot \int_0^\infty d\tau \langle E'(\mathbf{x}, t) \exp[-\tau \mathbf{v} \cdot \partial_x] E'(\mathbf{x}, t - \tau) \rangle \cdot \partial_v \exp[\tau \mathbf{v} \cdot \partial_x] \bar{f}(t). \quad (3.8)$$

在此也采纳了 M-B 的 $t_0 \rightarrow -\infty$ 的观点 (这相当于假定 $t - t_0 \gg \tau_c$, τ_c 是涨落电场的相关时间). 先不写出求平均算符 $\langle \rangle$, 我们来变换下式:

$$E'(\mathbf{x}, t) \exp[-\tau \mathbf{v} \cdot \partial_x] E'(\mathbf{x}, t - \tau) \cdot \partial_v \exp[\tau \mathbf{v} \cdot \partial_x] \bar{f}(t). \quad (3.9)$$

由算符的微分法则, (3.9) 式分成两项

$$E'(\mathbf{x}, t) \exp[-\tau \mathbf{v} \cdot \partial_x] E'(\mathbf{x}, t - \tau) \cdot \exp[\tau \mathbf{v} \cdot \partial_x] \partial_v \bar{f}(t) + E'(\mathbf{x}, t) \exp[-\tau \mathbf{v} \cdot \partial_x] E'(\mathbf{x}, t - \tau) \cdot \exp[\tau \mathbf{v} \cdot \partial_x] \tau \partial_x \bar{f}(t). \quad (3.10)$$

令 $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \tau \partial_x \bar{f}(t)$, 写出 $\mathbf{g}$ 的傅里叶表示

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \int \mathbf{g}_k(\mathbf{v}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{k}, \quad (3.11)$$

于是

$$\exp[\tau \mathbf{v} \cdot \partial_x] \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \int \mathbf{g}_k(\mathbf{v}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} + \tau \mathbf{v})} d\mathbf{k} = \mathbf{g}(\mathbf{x} + \tau \mathbf{v}, \mathbf{v}, t).$$

(3.10) 式的第二项变成

$$E'(\mathbf{x}, t) \exp[-\tau \mathbf{v} \cdot \partial_x] E'(\mathbf{x}, t - \tau) \cdot \tau \partial_x \bar{f}(\mathbf{x} + \tau \mathbf{v}, \mathbf{v}, t). \quad (3.12)$$

同理可推得

$$\begin{aligned} \exp[-\tau \mathbf{v} \cdot \partial_x] E'(\mathbf{x}, t - \tau) \cdot \tau \partial_x \bar{f}(\mathbf{x} + \tau \mathbf{v}, \mathbf{v}, t) \\ = E'(\mathbf{x} - \tau \mathbf{v}, t - \tau) \cdot \tau \partial_x \bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t), \end{aligned}$$

(3.12) 式也即 (3.10) 式第二项变成

$$\tau E'(\mathbf{x}, t) E'(\mathbf{x} - \tau \mathbf{v}, t - \tau) \cdot \partial_x \bar{f}(t). \quad (3.13)$$

仿此, (3.10) 式的第一项变成

$$E'(\mathbf{x}, t) E'(\mathbf{x} - \tau \mathbf{v}, t - \tau) \cdot \partial_v \bar{f}(t). \quad (3.14)$$

把 (3.13) 和 (3.14) 式代入 (3.10) 式, 则 (3.9) 式变成

$$[E'(\mathbf{x}, t) E'(\mathbf{x} - \tau \mathbf{v}, t - \tau) \cdot \partial_v + \tau E'(\mathbf{x}, t) E'(\mathbf{x} - \tau \mathbf{v}, t - \tau) \cdot \partial_x] \bar{f}(t),$$

把此式代入 (3.8) 式, 得

$$G^0(t) = \partial_v \cdot D(\mathbf{v}, t) \cdot \partial_v + \partial_v \cdot F(\mathbf{v}, t) \cdot \partial_x, \quad (3.15)$$

式中

$$D(\mathbf{v}, t) = \int_0^\infty d\tau S(t|\tau \mathbf{v}, \tau), \quad (3.16)$$

$$F(\mathbf{v}, t) = \int_0^\infty d\tau \tau S(t|\tau \mathbf{v}, \tau), \quad (3.17)$$

$$S(t|\mathbf{r}, \tau) = \frac{q^2}{m^2} \langle \mathbf{E}'(\mathbf{x}, t) \mathbf{E}'(\mathbf{x} - \mathbf{r}, t - \tau) \rangle. \quad (3.18)$$

因为以后我们只限于讨论空间均匀的湍流 (这是到目前为止所有做湍流理论的人都要作的一个基本假定), 所以这里的相关函数 S 与 $\mathbf{x}$ 无关.

2. 湍性传播算符的第一次(迭代)近似 $\bar{U}^1$

把 (3.15) 式给出的 G^0 代入 (3.6) 式中, 由此得到的 $\bar{U}$ 称为第一次近似, 记为 $\bar{U}^1$, 于是

$$\bar{U}^1(t, t - \tau) = X \exp \left[\int_{t-\tau}^t dt' C(t') \right], \quad (3.19)$$

式中

$$C(t) \equiv -\mathbf{v} \cdot \partial_{\mathbf{x}} + \partial_{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{v}, t) \cdot \partial_{\mathbf{v}} + \partial_{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{v}, t) \cdot \partial_{\mathbf{x}}. \quad (3.20)$$

写出时序指数算符的完全表式^[9],

$$\bar{U}^1(t, t - \tau) = X \exp \left[\int_{t-\tau}^t dt' C(t') \right] = \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} \Delta_n(t, t - \tau) \right], \quad (3.21)$$

式中

$$\begin{aligned} \Delta_1(t, t - \tau) &= \int_{t-\tau}^t dt' C(t') = \int_0^{\tau} dt_1 C(t - t_1) \\ &= -\tau \mathbf{v} \cdot \partial_{\mathbf{x}} + \partial_{\mathbf{v}} \cdot \int_0^{\tau} dt_1 \mathbf{D}(\mathbf{v}, t - t_1) \cdot \partial_{\mathbf{v}} + \partial_{\mathbf{v}} \cdot \\ &\quad \cdot \int_0^{\tau} dt_1 \mathbf{F}(\mathbf{v}, t - t_1) \cdot \partial_{\mathbf{x}}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\Delta_2(t, t - \tau) = \frac{1}{2} \int_0^{\tau} dt_1 \int_0^{t-t_1} dt_2 [C(t - t_1), C(t - t_1 - t_2)], \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \Delta_3(t, t - \tau) &= \frac{1}{6} \int_0^{\tau} dt_1 \int_0^{t-t_1} dt_2 \int_0^{t-t_1-t_2} dt_3 \{ [C(t - t_1), \\ &\quad C(t - t_1 - t_2)], C(t - t_1 - t_2 - t_3)] \\ &\quad + [[C(t - t_1 - t_2 - t_3), C(t - t_1 - t_2)], C(t - t_1)] \}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

.....

为了得到明晰的结果, 我们也像 M-B 那样, 以下只保留 S 一次幂的项, 高于一次幂的项都略掉, M-B 把这种近似也叫做弱耦合近似; 此外, 前已提到我们只限于讨论空间均匀的湍流. 在这两个近似下 (3.23) 和 (3.24) 式变成 (见附录)

$$\begin{aligned} \Delta_2(t, t - \tau) &= -\frac{1}{2} \int_0^{\tau} dt_1 \int_0^{t-t_1} dt_2 [\Delta^{12}; (\partial_{\mathbf{v}} \partial_{\mathbf{x}} + \partial_{\mathbf{x}} \partial_{\mathbf{v}}) \\ &\quad + (\partial_{\mathbf{v}} \cdot \Delta^{12}) \cdot \partial_{\mathbf{x}} + \phi^{12}; \partial_{\mathbf{x}} \partial_{\mathbf{x}}], \end{aligned} \quad (3.25)$$

式中

$$\Delta^{12} = \mathbf{D}(\mathbf{v}, t - t_1) - \mathbf{D}(\mathbf{v}, t - t_1 - t_2), \quad (3.26)$$

$$\phi^{12} = \mathbf{F}(\mathbf{v}, t - t_1) - \mathbf{F}(\mathbf{v}, t - t_1 - t_2); \quad (3.27)$$

$$\Delta_3(t, t - \tau) = \frac{1}{3} \int_0^{\tau} dt_1 \int_0^{t-t_1} dt_2 \int_0^{t-t_1-t_2} dt_3 [\Delta^{12} + \Delta^{32}]; \partial_{\mathbf{x}} \partial_{\mathbf{x}}, \quad (3.28)$$

$$\Delta_4(t, t - \tau) = \Delta_5(t, t - \tau) = \cdots = 0. \quad (3.29)$$

这里

$$\Delta^{32} = D(\mathbf{v}, t - t_1 - t_2 - t_3) - D(\mathbf{v}, t - t_1 - t_2). \quad (3.30)$$

于是(3.21)式变成

$$\bar{U}^1(t, t - \tau) = \exp(A + B), \quad (3.31)$$

其中

$$A = -\tau \mathbf{v} \cdot \partial_{\mathbf{x}}, \quad (3.32)$$

$$B = \int_0^\tau dt_1 G^0(t - t_1) + \Delta_2(t, t - \tau) + \Delta_3(t, t - \tau) \sim S. \quad (3.33)$$

这里 $\sim$ 表示 B 与 S 同数量级. Zassenhaus 公式^[9]:

$$\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)\exp(C_2)\exp(C_3)\exp(C_4)\cdots, \quad (3.34)$$

式中

$$C_2 = -\frac{1}{2} [A, B], \quad (3.35)$$

$$C_3 = \frac{1}{3} [B, [A, B]] + \frac{1}{6} [A, [A, B]], \quad (3.36)$$

$$C_4 = \frac{1}{12} [A, [A, [A, B]]] + O(S^2), \quad (3.37)$$

.....

在 D, F 与 $\mathbf{x}$ 无关的假定下,仿照附录的做法,我们导得

$$\begin{aligned} [A, B] = & \tau \left\{ \int_0^\tau dt_1 [(\partial_{\mathbf{v}} \cdot D(\mathbf{v}, t - t_1)) \cdot \partial_{\mathbf{x}} + D(\mathbf{v}, t - t_1) : (\partial_{\mathbf{v}} \partial_{\mathbf{x}} + \partial_{\mathbf{x}} \partial_{\mathbf{v}}) \right. \\ & \left. + F(\mathbf{v}, t - t_1) : \partial_{\mathbf{x}} \partial_{\mathbf{x}}] - \int_0^\tau dt_1 \int_0^{t-t_1} dt_2 \Delta^{12} : \partial_{\mathbf{x}} \partial_{\mathbf{x}} \right\}, \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$[A, [A, B]] = 2\tau^2 \int_0^\tau dt_1 D(\mathbf{v}, t - t_1) : \partial_{\mathbf{x}} \partial_{\mathbf{x}}, \quad (3.39)$$

$$[A, [A, [A, B]]] = [A, [A, [A, [A, B]]]] = \cdots = 0. \quad (3.40)$$

把(3.38)–(3.40)式代入略去 S 二次幂以上的项后的(3.35)–(3.37)式,再把所得结果代入(3.34)式,则得 $\bar{U}^1(t, t - \tau)$ 的最后表式

$$\begin{aligned} \bar{U}^1(t, t - \tau) = & \exp(-\tau \mathbf{v} \cdot \partial_{\mathbf{x}}) \exp(\beta \cdot \partial_{\mathbf{x}}) \exp\left(\gamma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial v_i}\right) \\ & \cdot \exp(\delta : \partial_{\mathbf{x}} \partial_{\mathbf{x}}) \exp(\partial_{\mathbf{v}} \cdot \alpha \cdot \partial_{\mathbf{v}}). \end{aligned} \quad (3.41)$$

(这里我们曾交换了一些指数算符的位置,在此过程中当然又会出现 S 二次幂以上的项,同前面一样,我们将这些项统统略去了.)上式中

$$\begin{aligned} \beta = & -\frac{1}{2} \tau \int_0^\tau dt_1 [\partial_{\mathbf{v}} \cdot D(\mathbf{v}, t - t_1)] + \int_0^\tau dt_1 [\partial_{\mathbf{v}} \cdot F(\mathbf{v}, t - t_1)] \\ & - \frac{1}{2} \int_0^\tau dt_1 \int_0^{t-t_1} dt_2 (\partial_{\mathbf{v}} \cdot \Delta^{12}), \end{aligned} \quad (3.42)$$

或者利用重积分的普遍公式

$$\int_a^b dy \int_y^b dx g(x, y) = \int_a^b dx \int_a^x dy g(x, y),$$

不难证明 β 又可表成

$$\beta = - \int_0^{\tau} dt_1 (\tau - t_1) [\partial_v \cdot D(v, t - t_1)] + \int_0^{\tau} dt_1 [\partial_v \cdot F(v, t - t_1)], \quad (3.43)$$

$$\gamma_{ij} = - \int_0^{\tau} dt_1 (\tau - t_1) \dot{D}_{ij}(v, t - t_1) + \int_0^{\tau} dt_1 F_{ij}(v, t - t_1), \quad (3.44)$$

$$\delta = \int_0^{\tau} dt_1 (\tau - t_1)^2 D(v, t - t_1) - \int_0^{\tau} dt_1 (\tau - t_1) F(v, t - t_1), \quad (3.45)$$

$$a = \int_0^{\tau} dt_1 D(v, t - t_1), \quad (3.46)$$

$$\dot{D}_{ij} = D_{ij} + D_{ji}.$$

四、扩散方程与扩散张量

现在用(3.41)式的 $\bar{U}^1$ 去代替(3.5)和(3.7)式中的 $\bar{U}$ (弱耦合近似), 并像(3.8)式那样令 $t_0 \rightarrow -\infty$, 则(3.4)和(3.7)式分别变成

$$\begin{aligned} & (\partial_t + \bar{L})\bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \\ &= \frac{q^2}{m^2} \partial_v \cdot \int_0^{\infty} d\tau \langle \mathbf{E}'(\mathbf{x}, t) \bar{U}^1(t, t - \tau) \mathbf{E}'(\mathbf{x}, t - \tau) \rangle \\ & \quad \cdot \partial_v \bar{U}^1(t - \tau, t) \bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t), \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\bar{f}'(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = - \frac{q}{m} \int_0^{\infty} d\tau \bar{U}^1(t, t - \tau) \mathbf{E}'(\mathbf{x}, t - \tau) \cdot \partial_v \bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t - \tau). \quad (4.2)$$

因为 $\mathbf{E}'$ 是实数, 所以

$$\mathbf{E}'(\mathbf{x}, t) = \int \mathbf{E}'_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{k} \quad \text{和} \quad \mathbf{E}'(\mathbf{x}, t - \tau) = \int \mathbf{E}'_{-\mathbf{k}_1}(t - \tau) e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{k}_1,$$

把它们代入(4.1)式右边尖括弧中, 则

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{E}'(\mathbf{x}, t) \bar{U}^1(t, t - \tau) \mathbf{E}'(\mathbf{x}, t - \tau) \rangle \\ &= \left\langle \int \mathbf{E}'_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{k} \bar{U}_{\partial_{\mathbf{x}} = -i\mathbf{k}_1}^1(t, t - \tau) \int \mathbf{E}'_{-\mathbf{k}_1}(t - \tau) e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{k}_1 \right\rangle. \end{aligned} \quad (4.3)$$

(4.3)式两边对系统的体积 W 积分, 由相关函数¹⁾与 $\mathbf{x}$ 无关的假定, (4.3)式变成

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{E}'(\mathbf{x}, t) \bar{U}^1(t, t - \tau) \mathbf{E}'(\mathbf{x}, t - \tau) \rangle \\ &= \frac{(2\pi)^3}{W} \int d\mathbf{k} \langle \mathbf{E}'_{\mathbf{k}}(t) \bar{U}_{\partial_{\mathbf{x}} = -i\mathbf{k}}^1(t, t - \tau) \mathbf{E}'_{-\mathbf{k}}(t - \tau) \rangle. \end{aligned} \quad (4.4)$$

依次把局域近似:

$$\begin{aligned} & \bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \bar{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}, t) [1 + \epsilon \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)], \\ & \epsilon \equiv \frac{1}{\bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)} \frac{\partial \bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_0} \quad (\text{假定 } \epsilon \text{ 与 } \mathbf{v}, t \text{ 无关}) \end{aligned} \quad (4.5)$$

和(4.4)式代入(4.1)式中, 则(4.1)式变成

$$(\partial_t + \bar{L})\bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \frac{q^2}{m^2} \frac{(2\pi)^3}{W} \partial_v$$

1) 由于 $\bar{U}^1(t, t_1)$ 是传播算符, 所以 $\langle \mathbf{E}'(\mathbf{x}, t) \bar{U}^1(t, t_1) \mathbf{E}'(\mathbf{x}, t_1) \rangle$ 与 $\langle \mathbf{E}'(\mathbf{x}, t) \mathbf{E}'(\mathbf{x}_1, t_1) \rangle$ 一样, 也是相关函数(参见文献 [4], p. 1780, 假定 (2)).

$$\begin{aligned} & \cdot \int_0^\infty d\tau \int d\mathbf{k} \langle \mathbf{E}'_{\mathbf{k}}(t) \bar{U}_{\mathbf{k}\mathbf{x}=-i\mathbf{k}}^1(t, t-\tau) \mathbf{E}'_{-\mathbf{k}}(t-\tau) \rangle \\ & \cdot \partial_{\mathbf{v}} [1 + \tau \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\epsilon}] \bar{U}_{\mathbf{k}\mathbf{x}=0}^1(t-\tau, t) \bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + o(S^2). \end{aligned} \quad (4.6)$$

(4.6) 式中的 $\bar{U}_{\mathbf{k}\mathbf{x}=-i\mathbf{k}}^1$ 和 $\bar{U}_{\mathbf{k}\mathbf{x}=0}^1$ 用它们各自的表式 (3.41)–(3.46) 式表出后, 在弱耦合近似下, 这个方程变成

$$\begin{aligned} (\partial_t + \bar{L})\bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = & \partial_{\mathbf{v}} \cdot \int_0^\infty d\tau \int d\mathbf{k} S'_k(\tau) \exp[i\tau \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}] \exp[-i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\beta}(\tau)] \\ & \cdot \exp\left[-ik_j \gamma_{ij}(\tau) \frac{\partial}{\partial v_i}\right] \cdot \exp[-\mathbf{k}\mathbf{k}:\boldsymbol{\delta}(\tau)] \exp[\partial_{\mathbf{v}} \cdot \boldsymbol{\alpha}(\tau) \cdot \partial_{\mathbf{v}}] \\ & \cdot \partial_{\mathbf{v}} [1 + \tau \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\epsilon}] \exp[-\partial_{\mathbf{v}} \cdot \boldsymbol{\alpha}(\tau) \cdot \partial_{\mathbf{v}}] \bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t), \end{aligned} \quad (4.7)$$

式中 $S'_k(\tau) \equiv \frac{q^2 (2\pi)^3}{m^2 W} \langle \mathbf{E}'_{\mathbf{k}}(t) \mathbf{E}'_{-\mathbf{k}}(t-\tau) \rangle = \frac{q^2 (2\pi)^3}{m^2 W} \langle \mathbf{E}'_{\mathbf{k}}(t) \mathbf{E}'_{\mathbf{k}}^*(t-\tau) \rangle$ 是相关函数 $S(t|\mathbf{r}, \tau)$ [见(3.18)式] 的傅里叶变换, 即

$$S'_k(\tau) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int S(t|\mathbf{r}, \tau) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r},$$

它确定了第 k 个模的时间相关特性.

由算符的微分法则, (4.7) 式中的

$$\begin{aligned} & \partial_{\mathbf{v}} [1 + \tau \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\epsilon}] \exp[-\partial_{\mathbf{v}} \cdot \boldsymbol{\alpha}(\tau) \cdot \partial_{\mathbf{v}}] \bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \\ & = [1 + \tau \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\epsilon}] \{-\partial_{\mathbf{v}} [\partial_{\mathbf{v}} \cdot \boldsymbol{\alpha}(\tau) \cdot \partial_{\mathbf{v}}] + o(S^2)\} \bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \\ & \quad + [1 + \tau \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\epsilon}] \exp[-\partial_{\mathbf{v}} \cdot \boldsymbol{\alpha}(\tau) \cdot \partial_{\mathbf{v}}] \partial_{\mathbf{v}} \bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \\ & \quad + \exp[-\partial_{\mathbf{v}} \cdot \boldsymbol{\alpha}(\tau) \cdot \partial_{\mathbf{v}}] \tau \boldsymbol{\epsilon} \bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t). \end{aligned} \quad (4.8)$$

所以当把此式代入(4.7)式中时, (4.8) 式右边第一项与 (4.7) 式中的 $S'_k(\tau)$ 合起来使这一项至少为 S^2 的量级, 在弱耦合近似下, 应略掉. 于是最终得到非均匀等离子体湍流的扩散方程与扩散张量

$$(\partial_t + \bar{L})\bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = (\partial_{\mathbf{v}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{D}} \cdot \partial_{\mathbf{v}} + \partial_{\mathbf{v}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{F}} \cdot \boldsymbol{\epsilon}) \bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t), \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{D}} = & \int_0^\infty d\tau \int d\mathbf{k} S'_k(\tau) \exp[i\tau \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}] \exp[-i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\beta}] \exp\left[-ik_j \gamma_{ij} \frac{\partial}{\partial v_i}\right] \exp[-\mathbf{k}\mathbf{k}:\boldsymbol{\delta}] \\ & \cdot \exp[\partial_{\mathbf{v}} \cdot \boldsymbol{\alpha} \cdot \partial_{\mathbf{v}}] [1 + \tau \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\epsilon}] \exp[-\partial_{\mathbf{v}} \cdot \boldsymbol{\alpha} \cdot \partial_{\mathbf{v}}], \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{F}} = & \int_0^\infty d\tau \int d\mathbf{k} S'_k(\tau) \exp[i\tau \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}] \exp[-i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\beta}] \\ & \cdot \exp\left[-ik_j \gamma_{ij} \frac{\partial}{\partial v_i}\right] \exp[-\mathbf{k}\mathbf{k}:\boldsymbol{\delta}]. \end{aligned} \quad (4.11)$$

与文献[1]的结果[见文献[1]的(4.3.4)与(4.3.5)式]比较, 我们看到不仅方程(4.9)右边的第二项是本文的新结果, 即使是第一项也与文献[1]的(4.3.5)式有很大的不同: 除有 $\tau \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\epsilon}$ 项而外, 在非均匀等离子体的情况下代表非马尔科夫贡献的 $\exp[-\partial_{\mathbf{v}} \cdot \boldsymbol{\alpha}(\tau) \cdot \partial_{\mathbf{v}}] \bar{f}(t)$ [它由 $\bar{U}_{\mathbf{k}\mathbf{x}=0}^1(t-\tau, t) \bar{f}(t)$ 而来], 即使在弱耦合近似下也不会被算符 $\bar{U}_{\mathbf{k}\mathbf{x}=-i\mathbf{k}}^1(t, t-\tau)$ 中的扩散贡献 $\exp[\partial_{\mathbf{v}} \cdot \boldsymbol{\alpha}(\tau) \cdot \partial_{\mathbf{v}}]$ 抵消; 而对于均匀等离子体, 在弱耦合近似下两种效应正好抵消, 因而等离子体湍流的非马尔科夫过程的特点似乎并不明显地出现在 M-B 理论的最后结果中. 这一点引导 Pelletier 等人去论证^[7, 8]: 如果等离子体湍流可以认为是马尔科夫过程, 则现有关于(均匀和非均匀)等离子体强湍流的各家理论便可以得到

统一, 然而等离子体湍流的非马尔科夫过程的性质在本文的每一个结果中都得到了正确的反映, 这表明马尔科夫概率模型不适于描述——即使是近似地描述——非均匀等离子体湍流. 当 $\epsilon = 0$ (均匀等离子体) 时, 本文的(4.9)和(4.10)式的确化为文献[1]的(4.3.4)和(4.3.5)式.

五、色散关系

首先利用(2.15)式, 把(4.2)式变成

$$f'(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = -\frac{q}{m} \int_0^\infty d\tau \bar{U}^1(t, t-\tau) \mathbf{E}'(\mathbf{x}, t-\tau) \cdot \partial_{\mathbf{v}} \bar{U}^1(t-\tau, t) \bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t); \quad (5.1)$$

其次与导出方程(4.6)的右端的做法类似, 由(5.1)和(2.2)式以及 $\mathbf{E}'$ 的傅里叶表式

$$\mathbf{E}'(\mathbf{x}, t) = \int \mathbf{E}'_{\mathbf{k}, \omega} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} d\mathbf{k} d\omega$$

和 $\bar{U}_{\delta_{\mathbf{x}}=\mathbf{k}}^1(t, t-\tau)$ 与 $\bar{U}_{\delta_{\mathbf{x}}=0}^1(t-\tau, t)$ 各自的表式 (3.41)–(3.46) 式, 在弱耦合近似下略去 $o(S^{3/2})$ 的项, 得到

$$\begin{aligned} i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}'_{\mathbf{k}, \omega} = & -\frac{4\pi q^2}{m} \int_0^\infty d\tau \int d\mathbf{v} \exp[i(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})\tau] \exp[i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\beta}] \\ & \cdot \exp\left[ik_j \gamma_{ij} \frac{\partial}{\partial v_i}\right] \exp[-\mathbf{k}\mathbf{k}:\boldsymbol{\delta}] \exp[\partial_{\mathbf{v}} \cdot \boldsymbol{\alpha} \cdot \partial_{\mathbf{v}}] \mathbf{E}'_{\mathbf{k}, \omega} \\ & \cdot \partial_{\mathbf{v}} [1 + \tau \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\epsilon}] \exp[-\partial_{\mathbf{v}} \cdot \boldsymbol{\alpha} \cdot \partial_{\mathbf{v}}] \bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t). \end{aligned} \quad (5.2)$$

同由(4.7)式变到(4.9)式的做法一样, 在弱耦合近似下, 只应保留 S 量级的项, 于是(5.2)式变成

$$\begin{aligned} i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}'_{\mathbf{k}, \omega} = & -\frac{4\pi q^2}{m} \int_0^\infty d\tau \int d\mathbf{v} \exp[i(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})\tau] \exp[i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\beta}] \\ & \cdot \exp\left[ik_j \gamma_{ij} \frac{\partial}{\partial v_i}\right] \exp[-\mathbf{k}\mathbf{k}:\boldsymbol{\delta}] \exp[\partial_{\mathbf{v}} \cdot \boldsymbol{\alpha} \cdot \partial_{\mathbf{v}}] \mathbf{E}'_{\mathbf{k}, \omega} \\ & \cdot \{[1 + \tau \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\epsilon}] \exp[-\partial_{\mathbf{v}} \cdot \boldsymbol{\alpha} \cdot \partial_{\mathbf{v}}] \partial_{\mathbf{v}} \bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \\ & + \exp[-\partial_{\mathbf{v}} \cdot \boldsymbol{\alpha} \cdot \partial_{\mathbf{v}}] \tau \boldsymbol{\epsilon} \bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)\}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

由(5.3)式立刻得到静电湍流的色散关系

$$\begin{aligned} 1 = & i \frac{4\pi q^2}{m} k^{-2} \int_0^\infty d\tau \int d\mathbf{v} \exp[i(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})\tau] \exp[i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\beta}] \\ & \cdot \exp\left[ik_j \gamma_{ij} \frac{\partial}{\partial v_i}\right] \exp[-\mathbf{k}\mathbf{k}:\boldsymbol{\delta}] \cdot \exp[\partial_{\mathbf{v}} \cdot \boldsymbol{\alpha} \cdot \partial_{\mathbf{v}}] \mathbf{k} \\ & \cdot \{[1 + \tau \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\epsilon}] \exp[-\partial_{\mathbf{v}} \cdot \boldsymbol{\alpha} \cdot \partial_{\mathbf{v}}] \partial_{\mathbf{v}} \bar{f} + \exp[-\partial_{\mathbf{v}} \cdot \boldsymbol{\alpha} \cdot \partial_{\mathbf{v}}] \tau \boldsymbol{\epsilon} \bar{f}\}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

这便是本文导出的包括非均匀性效应的色散关系, 非马尔科夫贡献也同时出现在其中. 当 $\epsilon = 0$ (均匀等离子体) 时, 本文的(5.4)式的确化为文献[1]的(5.3.6)–(5.3.10)式.

感谢比利时的 Balescu 教授和法国的 Misguich 教授审阅本文.

附 录

(3.25), (3.28) 和 (3.29) 式的推导

把 (3.20) 式代入 $[C(t-t_1), C(t-t_1-t_2)]$ 中, 则略去 S 二次幂以上的项以后,

$$[C(t-t_1), C(t-t_1-t_2)]g(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \mathbf{v} \cdot \partial_{\mathbf{x}}(\partial_{\mathbf{v}} \cdot \Delta^{12} \cdot \partial_{\mathbf{v}} g) - \partial_{\mathbf{v}} \cdot \Delta^{12} \cdot \partial_{\mathbf{v}}(\mathbf{v} \cdot \partial_{\mathbf{x}} g) \\ + \mathbf{v} \cdot \partial_{\mathbf{x}}(\partial_{\mathbf{v}} \cdot \phi^{12} \cdot \partial_{\mathbf{x}} g) - \partial_{\mathbf{v}} \cdot \phi^{12} \cdot \partial_{\mathbf{x}}(\mathbf{v} \cdot \partial_{\mathbf{x}} g). \quad (\text{A.1})$$

这里 $g(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ 是它的宗量的任意标量函数. 由矢量-张量运算法则, 并利用 $\mathbf{D}, \mathbf{F}$ 与 $\mathbf{x}$ 无关的假定, (A.1) 式简化为

$$[C(t-t_1), C(t-t_1-t_2)]g(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = -\Delta_{ij}^{12} \frac{\partial}{\partial v_j} \frac{\partial g}{\partial x_i} \\ - \Delta_{ij}^{12} \frac{\partial}{\partial v_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial \Delta_{ij}^{12}}{\partial v_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} - \phi_{ij}^{12} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial x_i}, \quad (\text{A.2})$$

即

$$[C(t-t_1), C(t-t_1-t_2)] = -\Delta^{12} : (\partial_{\mathbf{v}} \partial_{\mathbf{x}} + \partial_{\mathbf{x}} \partial_{\mathbf{v}}) - (\partial_{\mathbf{v}} \cdot \Delta^{12}) \cdot \partial_{\mathbf{x}} - \phi^{12} : \partial_{\mathbf{x}} \partial_{\mathbf{x}}. \quad (\text{A.3})$$

把此式代入正文的 (3.23) 式就得 (3.25) 式.

把 (A.3) 式和正文的 (3.20) 式代入 $[C(t-t_1), C(t-t_1-t_2)], C(t-t_1-t_2-t_3)]$ 中, 则略去 S 二次幂以上的项以后,

$$[[C(t-t_1), C(t-t_1-t_2)], C(t-t_1-t_2-t_3)]g(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \\ = (\Delta^{12} : \partial_{\mathbf{v}} \partial_{\mathbf{x}} + \Delta^{12} : \partial_{\mathbf{x}} \partial_{\mathbf{v}} + (\partial_{\mathbf{v}} \cdot \Delta^{12}) \cdot \partial_{\mathbf{x}} + \phi^{12} : \partial_{\mathbf{x}} \partial_{\mathbf{x}})(\mathbf{v} \cdot \partial_{\mathbf{x}} g) \\ - (\mathbf{v} \cdot \partial_{\mathbf{x}})(\Delta^{12} : \partial_{\mathbf{v}} \partial_{\mathbf{x}} + \Delta^{12} : \partial_{\mathbf{x}} \partial_{\mathbf{v}} + (\partial_{\mathbf{v}} \cdot \Delta^{12}) \cdot \partial_{\mathbf{x}} + \phi^{12} : \partial_{\mathbf{x}} \partial_{\mathbf{x}})g.$$

同样, 由矢量-张量运算法则, 并利用 $\mathbf{D}, \mathbf{F}$ 与 $\mathbf{x}$ 无关的假定, 上式简化为

$$[[C(t-t_1), C(t-t_1-t_2)], C(t-t_1-t_2-t_3)] = 2\Delta^{12} : \partial_{\mathbf{x}} \partial_{\mathbf{x}}. \quad (\text{A.4})$$

在 (A.4) 式中交换 $C(t-t_1)$ 和 $C(t-t_1-t_2-t_3)$ 的位置, 即得

$$[[C(t-t_1-t_2-t_3), C(t-t_1-t_2)], C(t-t_1)] = 2\Delta^{32} : \partial_{\mathbf{x}} \partial_{\mathbf{x}}. \quad (\text{A.5})$$

把 (A.4) 和 (A.5) 式代入正文的 (3.24) 式便得到 (3.28) 式. 由 (A.4) 和 (A.5) 式, 我们还看到, 利用 $\mathbf{D}, \mathbf{F}$ 与 $\mathbf{x}$ 无关的假定, 当略去 S 二次幂以上的项以后, C 与 $[[C(t-t_1), C(t-t_1-t_2)], C(t-t_1-t_2-t_3)]$ 型的算符都对易, 如此 $\Delta_i(t, t-\tau)$ 便等于零, 因而 $\Delta_i, \dots$ 都等于零, 这就是正文的 (3.29) 式.

参 考 文 献

- [1] J. H. Misguich & R. Balescu, *J. Plasma Phys.*, **13**(1975), 385.
- [2] J. H. Dupree, *Phys. Fluids*, **9**(1966), 1773.
- [3] J. Weinstock, *Phys. Fluids*, **12**(1969), 1045.
- [4] T. J. Birmingham *et al.*, *Phys. Fluids*, **15**(1972), 1778.
- [5] N. Peyraud *et al.*, *J. Plasma Phys.*, **12**(1974), 177.
- [6] P. Rolland, *J. Plasma Phys.*, **12**(1974), 455.
- [7] G. Pelletier *et al.*, *J. Plasma Phys.*, **14**(1975), 153.
- [8] G. Pelletier, *J. Plasma Phys.*, **18**(1977), 49.
- [9] R. M. Wilcox, *J. Math. Phys.*, **8**(1967), 962.

RENORMALIZED QUASI-LINEAR THEORY OF TURBULENCE IN NON-UNIFORM PLASMA (I)

GENERALIZATION OF MISQUICH-BALESCU THEORY

QIU XIAO-MING (S. M. CHIU)

(Southwestern Institute of Physics, China)

ABSTRACT

In deriving the diffusion equation, diffusion tensor and dispersion relation in respect of the inhomogeneity in plasma, the Misquich-Balescu's theory on turbulence in uniform plasma can be generalized to the case of non-uniform plasma. It is indicated that the method given by Pelletier et al. in considering the plasma turbulence as a Markov process is now inadequate to describe the turbulence in non-uniform Plasma.