

脉冲强磁场系统最佳设计的理论

张 裕 恒

(中国科学技术大学物理系)

1979年7月2日收到

提 要

本文综合考虑了线圈、电源和电路诸因素,并据此第一次建立了一个设计标准电容器放电型脉冲磁体(绕组线圈、Bitter线圈或单匝线圈)通用的理论。只要给出设计指标: B_0 , $2a_1$, $\frac{1}{2}T$, σ , λ 和 V ,就可以由本理论算出磁体的最佳结构参数和电源的设计参数(i_0 , $F(\alpha, \beta)$, a_2 , b , L , C , N , l , S (或 d), R 和 $I_{\max}$)。

本文并对最佳磁体结构进行了物理探讨。

一、引 言

自从1924年 Kapitza^[1] 建立起第一个脉冲磁体以来,直到目前为止,脉冲磁体的设计都是把结构和电源分开考虑的,所以实际结构的选取也都是采用做出许多个磁体,然后由实验上选出最佳结构^[2-5]。所谓最佳结构是指对获得同样场值和空间的磁体需要最小能源的结构。

1936年 Bitter^[6] 就给出了不同结构形状磁体产生场的理论公式,见表1。过去的磁

表1 对不同结构形状的磁体所产生场的 Bitter 公式

线圈形状	电流密度 i_0	磁场 $\left(\alpha = \frac{a_2}{a_1}, \beta = \frac{b}{a_1}\right)$	备 注
方 截 面	常 数	$B_0 = \frac{4\pi b \lambda i_0}{10} \ln \frac{a_2 + (a_2^2 + b^2)^{1/2}}{a_1 + (a_1^2 + b^2)^{1/2}}$	绕组线圈
方 截 面	$\frac{i_0}{a}$	$B_0 = \frac{4\pi i_0 \lambda}{10} \ln \left(\alpha \frac{\beta + (1 + \beta^2)^{1/2}}{\beta + (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}} \right)$	Bitter 线圈
锥形截面	常 数	$B_0 = \frac{4\pi i_0}{10} \frac{\lambda k}{(1 + k^2)^{1/2}} (a_2 - a_1)$	$b = ka$
锥形截面	$\frac{i_0}{a}$	$B_0 = \frac{4\pi i_0 \lambda}{10} \left(\frac{k}{k^2 + 1} \right)^{1/2} \ln \frac{a_2}{a_1}$	$b = ka$
方 截 面	最佳的径向分布 $i_0 = f(a) = \frac{1}{20\mu_0 a(a^2 + b^2)^{1/2}}$	$B_0 = \frac{4\pi b \lambda}{10} \int_{a_1}^{a_2} \frac{f(a) da}{(a^2 + b^2)^{1/2}}$	

a_1 是磁体内半径; a_2 是磁体外半径; $2b$ 是磁体的长度; B_0 是磁体的中心场强; λ 是填充因子; i_0 是流过磁体材料的电流密度。

体设计是取表 1 中相应的公式计算出 a_2 和 $2b$, 再由对磁体线圈电感 L 的要求定出磁体中线圈的圈数 N , 算出线圈材料的横截面积 S 和长度 l . 而 L 是由所要求的时间常数 $\frac{1}{2}T$ (T 是放电周期) 而定的, 但 T 不仅决定于放电系统的电感还决定于电路中的电容. 一般地说 L 的选取是凭经验而没有任何理论根据.

由于磁体结构和电源是分立考虑的, 以致要达到期望的场值可能要求十分大的电源才能在线圈中产生相应的 i_0 . 这种不合理的结构正是由于没有一个把线圈结构、电源和电路统一考虑的完整理论而致.

本文综合考虑了磁体结构、电源和电路, 建立了一组完备方程组, 提出了一个设计标准电容器放电型脉冲磁体 (绕组线圈、Bitter 线圈或单匝线圈) 的通用理论: 只要给出设计指标 B_0 , $\frac{1}{2}T$, $2a_1$ 和选定参数 λ 、材料所受的应力密度 σ 及电容器的工作电压 V , 就可由本理论算出磁体的最佳结构参数和电源的设计参数 i_0 , $F(\alpha, \beta)$, a_2 , b , L , C , N , l , S (或 Bitter 线圈每圈的厚度 d)、磁体材料的电阻 R 和流过磁体材料的最大电流 $I_{\max}$. 本文并对最佳磁体结构进行了物理探讨.

二、理 论

已知 B_0 , $2a_1$, $\frac{1}{2}T$, λ , V 和 σ , 我们要求出 i_0 , $F(\alpha, \beta)$, a_2 , b , L , C , N , l , S (或 d), R 和 $I_{\max}$. 本文采用实用单位.

由于磁体形状不同、放电时间不同, 则其电感和所受的应力等公式都不同. 本文的计算是取特定情况下的公式为例而给出理论计算方法. 当然设计者可根据具体设计对象取相应的公式, 用本理论计算最佳结构.

1. 绕组线圈

1) 磁体结构 设计绕组线圈必须用如下公式:

表 1 中已给出了电流密度为常数的矩形截面绕组线圈的公式

$$B_0 = a_1 i_0 \lambda F(\alpha, \beta) \times 10^{-6}, \quad (1)$$

式中

$$F(\alpha, \beta) = \frac{4\pi}{10} \beta \ln \frac{\alpha + (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}}{1 + (1 + \beta^2)^{1/2}}, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\text{导体的有效体积}}{\text{磁体结构的总体积}} \\ &= \frac{lS}{2\pi(a_2^2 - a_1^2)b}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$l = N\pi(a_1 + a_2 + \varepsilon - \delta) \quad [\text{见附录 1}], \quad (4)$$

ε 是 a_1 到第一匝线的绝缘层的厚度, δ 是匝匝间绝缘层的厚度. 则

$$L = \mathcal{L} N^2 \quad (7). \quad (5)$$

令

$$\mathcal{L}_c = \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \right) 4\pi a_0 \left\{ \left(1 + \frac{b^2}{8a_0^2} + \frac{c^2}{96a_0^2} \right) \ln \frac{a_0}{\alpha_0} - y_1 + \frac{\frac{c^2}{16a_0^2} y_3}{\frac{b^2}{4a_0^2} y_2} \right\} \quad \begin{matrix} c > 2b \\ c < 2b \end{matrix},$$

式中 $a_0 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$, $c = a_2 - a_1$, $d_0 = (4b^2 + c^2)^{\frac{1}{2}}$, μ_0 是真空导磁率, y_1 , y_2 和 y_3 是修正系数, 可以查表得到^[7].

对线圈中材料所受的应力密度 σ , 我们取自由匝的公式

$$\sigma = a_1 i_0 B_0^{[8]}. \quad (6)$$

2) 放电电路 图 1 是脉冲磁体工作电路示意图. 如果 $R_t = R$, $L_t = L$, 在 $R < 2\sqrt{(L/C)}$ 的条件下,

$$I = \frac{V}{L\omega_a} e^{-at} \sin \omega_a t, \quad (7)$$

$$a = \frac{R}{2L}, \quad \omega_a = (\omega^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

令

$$\frac{\partial I}{\partial t} = 0,$$

得

$$t_m = \frac{1}{\omega_a} \tan^{-1} \frac{\omega_a}{a}, \quad (8)$$

t_m 是达到电流最高峰值的时间. 所以

$$I_{\max} = \frac{V}{L\omega_a} \exp\left(-\frac{a}{\omega_a} \tan^{-1} \frac{\omega_a}{a}\right) \sin \tan^{-1} \frac{\omega_a}{a}. \quad (9)$$

3) 完整的理论 从(9)式可以看到 L 大, 就会达不到所希望的电流, 那么减小 L 看来是有利的. 诚然, 如果对脉冲磁体不要求其时间常数 $\frac{1}{2}T$ (或 t_m) 是正确的. 但如果要求满足所需的时间常数 $\frac{1}{2}T$, 则 L 必须有一个适当的值. 因为

$$T = \frac{2\pi}{\omega_a} = 2\pi \left(\frac{1}{LC} + \frac{R^2}{4L^2} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (10)$$

如果 L 小, 则必须增加 C , 这样对能源提出了苛刻要求. 所以在 1) 段中的 N 不能是任意的.

此外, 磁体材料的电阻

$$R = \rho \frac{l}{S}. \quad (11)$$

当然在磁体的结构和电路确定之后, $I_{\max}$ 还满足

$$I_{\max} = i_0 S. \quad (12)$$

方程(1)–(6), (9)–(12) 组成一组完备方程组, 可解出 i_0 , $F(\alpha, \beta)$, a_2 , b , L , C , N , l , S , R 和 $I_{\max}$ 等 11 个未知数. 看来, 这似乎多了一个未知数, 方程无唯一解, 然而,

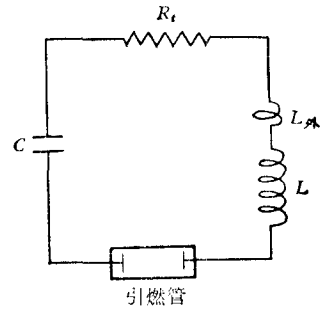


图1 脉冲磁体工作电路示意图
 R_t 为总电阻, $L_t = L_{\text{外}} + L$

实际上 b 和 a_2 可以由要求绕组最小体积而一道解出.

由(6)式得

$$i_0 = \frac{\sigma}{B_0 a_1}. \quad (13)$$

(13)式代入(1)式得

$$F(\alpha, \beta) = \frac{B_0^2}{\sigma \lambda} \times 10^6. \quad (14)$$

查 $F(\alpha, \beta)$ 系数表 (不必去解了) 立即可以得到最小绕组体积的 α 和 β , 即得到 a_2 和 b . 但是这样计算出的场是不均匀的, 只有在中心一点达到 B_0 , 为了达到所要求的均匀度范围, 则可查均匀度表^[7]和 $F(\alpha, \beta)$ 表得出 α, β , 定出 a_2 和 b . 既然 a_1, a_2 和 $2b$ 都是已知了, 那么(5)式中的 $\mathcal{L}_c$ 将是一个已知的参量.

由(10)式可以解出

$$L = \frac{1}{2} \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 \left[\frac{1}{C} + \sqrt{\frac{1}{C^2} - \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 R^2} \right]. \quad (15)$$

由(5)式和(15)式得

$$N = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{T}{2\pi} \right) \mathcal{L}_c^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{C} + \sqrt{\frac{1}{C^2} - \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 R^2} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (16)$$

再由(4), (6), (11) 和 (16) 式得

$$R = \mathcal{R}_c C^{-1}. \quad (17)$$

令

$$\mathcal{R}_c \equiv \frac{\rho \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 \frac{\pi(a_1 + a_2 + \varepsilon - \delta)^2}{2\lambda b(a_2^2 - a_1^2) \mathcal{L}_c C}}{1 + \rho^2 \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 \frac{\pi^2(a_1 + a_2 + \varepsilon - \delta)^4}{16\lambda^2 b^2(a_2^2 - a_1^2)^2 \mathcal{L}_c^2}},$$

(17)式代入(16)式得

$$N = \frac{T}{2\sqrt{2} \pi \mathcal{L}_c^{\frac{1}{2}} C^{\frac{1}{2}}} \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \mathcal{R}_c^2} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (18)$$

(18)式代入(4)式得

$$l = \frac{T(a_1 + a_2 + \varepsilon - \delta)}{2\sqrt{2} \mathcal{L}_c^{\frac{1}{2}} C^{\frac{1}{2}}} \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \mathcal{R}_c^2} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (19)$$

(19)式代入(3)式得

$$S = 2\sqrt{2} \left(\frac{2\pi}{T} \right) \frac{\lambda b(a_2^2 - a_1^2) \mathcal{L}_c^{\frac{1}{2}} C^{\frac{1}{2}}}{(a_1 + a_2 + \varepsilon - \delta)} \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \mathcal{R}_c^2} \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (20)$$

(17)式代入(15)式得

$$L = \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{2C} \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \mathcal{R}_c^2} \right]. \quad (21)$$

将(17)和(21)式代入(9)式

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} = 2 \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \mathcal{R}_c^2} \right]^{-1}, \quad (22a)$$

$$a = \frac{R}{2L} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \mathcal{R}_c \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \mathcal{R}_c^2}\right]^{-1}, \quad (22b)$$

$$\begin{aligned} \omega_a &= (\omega^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{2\pi}{T} \frac{\left\{2 \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \mathcal{R}_c^2}\right] - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \mathcal{R}_c^2\right\}^{\frac{1}{2}}}{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \mathcal{R}_c^2}}. \end{aligned} \quad (22c)$$

$$I_{\max} = \mathfrak{Z}_c C. \quad (23)$$

令

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z}_c &\equiv \frac{2V}{\left(\frac{T}{2\pi}\right) \left\{2 \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \mathcal{R}_c^2}\right] - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \mathcal{R}_c^2\right\}^{\frac{1}{2}}} \\ &\quad \cdot \exp \left\{ - \frac{\left(\frac{2\pi}{T}\right) \mathcal{R}_c}{\left\{2 \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \mathcal{R}_c^2}\right] - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \mathcal{R}_c^2\right\}^{\frac{1}{2}}} \right. \\ &\quad \cdot \tan^{-1} \frac{\left(\frac{T}{2\pi}\right) \left\{2 \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \mathcal{R}_c^2}\right] - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \mathcal{R}_c^2\right\}^{\frac{1}{2}}}{\mathcal{R}_c} \left. \right\} \\ &\quad \cdot \sin \tan^{-1} \frac{\left(\frac{T}{2\pi}\right) \left\{2 \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \mathcal{R}_c^2}\right] - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \mathcal{R}_c^2\right\}^{\frac{1}{2}}}{\mathcal{R}_c}. \end{aligned}$$

将(13)和(20)式代入(12)式

$$I_{\max} = 2\sqrt{2} \left(\frac{2\pi}{T}\right) \frac{\sigma}{B_0 a_1} \frac{\lambda b(a_2^2 - a_1^2) \mathcal{L}_c^{\frac{1}{2}} C^{\frac{1}{2}}}{(a_1 + a_2 + \varepsilon - \delta) \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \mathcal{R}_c^2}\right]^{\frac{1}{2}}}. \quad (24)$$

由(23)和(24)式得

$$C^{\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{2} \left(\frac{2\pi}{T}\right) \sigma \lambda b(a_2^2 - a_1^2) \mathcal{L}_c^{\frac{1}{2}}}{\mathfrak{Z}_c B_0 a_1 (a_1 + a_2 + \varepsilon - \delta) \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \mathcal{R}_c^2}\right]^{\frac{1}{2}}}, \quad (25)$$

$$C = \frac{8 \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \sigma^2 \lambda^2 b^2 (a_2^2 - a_1^2)^2 \mathcal{L}_c}{\mathfrak{Z}_c^2 B_0^2 a_1^2 (a_1 + a_2 + \varepsilon - \delta)^2 \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \mathcal{R}_c^2}\right]}. \quad (26)$$

将(25)和(26)式分别代入(17)–(21)和(23)式,得

$$R = \frac{\mathcal{R}_c \mathfrak{Z}_c^2 B_0^2 a_1^2 (a_1 + a_2 + \varepsilon - \delta)^2 \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \mathcal{R}_c^2}\right]}{8 \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \sigma^2 \lambda^2 b^2 (a_2^2 - a_1^2)^2 \mathcal{L}_c}, \quad (27)$$

$$N = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \frac{\mathcal{L}_c B_0 a_1 (a_1 + a_2 + \varepsilon - \delta)}{4\sigma\lambda b(a_2^2 - a_1^2)\mathcal{L}_c} \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \mathcal{R}_c^2}\right], \quad (28)$$

$$l = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \frac{\pi \mathcal{L}_c B_0 a_1 (a_1 + a_2 + \varepsilon - \delta)}{4\sigma\lambda b(a_2^2 - a_1^2)\mathcal{L}_c} \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \mathcal{R}_c^2}\right], \quad (29)$$

$$S = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{8\sigma\lambda^2 b^2 (a_2^2 - a_1^2)\mathcal{L}_c}{\mathcal{L}_c B_0 a_1 (a_1 + a_2 + \varepsilon - \delta)^2 \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \mathcal{R}_c^2}\right]}, \quad (30)$$

$$L = \left(\frac{T}{4\pi}\right)^4 \frac{\mathcal{L}_c^2 B_0^2 a_1^2 (a_1 + a_2 + \varepsilon - \delta)^2}{16\sigma^2 \lambda^2 b^2 (a_2^2 - a_1^2)^2 \mathcal{L}_c} \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \mathcal{R}_c^2}\right], \quad (31)$$

$$I_{\max} = \frac{8 \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \sigma^2 \lambda^2 b^2 (a_2^2 - a_1^2)^2 \mathcal{L}_c}{\mathcal{L}_c B_0^2 a_1^2 (a_1 + a_2 + \varepsilon - \delta)^2 \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \mathcal{R}_c^2}\right]}. \quad (32)$$

4) 最佳结构 在3)中综合考虑磁体结构和放电电路得出了设计脉冲磁体的完备理论,但由此得出的结构并不是最佳的.由(26)式可以看到 b , a_2 , $\mathcal{L}_c$, $\mathcal{L}_c$ 和 $\mathcal{R}_c$ 都是 σ 的函数,即

$$C = f(\sigma). \quad (33)$$

如果把 σ 看作可调参量,则由

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} C = 0 \quad (34)$$

可以得到相应于 C 极小值的 $\sigma = \sigma_m$, 将 σ_m 代入(13), (14), (26)–(32)式中,就得到最佳结构的磁体结构参数和放电电路参数.

表 2 绕组线圈最佳设计的理论值

设计指标	B_0 (kG)	60	60	60	60	60
	$t_m \times 10^{-3}$ (sec)	20	20	20	20	20
	$a_1 \times 10^{-2}$ (m)	6.45	6.45	6.45	6.45	6.45
已知参数	λ	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4
	V (kV)	5	5	5	5	5
	$\sigma \times 10^8$ (N/m ²)	1.0	1.5	2.0	2.5	4.0
	$\rho \times 10^{-8}$ ($\Omega \cdot m$)	1.64	1.64	1.64	1.64	1.64
磁体结构和电源 参数的计算值	$F(\alpha, \beta)$	0.903	0.60	0.45	0.36	0.225
	$a_2 \times 10^{-2}$ (m)	14.2	11.2	9.66	9.03	8.06
	$b \times 10^{-2}$ (m)	8	8	8	8	8
	$l \times 10^2$ (m)	2.3	2.36	2.405	2.19	1.77
	$S \times 10^{-6}$ (m ²)	13.8	7.2	4.35	3.67	2.66
	N	354	422.5	475	448	386
	$R \times 10^{-1}$ (Ω)	2.68	5.4	9.1	9.8	10.9
	$L \times 10^{-3}$ (H)	15.13	17.2	18.0	16.55	11.63
	$i_0 \times 10^8$ (A/m ²)	2.58	3.88	5.165	6.46	10.33
	$I_{\max} \times 10^3$ (A)	3.56	2.785	2.24	2.37	2.75
	$C \times 10^{-3}$ (F)	10.71	9.41	8.575	9.72	13.92

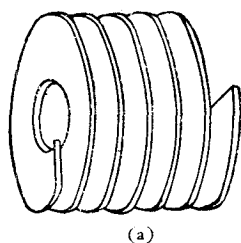
因为由 (34) 式求出 σ_m 的解析式是十分困难的, 所以我们用数值法求解. 表 2 中的数据是其一例. 用表 2 的数据绘出 $\sigma-C$, a_2-C 的关系(见图 2). 从表 2 和图 2 可以看到对于达到同样设计指标 B_0 , a_1 和 T , 有一个所需电源的最低值, 即有一个磁体的最佳结构.

2. Bitter 线圈和单匝线圈

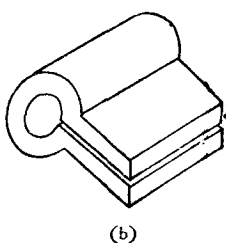
图 3(a) 是标准的 Bitter 线圈, 线圈中流过的电流密度与线圈的半径成反比. 它的设计理论和上述略有不同, 首先场的公式是用表 1 中 Bitter 线圈的公式, 电感也应取相应的 Bitter 线圈的电感公式, 如 $L = \mathcal{L}_B N^2$. 其次, 它的线宽 t 就是 $a_2 - a_1$, 上述的截面 S 在这里应换成 $d(a_2 - a_1)$. 在计算它的电阻时, 线的长度 l 无意义, 因此不存在 l 的方程, 当然也不能用 (11) 式来求电阻 R . 此外, λ 也和上述不同, Bitter 线圈的 λ 是

$$\lambda = \frac{\pi(a_2^2 - a_1^2)dN}{\pi(a_2^2 - a_1^2)2b} = \frac{dN}{2b},$$

$$d = \frac{2\lambda b}{N}. \quad (35)$$



(a)



(b)

图 3 Bitter 线圈和单匝线圈

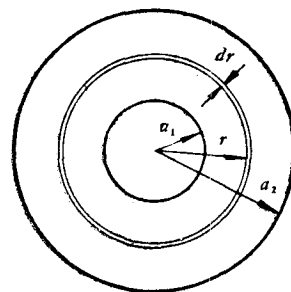


图 4 Bitter 线圈的截面

图 4 是 Bitter 线圈的截面, 取面元的电阻为 dR_1 , 则每匝线的电阻 R_1 为

$$dR_1 = \rho \frac{2\pi r}{ddr},$$

则

$$d\sigma_{\text{电}} = \frac{d}{2\pi\rho} \frac{dr}{r},$$

$\sigma_{\text{电}}$ 是电导率,

$$\sigma_{\text{电}} = \int_{a_1}^{a_2} \frac{d}{2\pi\rho} \frac{dr}{r} = \frac{d}{2\pi\rho} (\ln a_2 - \ln a_1),$$

$$R_1 = \frac{2\pi\rho}{d(\ln a_2 - \ln a_1)}. \quad (36)$$

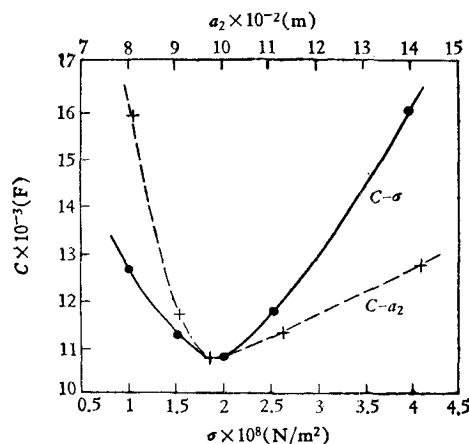


图 2 数值求解最佳设计的理论曲线

用和上述类似的方法可得

$$R = \mathcal{R}_B C^{-1}, \quad (37)$$

令

$$\mathcal{R}_B = \frac{\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \frac{\pi\rho}{\lambda b(\ln a_2 - \ln a_1) \mathcal{L}_B}}{1 + \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \frac{\pi^2 \rho^2}{4\lambda^2 b^2 (\ln a_2 - \ln a_1)^2 \mathcal{L}_B^2}},$$

$$L = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{2C} \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \mathcal{R}_B^2}\right]^{\frac{1}{2}}, \quad (38)$$

$$N = \frac{\left(\frac{T}{2\pi}\right)}{\sqrt{2} \mathcal{L}_B^{\frac{1}{2}} C^{\frac{1}{2}}} \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \mathcal{R}_B^2}\right]^{\frac{1}{2}}, \quad (39)$$

$$d = \frac{2\sqrt{2} \lambda b \left(\frac{2\pi}{T}\right) \mathcal{L}_B^{\frac{1}{2}} C^{\frac{1}{2}}}{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \mathcal{R}_B^2}}, \quad (40)$$

$$I_{\max} = \mathcal{Z}_B C, \quad (41)$$

令

$$\mathcal{Z}_B \equiv \frac{2V}{\left(\frac{T}{2\pi}\right) \left\{2 \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \mathcal{R}_B^2}\right] - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \mathcal{R}_B^2\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$\times \exp \left\{ - \frac{\left(\frac{2\pi}{T}\right) \mathcal{R}_B}{\left\{2 \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \mathcal{R}_B^2}\right] - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \mathcal{R}_B^2\right\}^{\frac{1}{2}}}\right\}$$

$$\times \tan^{-1} \frac{\left(\frac{T}{2\pi}\right) \left\{2 \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \mathcal{R}_B^2}\right] - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \mathcal{R}_B^2\right\}^{\frac{1}{2}}}{\mathcal{R}_B}$$

$$\times \sin \tan^{-1} \frac{\left(\frac{T}{2\pi}\right) \left\{2 \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \mathcal{R}_B^2}\right] - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \mathcal{R}_B^2\right\}^{\frac{1}{2}}}{\mathcal{R}_B},$$

$$I_{\max} = 2\sqrt{2} \frac{\sigma}{B_0 a_1} (a_2 - a_1) \frac{\left(\frac{2\pi}{T}\right) \lambda b \mathcal{L}_B^{\frac{1}{2}} C^{\frac{1}{2}}}{\left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \mathcal{R}_B^2}\right]^{\frac{1}{2}}}. \quad (42)$$

由(41)和(42)式得

$$C^{\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{2} \sigma \lambda b \left(\frac{2\pi}{T}\right) (a_2 - a_1) \mathcal{L}_B^{\frac{1}{2}}}{\mathcal{Z}_B B_0 a_1 \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \mathcal{R}_B^2}\right]^{\frac{1}{2}}}, \quad (43)$$

$$C = \frac{8\sigma^2\lambda^2b^2\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2(a_2 - a_1)^2\mathcal{L}_B}{\mathcal{Z}_B^2B_0^2a_1^2\left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\mathcal{R}_B^2}\right]}. \quad (44)$$

将(43)和(44)式分别代入(37)–(41)式,得

$$R = \frac{\mathcal{R}_B\mathcal{Z}_B^2B_0^2a_1^2}{8\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\sigma^2\lambda^2b^2(a_2 - a_1)^2\mathcal{L}_B}\left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\mathcal{R}_B^2}\right], \quad (45)$$

$$L = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^4 \frac{\mathcal{Z}_B^2B_0^2a_1^2}{16\sigma^2\lambda^2b^2(a_2 - a_1)^2\mathcal{L}_B}\left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\mathcal{R}_B^2}\right]^2, \quad (46)$$

$$N = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \frac{\mathcal{Z}_BB_0a_1}{4\sigma\lambda b(a_2 - a_1)\mathcal{L}_B}\left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\mathcal{R}_B^2}\right], \quad (47)$$

$$d = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{8\sigma\lambda^2b^2(a_2 - a_1)\mathcal{L}_B}{\mathcal{Z}_BB_0a_1\left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\mathcal{R}_B^2}\right]}, \quad (48)$$

$$I_{\max} = \frac{8\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\sigma^2\lambda^2b^2(a_2 - a_1)^2\mathcal{L}_B}{\mathcal{Z}_BB_0^2a_1^2\left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\mathcal{R}_B^2}\right]}. \quad (49)$$

单匝线圈是 Bitter 线圈的特例(见图 3(b)), 它的 $N = 1$, $\lambda = 1$, 所以 Bitter 线圈 9 个未知数 9 个方程就变成了 8 个未知数 9 个方程, 那么其中 1 个未知数必然不是唯一的.

如相应于单匝线圈的电感为 $L = \mathcal{L}_s$. 并由 $N = 1$, 则(35)式变为

$$d = 2b. \quad (50)$$

(50)式代入(36)式

$$R = \frac{\pi\rho}{b(\ln a_2 - \ln a_1)}. \quad (51)$$

将 L 和 R 代入(9)式(下面将讨论, 对单匝线圈一般用高压电容器, 所以 C 很小, $R < 2\sqrt{(L/C)}$ 可以满足, 则对单匝线圈(7)式成立), 得

$$I_{\max} = \frac{V}{\left[\frac{1}{C} - \frac{\pi^2\rho^2}{4b^2(\ln a_2 - \ln a_1)^2\mathcal{L}_s}\right]^{\frac{1}{2}}} \times \exp\left\{-\frac{\frac{\pi\rho}{2b(\ln a_2 - \ln a_1)}}{\left[\frac{1}{C} - \frac{\pi^2\rho^2}{4b^2(\ln a_2 - \ln a_1)^2\mathcal{L}_s}\right]^{\frac{1}{2}}}\right\} \times \tan^{-1}\left\{\frac{\left[\frac{1}{C} - \frac{\pi^2\rho^2}{4b^2(\ln a_2 - \ln a_1)^2\mathcal{L}_s}\right]^{\frac{1}{2}}}{\frac{\pi\rho}{2b(\ln a_2 - \ln a_1)}}\right\}$$

$$\times \sin \tan^{-1} \frac{\left[\frac{1}{C} - \frac{\pi^2 \rho^2}{4b^2(\ln a_2 - \ln a_1)^2 \mathcal{L}_s} \right]^{\frac{1}{2}}}{\frac{\pi \rho}{2b(\ln a_2 - \ln a_1)}}. \quad (52)$$

由(12)式

$$I_{\max} = \frac{2\sigma b}{B_0 a_1} (a_2 - a_1). \quad (53)$$

由(52)式和(53)式可解出 C , 但这个 C 不一定满足所要求的周期 T . 因为

$$T = \frac{2\pi}{\omega_d} = 2\pi \left(\frac{1}{\mathcal{L}_s C} - \frac{R^2}{4\mathcal{L}_s} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (54)$$

而(54)式中 $\mathcal{L}_s$, R 和 C 已是定值, 故 T 可用(54)式求出, 但这个 T 不一定是我们所要求的. 为了满足所要求的 T , C 就不是唯一的.

单匝线圈一般只是为了获得高场值, 例如 $>3\text{MG}$, 对时间常数 $\frac{1}{2}T$ 不作要求, 3MG 量级的超强场单匝线圈, $\frac{1}{2}T$ 一般都在微秒量级. 由于 T 是任意的, 所以方程(10)或(54)应去掉, 这样将是 8 个方程 8 个未知数, 解是唯一的.

三、理论与实验比较

Jordaen 等人^[9]获得了 $B_0 = 517\text{kG}$, $2a_1 = 2\text{cm}$ 和 $\frac{1}{2}T = 17.5\text{ms}$ 绕组线圈磁体, 这是目前最高水平的绕组线圈磁体. 表 3 中给出了它的结构参数、电源参数、实验结果(最高值)和本理论值. 取表 3 中的 a_1 , a_2 , b , N 和 S 及总电容, 并选取不同的 V , 用本理论计算出的曲线绘在图 5 中, 表 5 中同时给出 Jordaen 等人的实验结果进行比较. 在 400kG (或 2.2kV) 以下理论与实验符合得很好, 高于 400kG , 实验与理论偏离愈来愈大. 比较表 4 中的最高实验值和理论值, 对于 $\frac{1}{2}T$, 理论值大约比实验值高 9%, 对于 $I_{\max}(i_0)$ 和 B , 理论比实验大约分别高 9% 和 15%. 从图 5(b) 上看到 V 高于 2.2kV , 场值偏离于 $V-B_0$ 的线性关系, 并且随着 V 的升高, B_0 的实验值有饱和趋势. 这是由于电流运行过程中, 随 I 的增大, 发热不断增加, 致使线材的电阻 R 增加, 从而降低了 $I_{\max}$. 而本文中没考虑电流运行过程中的发热, 所以理论值高于实验值. 关于运行过程中发热的问题, 将另文讨论.

表 3 Jordaen 等人的绕组磁体的线圈结构参数、电源参数、实验结果(最高值)和理论值

结 构 参 数		电 源 参 数		实 验 值 (最 高)		理 论 值
$2a_1$ (m)	2×10^{-2}	$V(\text{V})$	3120	13.2	$I_{\max}(\text{kA})$	14.5
$2a_2$ (m)	6×10^{-2}			2.42×10^{10}	$i_0(\text{A/m}^2)$	2.67×10^{10}
$2b$ (m)	9×10^{-2}			517	$B_0(\text{kG})$	610
N (匝)	325	总 电 容 (F)	3×10^{-2}	1.75×10^{-2}	$\frac{1}{2}T$ (sec)	19.2×10^{-2}
S (m ²)	$3.4 \times 1.6 \times 10^{-6}$					

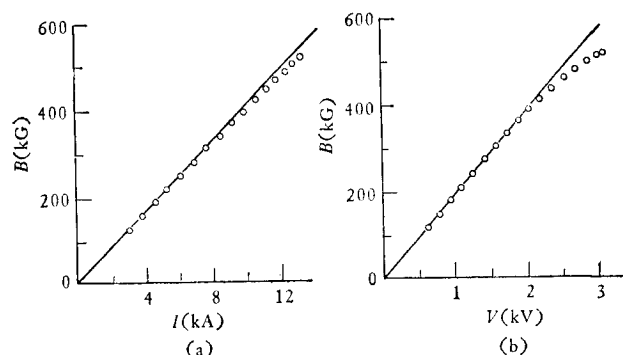


图5 理论与实验比较: 实线是理论曲线, 实验值取自 Jordaan 等人^[9]的结果

四、讨 论

1. 最佳结构的物理意义

为了获得高磁场, 从(1)式可以看到必须提高 i_0 , λ 和 $F(\alpha, \beta)$.

对于 λ , 除了单匝线圈 $\lambda = 1$ 外, 其它类型的磁体 λ 都小于 1, 但一般都要求 λ 尽可能高, 目前做出的最高场值的绕组线圈磁体^[9], λ 做到接近于 1.

提高 $F(\alpha, \beta)$ 不是孤立的, 它与 i_0 的取值有关, 从表 3 和图 5 看到, 对达到同样指标的磁体, C 有一个极小. 这说明尽管磁体加固得很好, 不考虑受力, 单纯提高 i_0 也是不利的.

从物理图象上看, 如果 i_0 小, 要达到预定的 B_0 , 必须增大 $F(\alpha, \beta)$; 而增大 $F(\alpha, \beta)$, 必然要增大 α 或 β , 即增大 a_2 和 $2b$. 这样散失在磁体结构内的磁能将随 $(a_2^2 - a_1^2)$ 或 $2b$ 而增加, 特别是如预先选定 b , 则 a_2 要更大, 损失磁能则更多.

反之, 为了减少磁能损失, 增加 i_0 可以降低 $F(\alpha, \beta)$, 减小 a_2 和 $2b$; 但随着 a_2 和 $2b$ 的减小, 磁体材料截面面积减小(见表 3), 电阻增加, 焦耳损失增大, 为了达到所要求的场值同样需要增加能源. 因此磁损耗和焦耳损耗“竞争”的结果, 使得能量损耗有一个相应于最佳结构的最低值.

2. 电压、电容和电感

从(9)式可以看到提高电压和电容, 降低电感都是获得高场的途径. 但是(9)式给出 $I_{\max} \propto V$, 而当 R 小时, $I_{\max} \propto \sqrt{C}$, 所以为了提高 $I_{\max}$ (或 i_0), 增加电压比增加电容有利. 但是在绕组线圈和 Bitter 线圈中, 人们并不取用高压电容器, 这是因为高压绝缘问题给磁体带来的不利, 要远超过用高压 V 带来的好处. 而且为了解决绝缘问题, 必然要减小 λ , 从而降低了场值. 更重要的是高压电容器一般容量小, 要满足方程(10)给定的 T 值, 所需的电容器的数量将是十分大的.

同样, 减少 L 也受到所要求的时间常数 $\frac{1}{2} T$ 的限制.

对单匝线圈, 线圈本身不存在绝缘问题, 而且一般对 T 亦不作要求, 这样就可以利用

小电感 (mH 量级)、高电压 (70kV) 而获得超强场 (3.5MG)^[10].

3. 电阻效应

如果线圈材料的 $R = 0$, 则 (10)、(8) 和 (14) 式变成 $(T)_0 = 2\pi\sqrt{LC}$, $(t_m)_0 = \frac{1}{2}\pi\sqrt{LC}$ 和 $(I_{\max})_0 = V\sqrt{\frac{C}{L}}$. 而当 $R \neq 0$, 那么 $T > (T)_0$, $t_m < (t_m)_0$ 和 $I_{\max} < (I_{\max})_0$, 图 6 给出不同 $a = R/2L$ 的 $I-t$ 曲线, 随 a 值的增加, $I_{\max}$ 减小, 以致场值降低. 因此尽可能地减小 R 是十分必要的, 因为 S, l 等结构参数已固定, 减小 R 当然只能减小 ρ , 例如无氧铜, $\rho_{293K} = 7.5\rho_{7.7K}$, $\rho_{293K} = 100\rho_{4.2K}$, 所以磁体要充分冷却.

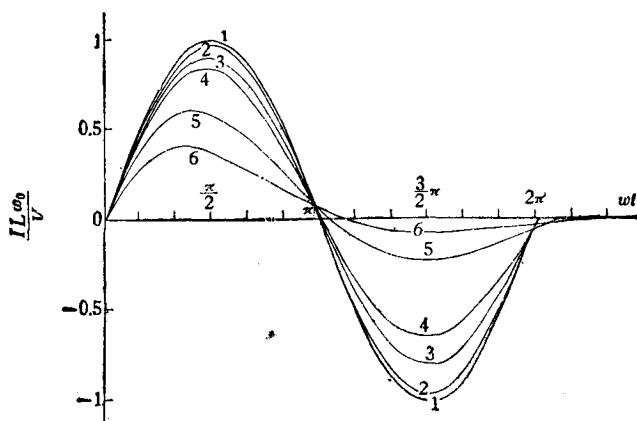


图 6 不同电阻值, 磁体的 $I-t$ 关系

	a	t_m	T
1	0	$\pi/2$	2π
2	0.01ω	$0.996 \times \frac{\pi}{2}$	$1 \times 2\pi$
3	0.05ω	$0.969 \times \frac{\pi}{2}$	$1.003 \times 2\pi$
4	0.10ω	$0.939 \times \frac{\pi}{2}$	$1.005 \times 2\pi$
5	0.30ω	$0.847 \times \frac{\pi}{2}$	$1.048 \times 2\pi$
6	0.50ω	$0.769 \times \frac{\pi}{2}$	$1.155 \times 2\pi$

五、结 论

本文的理论第一次给出了设计标准电容器放电型脉冲磁体的完整的计算方法. 并可计算出达到同样场参数需要最小能源的最佳磁体结构. 理论与实验较好地符合.

按照本文理论可算出最佳磁体结构而不需做许多磁体再由实验上作出选择。

附 录

为了计算绕组线圈的线长 l , 我们取一长方截面的线, 设线宽为 t , 厚度为 d_1 , 则 $S = td_1$, 如果线圈共有 n 并, 每并有 m 匝, 匝与匝之间绝缘材料的厚度为 δ , a_1 到第一匝绝缘层厚度为 ε (见附图 1), 则

$$\begin{aligned} a_2 - a_1 - \varepsilon &= m(\delta + d_1), \\ m &= \frac{a_2 - a_1 - \varepsilon}{\delta + d_1}, \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

而

$$N = nm, \quad (\text{A.2})$$

如果设每并长度为 l' , 则

$$l = nl', \quad (\text{A.3})$$

第 j 匝线的周长 l'_j 为

$$l'_j = 2\pi \left[a_1 + \varepsilon + j(\delta + d_1) - \delta - \frac{1}{2} d_1 \right],$$

则

$$\begin{aligned} l' &= \sum_{j=1}^m 2\pi \left[a_1 + \varepsilon + j(\delta + d_1) - \delta - \frac{1}{2} d_1 \right] \\ &= 2\pi \left[m \left(a_1 + \varepsilon - \delta - \frac{1}{2} d_1 \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} m(m+1)(\delta + d_1) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

将 (A.1) 式代入 (A.4) 式得

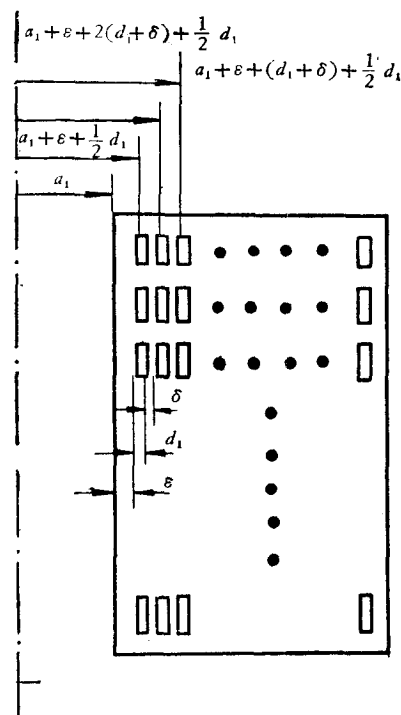
$$l' = \frac{\pi(a_2 - a_1 - \varepsilon)(a_2 + a_1 + \varepsilon - \delta)}{\varepsilon + d_1}. \quad (\text{A.5})$$

(A.5) 式代入 (A.3) 式得

$$l = N\pi(a_2 + a_1 + \varepsilon - \delta). \quad (\text{A.6})$$

如果 a_1 定义为中心轴到最内匝金属的距离, a_2 定义为中心轴到最外匝金属材料边缘的距离, 则

$$l = N\pi(a_2 + a_1).$$



附图 1 绕组线圈的截面

参 考 文 献

- [1] P. L. Kapitza, *Proc. Roy. Soc. London*, **A105**(1924), 691.
- [2] Olsen, Helr, *Phys. Acta*, **26**(1953), 798.
- [3] S. Foner and H. H. Kolm, *Rev. Sci. Instr.*, **28**(1957), 799.
- [4] H. Brechen, D. A. Hill and B. M. Bailey, *Rev. Sci. Instr.*, **36**(1965), 1529.
- [5] Ø. Fischer, *Colloques Internationaux C. N. R. S. N.*, 242-Physique Sous Champs Magnétiques Intenses, (1974), 79.
- [6] F. Bitter, *Rev. Sci. Instr.*, **7**(1936), 482.
- [7] 焦正宽、朱震刚、宁宇宏、张其瑞编译,《超导技术及其应用》,科学出版社(1976),73 页;78 页;105 页.
- [8] B. E. Mulhall, *Proceeding the Fourth International Conference on Magnet Technology*, (1972), p. 360.
- [9] H. A. Jordaan, R. Wolf and D. DeKlerk, *Physica*, **69**(1973), 129.
- [10] I. W. Shearer, *J. Appl. Phys.*, **40**(1969), 4490.

THEORY OF OPTIMUM DESIGNING FOR THE SYSTEMS OF PULSE STRONG MAGNETIC FIELD

ZHANG YU-HENG

(Department of Physics, University of Science and Technology of China)

ABSTRACT

After a comprehensive consideration on the factors of coil, circuit, and power, this article gives, for the first time, a general theory of designing a standard capacitor discharge pulse magnet (winding coil, Bitter coil, or single turn coil).

According to the theory, the optimum construction parameters of the magnet and the parameters of the power (i_0 , $F(\alpha, \beta)$, a_2 , b , L , C , N , l , S , (or d), R , and $I_{\max}$) can be calculated if only the figures of B_0 , $2a$, $\frac{1}{2}T$, λ , σ , and v are given.

This article also makes a physical study on the optimum construction of magnet.