

环形等离子体平衡时维持场电流的计算

张淳沅

孙继广

庆承瑞

(中国科学院物理研究所) (中国科学院计算中心) (中国科学院物理研究所)

1979年7月23日收到

提 要

本文介绍一个计算轴对称任意截面环形等离子体平衡问题的方法。

先选定等离子体边界和环电流分布,用有限元方法解平衡方程的边值问题。借助于虚壳原理,得到用平衡方程解表示的能够产生平衡时所需要的维持场的虚壳电流。计算虚壳电流在等离子体区的维持场,以它为根据,采用积分方程开拓,求等离子体区外某位形上的维持场电流分布。

这个问题的主要困难是当磁场向外开拓时遇到了不适定问题。我们用奇异值分解方法解不适定的 Fredholm 第一类积分方程。这个方法能容易地找到稳定解,对解决这个平衡问题是简单有效的。

我们以七种等离子体截面形状,三种电流分布为具体模型,在三种维持场电流分布位形上给出了维持场电流分布。还给出了维持场形态,维持场总电流与等离子体总电流的比较,并简单讨论了维持场对等离子体整体稳定性的影响。

一、引 言

人们熟知,一个载有环向电流的等离子体环本身是不平衡的。要有附加的角向磁场,通过它与环向等离子体电流的相互作用力才能使等离子体环平衡。此外,在设计某种类型轴对称环形等离子体发生器时,往往因为某一目的,比如稳定性,对等离子体柱的截面形状提出一定要求,并希望截面形状能灵活变化。这就要求恰当地设计附加的角向磁场分布,使其既起平衡作用又能使等离子体截面保持特定形状,这种意义下的附加角向磁场叫做维持场。

显然,对一定的等离子体电流分布,不同的平衡位形对附加角向磁场的要求是不一样的。这里讨论的是既定位形下的平衡问题,亦即所谓固定边界问题。问题的实质是讨论把等离子体环维持既定的平衡位形,其维持场形态应该是什么样?进而,形成维持场的电流分布又将如何?

对于这类平衡问题,Zakharov 曾给出解决的方法^[1]。他利用平衡方程在等离子体区的解,借助虚壳原理^[2],用虚壳电流计算环形等离子体平衡时的维持场,然后采用积分方程开拓,计算形成维持场的外电流分布。解积分方程用的是 Тихонов 正则化方法。文中采用了简单的模型,即取等离子体电流为均匀分布,这样可以不去解平衡方程,而用关于

坐标的多项式形式的显然解。

我们考虑的模型是多种等离子体截面形状,以及各种可能的线性等离子体电流分布。同时,根据实验上的可能布局,维持场电流分布位形也采用了多种。对这个复杂的模型就要具体地求解平衡方程。我们用有限元方法解平衡方程的边值问题^[3]。根据已知的磁场去寻求电流源,这是典型的数学物理中的反问题。按经典数学,反问题是不适定的。要处理不适定问题,这正是全部困难之所在。这里,把上述的不适定问题化成了一个第一类积分方程。对于不适定的积分方程,考虑到我们问题的具体情况,即给定磁场分布,实现这个场的电流分布不是唯一的,因此求解这一积分方程采用了奇异值分解的方法。与 ТИХОПОВ 正则化方法相比,奇异值分解法的好处在于避免了如何选取正则化因子的困难。该方法比较简单,计算量较小。我们的计算实践表明,对于给定磁场求外电流分布这类问题,用这一方法很容易得到稳定解,而正则化方法因正则化因子不易选取,得到稳定解比较难。因此奇异值分解方法对解决这里的平衡问题是简单有效的。

我们用上述方法,给出了合理的计算结果,从而为设计轴对称环形等离子体装置所需的维持场提供了一种新的数值计算方法。

二、解平衡方程第一边值问题的方法及平衡场的分离

环形等离子体一旦形成,就把自然空间分成两个区,一是等离子体区,一是真空区。由于问题的对称性,采用柱坐标描述这个环形等离子体系统,则问题归结到 r, z 平面上。记等离子体区为 Ω , 边界为 Γ , 等离子体区外待求外电流的分布位形为 Γ_1 , 如图 1。

平衡方程的边值问题如下:

$$L\phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -\frac{8\pi^2}{c} r j_\phi, \quad \phi|_{\Gamma} = \text{const.}, \quad (2.1)$$

其中 ϕ 为磁面函数, j_ϕ 为等离子体电流密度函数。

给定边界 Γ 的形状和等离子体电流分布 j_ϕ , 边值问题 (2.1) 式的解存在且唯一。我们用数值方法求解。

由于等离子体截面形状比较特殊,所以平衡方程的求解区域是很不规则的;同时在计算虚壳电流时,将遇到磁面函数在边界上的法微商。对此,用有限元方法解边值问题有很大灵活性。与边值问题 (2.1) 式等价的变分问题是

$$F(u) = 2\pi \iint_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \frac{u^2}{r^2} \right] - uf \right\} r dr dz, \quad u|_{\Gamma} = \text{const.}, \quad (2.2)$$

其中

$$f = f(r, u), \quad (2.3)$$

是与电流密度 j_ϕ 有关的函数,并且 j_ϕ 取做 ϕ 的线性函数。同时有

$$\phi = 2\pi r u. \quad (2.4)$$

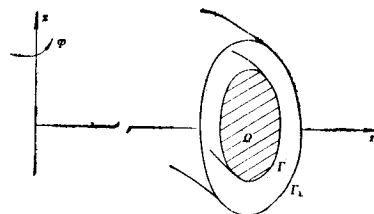


图 1 环形等离子体系统

这个平衡问题的最终目的,是要在位形 Γ_1 上找一个外电流分布,使能产生已知的维持场.那么自然要首先找到维持场,因为这是解决问题的根据.

维持场 $\mathbf{B}_m$ 及其磁通函数 ϕ_m 满足

$$\mathbf{B}_m = \frac{1}{2\pi r} \nabla \phi_m \times \mathbf{e}_\varphi. \quad (2.5)$$

因此可以认为 $\mathbf{B}_m$ 与 ϕ_m 是等价的.现在的问题就是求 $\mathbf{B}_m$ 或 ϕ_m .

载流的导体面,如面电流密度为 i ,则面两边的磁场发生 $\frac{4\pi}{c}i$ 的突变.把这个结论用到套在等离子体表面的虚壳上,得到用平衡方程在等离子体区内部解表示的虚壳电流为

$$i = \frac{c}{8\pi^2} \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_\Gamma, \quad (2.6)$$

其中 n 是等离子体边界 Γ 的法线方向.

由虚壳原理知道,等离子体环平衡时所需要的维持场磁通函数就是

$$\phi_m(r, z) = \oint_\Gamma \phi_0(r, z; s) i(s) ds, \quad (2.7)$$

其中观察点坐标 $(r, z) \in \Omega + \Gamma$; 场源点坐标 $s(a, \zeta) \in \Gamma$, 而 ds 是以 a, ζ 为变量的弧长,积分核

$$\phi_0(r, z; a, \zeta) = \frac{8\pi}{c} \frac{\sqrt{ar}}{k} [(1 - k^2/2)K(k) - E(k)], \quad (2.8)$$

$$k^2 = 4ar/[(a+r)^2 + (z-\zeta)^2], \quad (2.9)$$

其中 K, E 分别是第一,二类完全椭圆积分.

做为寻求维持场外电流分布依据的维持场磁通函数(2.7)式,我们有理由把它简化.因为维持场在 $\Omega + \Gamma$ 上没有源,所以有

$$L\phi_m = 0.$$

这是椭圆型算子意义下的调和方程,它的解 ϕ_m 在 Ω 内部的值,完全被边界上的值所确定^[4],所以只以

$$\phi_m(r, z)|_\Gamma = \oint_\Gamma \phi_0(r, z; s) i(s) ds \quad (2.10)$$

做为寻求维持场电流分布的依据即可.当然,这时有 $(r, z) \in \Gamma$.

显然,积分式(2.10)是有奇性的.我们用单位电流环的磁通做积分核计算磁通函数,这时核 ϕ_0 是弱奇性,对此选用适当的处理办法,可以比较容易地得到足够精确的 $\phi_m|_\Gamma$ 的近似值.

三、解 Fredholm 第一类积分方程

已知等离子体区维持场的形态,现在的问题是:要求出在等离子体区外某一位形 Γ_1 上的电流分布 i_1 ,使 i_1 在等离子体区产生已知的维持场.这个问题的数学表达就是

$$\oint_{\Gamma_1} \phi_0(s, s_1) i_1(s_1) ds_1 = \phi_m(s)|_\Gamma, \quad (3.1)$$

其中坐标 $s(r, z) \in \Gamma$, $s_1(r_1, z_1) \in \Gamma_1$, 积分核 ϕ_0 如 (2.8), (2.9) 式所示, i_1 就是形成维持场的外电流, 简称维持场电流.

(3.1) 式就是 Fredholm 第一类积分方程, 它是个典型的经典意义下的不适定问题, 有多种解法. 考虑到我们具体问题的物理特点, 即已知磁场分布其电流源可以不唯一. 对方程 (3.1) 来说, 只要找到的 $i_1(s_1)$ 能够在 Γ 上产生预期的维持场 $\phi_m|_\Gamma$ 即可, 因而这里我们采用奇异值分解方法求解.

Fredholm 第一类积分方程的一般形式为

$$\int_a^b K(x, y)Z(y)dy = g(x) \quad c < x < d, \quad (3.2)$$

其中 K, g 是已知函数, K 叫积分核, Z 是待定函数.

奇异值分解方法的要点如下: 恰当地选择一组基函数, 比如选一次 Spline 基, 把未知函数 $Z(y)$ 展开, 然后用 Gauss 求积法计算带权积分, 则直接把积分方程 (3.2) 离散化为代数方程组

$$AZ = g, \quad (3.3)$$

其中

$$\begin{aligned} A &= (a_{ij})_{m \times n}, & a_{ij} &= a_j(x_i), \\ g &= (g_i)_{m \times 1}, & g_i &= g(x_i), \\ Z &= (Z_j)_{n \times 1}, & Z_j &= Z(y_j), \\ &1 \leq i \leq m, & 1 \leq j \leq n. \end{aligned}$$

这里 a_{ij} 是被方程 (3.2) 右端积分决定的矩阵元, $m, n (m \geq n)$ 分别是自变量 x, y 的离散数.

根据积分算子的奇异系统理论, 由不适定问题 (3.2) 式直接离散化得到的方程组 (3.3) 多为病态, 它的解有大幅度振荡. 病态方程组所固有的这种不稳定的解, 不符合实际情况. 但利用矩阵 A 的奇异值和相应的奇异向量, 可以组合方程组 (3.3) 合理的近似解, 即所谓 P 次截断解.

根据矩阵理论, 任何实矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $m \geq n$, 都可做如下分解:

$$A = UDV^T, \quad (3.4)$$

其中 U, V 分别是 $m \times m, n \times n$ 阶正交阵, 而

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & d_2 & & & \\ & & d_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & 0 & & & d_{n-1} \\ & & & & & d_n \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

这里 $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$ 叫做矩阵 A 的奇异值, 且适合

$$d_1 \geq d_2 \geq d_3 \geq \dots \geq d_n > 0.$$

由于计算误差, 实际做到的分解 (3.4) 式只能是近似的, 即 (3.3) 式变为近似方程组

$$\tilde{A}\tilde{Z} = \tilde{g}, \quad (3.6)$$

其中 $\tilde{g} = g + \delta g$, 是 g 的某一近似, 往往是通过计算或测量得到的.

利用 (3.4) 式的近似式 $\tilde{A} = \tilde{U}\tilde{D}\tilde{V}^T \approx A$, 若记

$$\tilde{D} = \text{diag} \{ \tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \tilde{d}_3, \dots, \tilde{d}_n \},$$

$$\tilde{U} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3, \dots, \tilde{u}_m),$$

$$\tilde{V} = (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3, \dots, \tilde{v}_n),$$

根据矩阵 A 的病态性质, 可以找到一个 P 值 ($1 \leq P \leq n$), 使得

$$\tilde{Z}^{(P)} = \sum_{j=1}^P \frac{(\tilde{u}_j, \tilde{g})}{\tilde{d}_j} \tilde{v}_j, \quad (3.7)$$

满足合理的精确度

$$\|A\tilde{Z}^{(P)} - g\|/\|g\| < \varepsilon,$$

并且 $\tilde{Z}^{(P)}$ 具有可以允许的稳定性程度. 这里 ε 是足够小的正数. $\tilde{Z}^{(P)}$ 就叫做方程组 (3.6) 的 P 次截断解.

根据 P 次截断解的误差分析, 可取 P 为满足

$$\sqrt{\sum_{j=P+1}^n (\tilde{u}_j, \tilde{g})^2} = \|\delta g\| \quad (3.8)$$

的 P 的最小值. 由于矩阵 A 的高度病态性质, 这样选取的 P 往往远小于 $n^{[5]}$.

实际上我们并不知道 δg . 根据经验, 我们在计算时选 P 为满足

$$\sqrt{\sum_{j=P+1}^n (\tilde{u}_j, \tilde{g})^2} / \|\tilde{g}\| < \delta \quad (\text{比如 } 10^{-3}) \quad (3.9)$$

的 P 的最小值.

四、求解平衡问题的物理条件及计算结果

1. 求解平衡问题的物理条件

1) 关于等离子体电流模型的选取 目前人们并不知道等离子体电流密度 j_ϕ 与磁面函数 ψ 的函数关系, 所以就根据实际的可能性和不使求解平衡方程造成很大困难的原则来构造等离子体电流分布函数 j_ϕ 的唯象表示. 为简单起见, 通常考虑 j_ϕ 是 ψ 的线性函数, 所以实际上可能的电流分布不外三种: 均匀型, 扩散型和趋肤型. 取等离子体电流密度的唯象表达式为^[6]

$$j_\phi(r, \psi) = j_0 \frac{\beta_{p0}}{1+W} \left[\frac{1}{r_0} r + \left(\frac{1+W}{\beta_{p0}} - 1 \right) r_0 \frac{1}{r} \right] \cdot \left[W + (1-W) \frac{\psi}{\psi_0} \right], \quad (4.1)$$

其中带“0”角标的量系指磁轴附近的值. W 是选择电流模式的因子, $W=1$ 是均匀分布, $0 \leq W < 1$ 是扩散分布, $W > 1$ 是趋肤分布. 且有

$$\psi_0 = \frac{4\pi c r_0 P_0}{\beta_{p0}} \frac{1}{j_0}, \quad (4.2)$$

$$P(\psi) = \frac{P_0}{1+W} \left[2W + (1-W) \frac{\psi}{\psi_0} \right] \frac{\psi}{\psi_0}. \quad (4.3)$$

对于等离子体电流分布和截面形状给定情况下的平衡形态, 其磁轴上的诸量: β_{p0} ,

r_0, j_0, P_0, ϕ_0 是确定了的。可是我们选用的等离子体电流密度的唯象表达式(4.1)中恰好含有上述磁轴附近的诸量。这些量不是任意的,因此,在求解平衡方程时,对它们要进行自洽选择。

实际计算中不必把磁轴附近所有上述诸量都算出来比较是否自洽。可按下述办法很容易地判断。

对给定 $\beta_{P_0}, r_0, j_0, P_0$ 下的电流分布(4.1)式,解平衡方程的边值问题(2.1)式,根据给出的解 ϕ 和电流分布 j_ϕ , 很容易比较 ϕ 与 ϕ_0, r 与 r_0, i 与 j_0 是否自洽。此外,计算得到的相应物理量在磁轴附近也应满足(4.2)式,如果 ϕ, r, j 已自洽,则有

$$\phi = \frac{4\pi c r P}{\beta_P} \frac{1}{j} = \frac{4\pi c r_0 P_0}{\beta_{P_0}} \frac{1}{j_0}.$$

由此知, P/β_P 与 P_0/β_{P_0} 自洽,那么 β_P, P 是否也自洽呢? 由(4.3)式知,只要 ϕ 自洽,则 P 一定自洽,所以 β_P 也自洽。

若磁轴上诸量不自洽,对给定的电流分布的具体模式,即给定的 W 值,根据(4.2)式中各量的关系进行调试,达到自洽为止。

利用平衡方程边值问题(2.1)式的解,由(4.1)式可算出相应条件下的等离子体电流分布 j_ϕ 。

对于如(4.1)式给定的等离子体电流分布,变分问题(2.2)式泛函中的 f 为

$$f(r, u) = \frac{4\pi}{e} j_0 \frac{\beta_{P_0}}{1+W} \left[\frac{1}{r_0} r + \left(\frac{1+W}{\beta_{P_0}} - 1 \right) r_0 \frac{1}{r} \right] \cdot \left(W + \frac{1}{2} \frac{1-W}{\phi_0} \phi \right). \quad (4.4)$$

这里用到(2.4)式。

2) 关于等离子体截面形状 考虑到实际需要和可能,我们计算中用了七种等离子体截面形状。除了圆截面外,六种常见的轴向拉长截面是: 椭圆, Doublet 形,跑道形,“D”字形,反“D”字形,香蕉形,如图2。变截面的纵向拉长比大约是3。系统的几何参数如图2所示。

各种等离子体截面相应的边界方程: 圆和椭圆的方程是熟知的, Doublet 形和跑道形用四次曲线

$$(r^2 + z^2/E^2 + b^2)^2 - 4b^2 z^2/E^2 = c^4. \quad (4.5)$$

这个曲线是由 Cassinian 曲线^[7]修正得来的,其中 $E(>1)$ 是纵向拉长因子。在 $b < c$

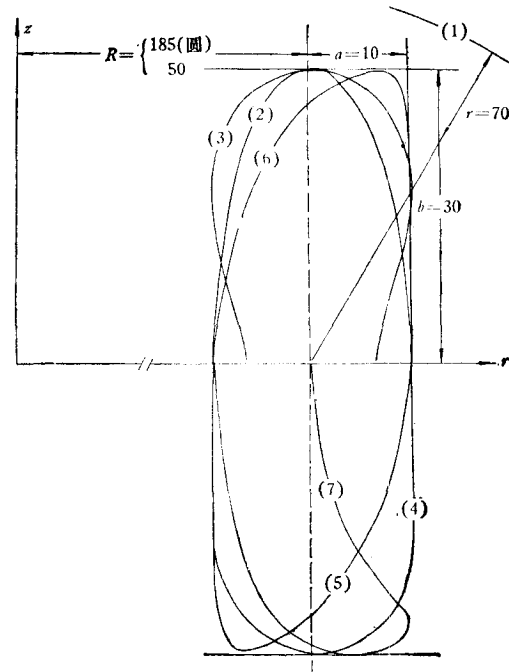


图2 等离子体边界 r 的形状

(1) 为圆; (2) 为椭圆; (3) 为 Doublet 形; (4) 为跑道形; (5) 为“D”字形; (6) 为反“D”形; (7) 为香蕉形

条件下,取 $E > 1$, 可以得到不同纵向拉长程度的 Doublet 形和跑道形曲线.

“D”字形曲线方程

$$\frac{z^2}{b^2} = \frac{1 - r^2/a^2}{1 + 2c_q \frac{r}{a}}. \quad (4.6)$$

这个曲线所确定的截面的形状,其纵横比由 b/a 决定. c_q 叫做形状因子,用来调节纵向极点的横向位置.显然,如 $c_q = 0$, 则曲线(4.6)式退化成椭圆.

对反“D”字形和香蕉形边界,直接把边界离散点坐标的数值输送给计算程序.

实际计算中,边值问题(2.1)式的边界条件取为

$$\phi|_r = 0.$$

2. 计算结果

对于固定边界的环平衡问题,实验上关心的是在各种等离子体电流分布及各种截面情况下的维持场电流分布 i_m , 维持场总电流 I_m 与等离子体总电流 I_p 的相对大小,维持场形态 ϕ_m , 以及它们与等离子体物理参数 β_{p0} , r_0 , j_0 , P_0 的关系等. 我们就七种等离子体截面形状(如图 2 所示),三种电流分布[如(4.1)式],三种维持场电流分布位形 Γ_1 (圆,椭圆和 D-形,如图 3),给出上述结果. 大多数结果都是对于等离子体柱压缩比为 2 的情况而言的,即等离子体边界 r 与维持场电流分布位形 Γ_1 的横向、纵向长度比都是 2. 对于等离子体截面为圆和椭圆,还给出小压缩比情况下的有关结果,这些结果更适合 Tokamak 型装置的情况.

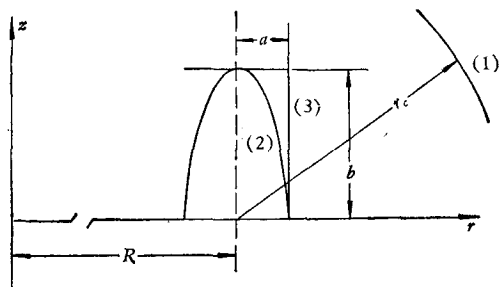


图 3 Γ_1 的位形 (1) 为圆, (2) 为椭圆, (3) 为 D-形;

$a = 20\text{cm}$, $b = 50\text{cm}$, $r_c = 78.5\text{cm}$, $R = 50\text{cm}$ (对于圆为 185cm)

计算结果表明,各种不同条件下——即等离子体截面形状,电流分布,物理参数 β_{p0} , r_0 , j_0 , P_0 不同——得到的维持场电流分布规律大致相同,但不同条件下的差异之处也是明显的. 相同的等离子体总电流,若其电流分布 j_φ 不同(即(4.1)式中 W 的不同取值范围),那么维持场电流 I_m 的大小是不同的,趋肤电流分布要求的维持场电流最大,扩散电流分布要求的维持场电流最小. 对于所考虑的各种情况,当压缩比大时(如为 2),维持场电流 I_m 都大于等离子体电流 $|I_p|$, 而压缩比小时相反.

以下用图和曲线给出若干典型结果. 在结果叙述中,凡是没有注明单位的物理量全系 Gauss 单位制下的量.

圆形截面等离子体, 对均匀电流分布, 给出 i_m , ϕ_m 分布, 如图 4. 这里 i_m 是用 Тихонов 正则化方法解积分方程得到的, 这结果有明显的的不稳定性, 见图 4(a). 其维持场如图 4(b).

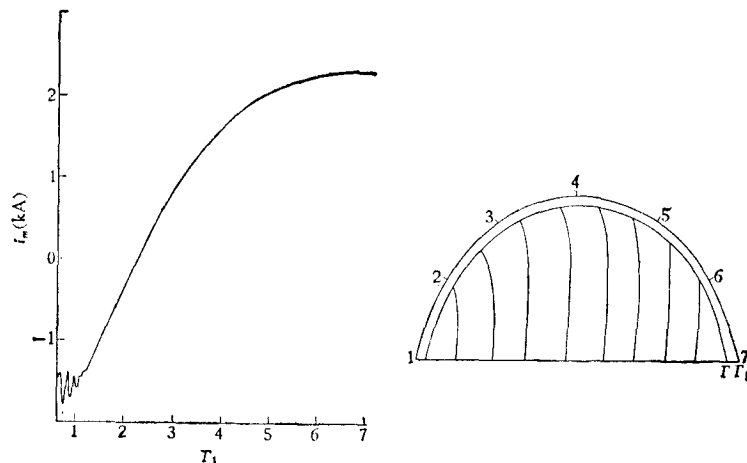
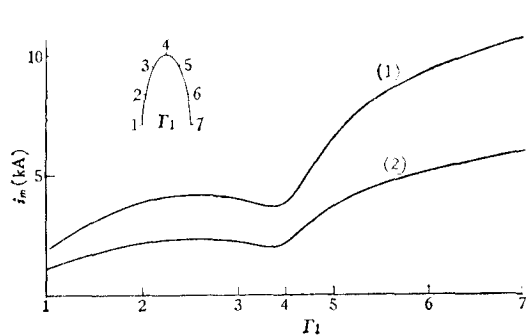
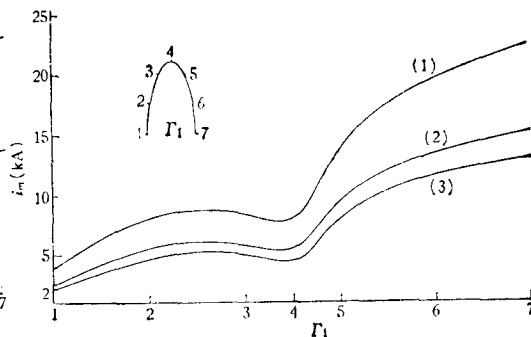
(a) 维持场电流分布 i_m (b) 维持场磁通函数 ϕ_m

图 4 圆截面等离子体的维持场电流及其场分布

对于同一种等离子体电流分布 j_φ 若总电流 I_p 大小不同, 用不同的物理参数, 可以找到不同的解 I_m , 如图 5. 图 6, 图 7 表明, 大约相同的等离子体电流 I_p , 如其分布不同, 则相应的维持场电流 I_m 大小也不同.

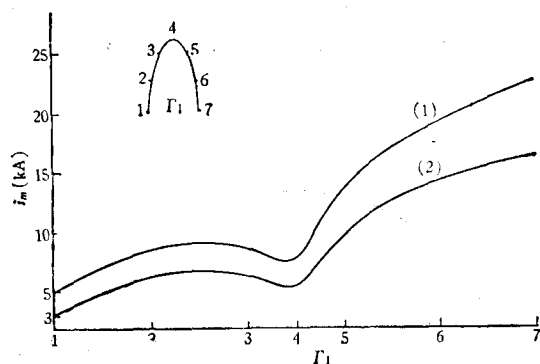
图 5 等离子体为椭圆截面均匀电流情况下, 不同大小等离子体电流 I_p 对应的维持场电流分布的比较

- (1) 为 $\beta_{p0} = 1$, $r_0 = 53$, $j_0 = -3.3 \times 10^{12}$,
 $I_m = 683 \text{ kA}$, $I_p = -521 \text{ kA}$;
 (2) 为 $\beta_{p0} = 3$, $r_0 = 53$, $j_0 = -2 \times 10^{12}$,
 $I_m = 375 \text{ kA}$, $I_p = -276 \text{ kA}$

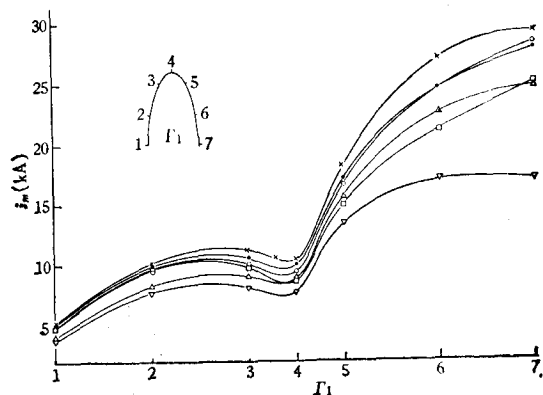
图 6 椭圆截面三种不同等离子体电流分布情况下的维持场电流分布 i_m

- (1) 为 $W = 5$, $\beta_{p0} = 1$, $r_0 = 53$, $j_0 = -1.6 \times 10^{12}$,
 $P_0 = 3 \times 10^6$, $I_m = 1.44 \text{ MA}$, $I_p = -0.81 \text{ MA}$;
 (2) 为 $W = 1$, $\beta_{p0} = 0.5$, $r_0 = 53$,
 $j_0 = -4.6 \times 10^{12}$, $I_m = 975 \text{ kA}$, $I_p = -751 \text{ kA}$;
 (3) 为 $W = 0.5$, $\beta_{p0} = 1$, $r_0 = 53$, $j_0 = -7 \times 10^{12}$,
 $P_0 = 9 \times 10^6$, $I_m = 836 \text{ kA}$, $I_p = -800 \text{ kA}$

图 8 给出的是当等离子体电流分布 j_φ 为趋肤形 ($W = 5$), 物理参数为: $\beta_{p0} = 0.5$, $r_0 = 53$, $j_0 = -2 \times 10^{12}$, $P_0 = 3 \times 10^6$ 时各种截面情况下的维持场电流分布 i_m . 从这里可以看到, 不同等离子体截面下的平衡对 i_m 提出的不同要求.

图7 “D”字形截面等离子体维持场电流分布 i_m

- (1) $W = 2.5$, $\beta_{p0} = 0.6$, $r_0 = 53$, $j_0 = -3 \times 10^{12}$,
 $P_0 = 3 \times 10^6$, $I_m = 1.44 \text{ MA}$, $I_p = -853 \text{ kA}$;
 (2) $W = 1$, $\beta_{p0} = 0.5$, $r_0 = 53$, $j_0 = -4.8 \times 10^{12}$,
 $I_m = 1.04 \text{ MA}$, $I_p = -800 \text{ kA}$

图8 各种拉长截面等离子体的维持场电流分布 i_m

- 椭圆, $I_m = 1.79 \text{ MA}$; ×——Doublet 形, $I_m = 1.89 \text{ MA}$;
 ○——跑道形, $I_m = 1.75 \text{ MA}$; △——反“D”字形, $I_m = 1.59 \text{ MA}$;
 □——“D”字形, $I_m = 1.61 \text{ MA}$; ▽——香蕉形, $I_m = 1.31 \text{ MA}$

对等离子体截面为椭圆, 当压缩比小的情况下, 即 Γ 的两半轴为 $a = 18$, $b = 48$, 而 Γ_1 为图 3 的(2)所示, 且当等离子体电流为均匀分布, 物理参数为: $\beta_{p0} = 1$, $r_0 = 53$, $j_0 = -1.7 \times 10^{12}$, 给出 i_m 分布及场形态 ψ_m , 如图 9. 值得注意的是这时的 $I_m < |I_p|$ ($I_m = 591 \text{ kA}$, $I_p = -785 \text{ kA}$).

由拉长截面大压缩比的维持场电流分布 i_m 曲线知, 各种条件下(包括维持场电流分布位形为椭圆和コ-形的) i_m 分布趋势大致相同, 所以维持场形态也大致相同, 如图 10(a). 图 10(b) 是各种相应条件下由虚壳电流分布 i_v 形成的已扩展到等离子体区外的维持场. 比较图 10(a), (b) 知, 在等离子体区的维持场是完全相同的. 实际上, 各种条件下的虚壳电流分布 i_v 也是大致相同的, 如图 10(c) 所示. 这里我们只根据共同规律性给出一般性的比较, 做细致比较后发现, 对各种具体条件, 其维持场电流的维持场与相应条件下虚壳

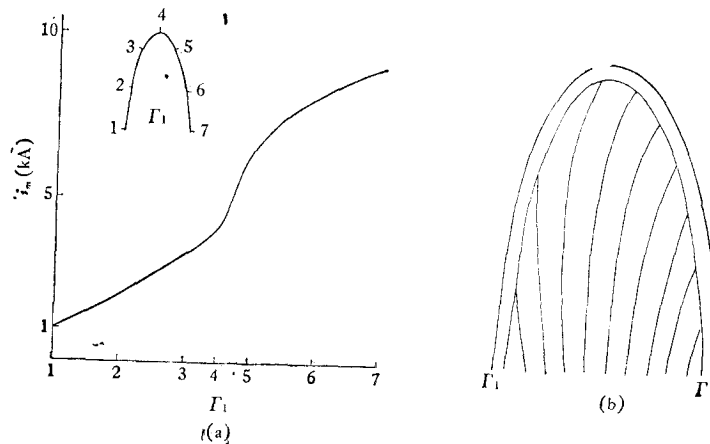
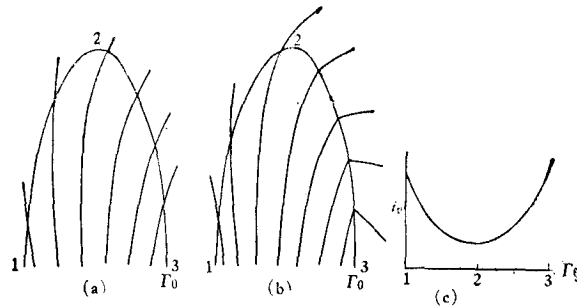


图 9 椭圆截面小压缩比等离子体的维持场电流分布及场分布

(a) 维持场电流分布 i_m ; (b) 维持场的磁通函数 ψ_m 图 10 维持场形态 Γ_0 为图 2 中除圆以外的任一 Γ (a) 维持场电流 i_m 的磁场; (b) 虚壳电流 i_v 的磁场;
(c) 虚壳电流分布 i_v

电流在等离子体区的维持场,在误差范围内的确是完全相同的。这个比较说明,这里所用的解积分方程的数值方法确实有效。

计算结果还表明,圆形等离子体截面,其维持场如图 4(b),从场的曲率知道,它对等离子体垂直稳定性是有利的;所有纵向拉长截面,拉长比为 3,其维持场如图 10(a) 和 (b),对等离子体垂直稳定性都是不利的。这个结论与稳定性问题专门研究中得到的结论是一致的^[8,9]。这就是人们要探讨拉长截面等离子体环的整体稳定性问题的原因所在。

由分析知,上述结果是合理的。特别是积分方程解有很好的稳定性,这是计算结果可靠性的主要根据。这里给出的结果可作为环形等离子体装置设计的依据。

参 考 文 献

- [1] L. E. Zakharov, *Nucl. Fusion*, **13**(1973), 595.
- [2] V. D. Shafranov, L. E. Zakharov, *Nucl. Fusion*, **12** (1972), 599.
- [3] 冯康, 数学的实践与认识, **4** (1974), 54.
- [4] 柯朗, 希尔伯特, 数学物理方法, 科学出版社, II 卷, 第四章 (1977).
- [5] R. J. Hanson, *SIAM. J. Numer. Anal.*, **8** (3) (1971), 616.

- [6] 庆承瑞、周玉美, 物理学报, **29** (1980), 106.
[7] И. Н. Бронштейн и К. А. Семендяев, Справочник по математике (1959).
[8] M. Okabayashi, G. Sheffield, *Nucl. Fusion*, **14** (1974), 263.
[9] Mamoru Hata *et al.*, *Japan. J. Appl. Phys.*, **17** (1978), 2023.

THE CALCULATION OF CURRENT OF MAINTAINING FIELD IN TOROIDAL PLASMA EQUILIBRIUM

ZHANG CHUN-YUAN

(*Institute of Physics, Academia Sinica*)

SUN JI-GUANG

(*Computing Center, Academia Sinica*)

QING CHENG-RUI

(*Institute of Physics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

In this paper a method is presented for solving the equilibrium problem with axisymmetry for arbitrarily given plasma configurations. First, the boundary value problem of equilibrium equation is solved by finite element method for a given plasma boundary and current distribution. Then, based on virtual-casing principle, the virtual-casing current which produces the maintaining magnetic field requisite for the equilibrium is obtained by using solution of the equilibrium equation. The field of virtual-casing current, i.e. the maintaining field inside plasma is calculated. The current distribution of maintaining field on a certain contour outside the plasma is found by means of solving the integral equation. The main difficulty confronted in solving the integral equation problem is that one has to deal with an incorrectly posed problem. We have solved the incorrectly posed Fredholm integral equation of first kind, using a method of singular value decomposition. This method is simple and effective in solving such an equilibrium problem.

We have considered seven types of plasma configuration including circular, elliptic, doublet, race-track, D-, back D- and banana shapes and three kinds of plasma current distribution including quasi-uniform, diffusion-type and skin-type distribution. Three type of current distribution for maintaining field are obtained in a given circular, elliptic- and $\square$ -shapes. For the models as mentioned above, the current distribution of maintaining field and the field itself are given. The total currents of maintaining field and total plasma currents are compared with each other. Some influences of the maintaining fields on stability is discussed.