

T_c 级数解的收敛半径问题

周子舫 吴杭生 茅德强 顾一鸣

(中国科学技术大学)

1980年1月16日收到

提 要

本文从 Eliashberg 方程出发,证明了一个计算 T_c 级数解收敛半径 $1/\Lambda$ 的公式.它和作者之一及其合作者在前一篇文章中猜测的公式实际上是相符的,从而肯定了他们建议的计算 Λ 的方法是正确的.

一、引 言

在前几篇文章中,作者之一及其合作者从 Eliashberg 方程导出下列 T_c 级数解^[1]:

$$(2\pi T_c)^{-2} = C_{01} \frac{1}{\lambda \langle \omega^2 \rangle} \left\{ 1 + \frac{C_{11}}{\lambda} \frac{\langle \omega^4 \rangle}{\langle \omega^2 \rangle^2} + \frac{1}{\lambda^2} \left(C_{21} \frac{\langle \omega^6 \rangle}{\langle \omega^2 \rangle^3} + C_{22} \frac{\langle \omega^4 \rangle^2}{\langle \omega^2 \rangle^4} \right) + \dots \right\}; \quad (1)$$

研究了它的收敛性质^[2];定出头七个 $C_{ij} = C_{ij}(\mu^*)$ 的表示式^[3];并探讨了它的高 T_c 问题上可能给人们的启示^[4]等.虽然这些工作已较全面地对此 T_c 公式进行了研究,但是它们对某些问题的解决,还极其不能令人满意.像收敛半径问题便是其中的一个.

所谓收敛半径问题,就是指在规一的有效声子谱 $g(\omega)$ 给定后,如何计算出 T_c 级数解的收敛半径 $1/\Lambda$ 问题.

作者之一及其合作者在文献[3]中建议的计算 Λ 的方法如下:先计算出 $\mu^* = 0$ 时,一级近似下的 T_c 级数解^[1]

$$(2\pi T_{c1})^{-2} = \frac{1}{\lambda \langle \omega^2 \rangle} \left\{ 1 + \frac{\langle \omega^4 \rangle}{\langle \omega^2 \rangle^2} \frac{1}{\lambda} + \left(2 \frac{\langle \omega^4 \rangle^2}{\langle \omega^2 \rangle^4} - \frac{\langle \omega^6 \rangle}{\langle \omega^2 \rangle^3} \right) \frac{1}{\lambda^2} + \dots \right\} \quad (2)$$

的收敛半径 $1/\Lambda_1$.然后,把 $1/\Lambda_1$ 除以 $0.65(1 + 3\mu^*)$,得出 $\mu^* \neq 0$ 时严格级数解(1)式的收敛半径 $1/\Lambda$,即

$$\Lambda = (0.65 + 2\mu^*)\Lambda_1, \quad (3)$$

其中 $\mu^* = \mu^*(\omega_c)$.

根据文献[2]的分析,计算 Λ_1 问题可归结为寻求复函数

$$z = F(y) \equiv \int_0^{\omega_{ph}} d\omega g(\omega) \frac{\omega^2 y}{\omega^2 y + 1} \quad (4)$$

的反函数 $y = G(z)$ 离原点 $z = 0$ 最近的奇点 z_s . z_s 的绝对值就是 $1/\Lambda_1$.这部分计算

可用数值计算方法完成^[3].

问题是,从 Λ_1 推算出 Λ , 需用到公式(3). 至少,文献[3]的作者没有能证明这个公式是正确的. 实际上,他们当时依据的仅仅是这样一个经验事实: 把 $\mu^* = 0$ 时一级近似 T_c 公式(2)中的 λ 和 T_{c1} 分别用 $\lambda/(0.65 + 2\mu^*)$ 和 $1.080T_c$ 替代,得到

$$(2\pi T_c)^{-2} = 1.167 \left(\frac{\lambda \langle \omega^2 \rangle}{0.65 + 2\mu^*} \right)^{-1} \left\{ 1 + \frac{(0.65 + 2\mu^*)}{\lambda} \frac{\langle \omega^4 \rangle}{\langle \omega^2 \rangle^2} + \frac{(0.65 + 2\mu^*)^2}{\lambda^2} \left(2 \frac{\langle \omega^4 \rangle^2}{\langle \omega^2 \rangle^2} - \frac{\langle \omega^6 \rangle}{\langle \omega^2 \rangle^3} \right) + \dots \right\}. \quad (5)$$

在此级数的收敛范围内,由它计算出的 T_c 和严格数值解可近似地符合^[3]. 显然,这个事实不足表明公式(3)是正确的. 这样,由此式算出的 $1/\Lambda$ 是否就是严格级数解(1)的收敛半径,自然也就令人怀疑了.

文献[3]提出的计算 Λ 的方法,特别是公式(3),是否正确呢? 这就是本文企图探讨的问题.

二、一般公式

在临界温度 T_c 附近,把 Eliashberg 方程线性化,并写成如下形式^[5,6]:

$$G_i \bar{\Delta}_i = \sum_{j=0}^N (\lambda_{i-j} + \lambda_{i+j+1}) \bar{\Delta}_j - 2\mu^* \sum_{j=0}^{j_c} \bar{\Delta}_j, \quad 0 \leq i \leq N, \quad (6)$$

其中

$$G_i = 2i + 1 + \lambda + 2(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_j), \quad (7)$$

$$\lambda_l = \lambda \int_0^{\omega_{ph}} d\omega g(\omega) \frac{\omega^2}{\omega^2 + l^2 (2\pi T_c)^2}, \quad (8)$$

$\bar{\Delta}_i$ 是在 Matsubara 表象中适当定义的能隙函数, μ^* 是库仑赝势. 它的数值依赖截止频率 ω_c 的选取^[3,6]. 根据文献[3]说明的理由,我们把 ω_c 取为 $10(\langle \omega^2 \rangle)^{\frac{1}{2}}$, 即

$$\omega_c = 10\bar{\omega}_2. \quad (9)$$

相应的 $\mu^*(\omega_c)$ 和隧道实验定出的 μ^* 值相符. j_c 是由下式确定的整数^[6]:

$$\omega_c < (2j_c + 1)\pi T_c < \omega_c + 2\pi T_c. \quad (10)$$

N 也是个整数. 我们应把它取得足够地大. 使由(8)式算出的 T_c 不受 N 选择的影响.

取 $i = 0$, 同时只保留(6)式右边求和中的 $j = 0$ 那一项,得到

$$\int_0^{\omega_{ph}} d\omega g(\omega) \frac{\omega^2}{\omega^2 + (2\pi T_{c1})^2} = \frac{1}{\lambda} (1 + 2\mu^*). \quad (11)$$

利用变换

$$\frac{\omega}{\omega^2 + l^2 \Delta^2} = \frac{1}{2} \int_0^\infty d\xi (e^{-\xi(\omega + i\Delta l)} + e^{-\xi(\omega - i\Delta l)}), \quad (12)$$

把(11)式改写为

$$\int_0^\infty d\xi K(\xi) \cos(2\pi T_{c1} \xi) = \frac{1}{\lambda} (1 + 2\mu^*), \quad (13)$$

式中 $K(\xi)$ 的表示式为

$$K(\xi) = \int_0^{\omega_{ph}} d\omega g(\omega) \omega e^{-\xi\omega}. \quad (14)$$

它具有下列性质:

$$\int_0^\infty d\xi K(\xi) = 1, \quad (15)$$

$$\left. \frac{d^n K(\xi)}{d\xi^n} \right|_{\xi=0} = \langle \omega^{n+1} \rangle. \quad (16)$$

(13)式就是一级近似下, T_c 满足的方程^[5,11]. 顺便指出, 如果用部分积分方法, 并计及(16)式, 由(13)式可直接得出

$$\sum_{l=1}^{\infty} (-)^{l-1} \frac{\langle \omega^{2l} \rangle}{(2\pi T_c)^{2l}} = \frac{1 + 2\mu^*}{\lambda}. \quad (17)$$

把此式反解, 立刻获得一级近似 T_c 级数解(2)式.

我们希望从 Eliashberg 方程(6)导出一个同(13)式相仿的, 但是是严格的, T_c 满足的方程. 为了这个目的, 先利用(12)式把(8)式改写为

$$\lambda_l = \lambda \int_0^\infty d\xi K(\xi) \cos(2\pi l T_c \xi); \quad (18)$$

然后把它代入(6)式, 并用 $\bar{\Delta}_i$ 乘其两端, 对 i 求和, 得到

$$2\lambda \int_0^\infty d\xi K(\xi) \cos^2(\pi T_c \xi) C(\xi, \lambda, \mu^*) - 2\mu^* C_0(\lambda, \mu^*) = (1 + \lambda) B(\lambda, \mu^*), \quad (19)$$

式中

$$B(\lambda, \mu^*) = \sum_{j=0}^N \frac{1}{1 + \lambda} G_j \bar{\Delta}_j^2, \quad (20)$$

$$C(\xi, \lambda, \mu^*) = \left[\sum_{j=0}^N \frac{\cos[(2j+1)\pi T_c \xi]}{\cos(\pi T_c \xi)} \bar{\Delta}_j \right]^2, \quad (21)$$

$$C_0(\lambda, \mu^*) = \left(\sum_{j=0}^N \bar{\Delta}_j \right) \left(\sum_{j=0}^{i_c} \bar{\Delta}_j \right). \quad (22)$$

引入

$$\bar{C}_\beta(\lambda, \mu^*) = \frac{\int_0^\infty d\xi K(\xi) \cos^2(\pi T_c \xi) C(\xi, \lambda, \mu^*)}{\int_0^\infty d\xi K(\xi) \cos^2(\pi \beta T_c \xi)}, \quad (23)$$

代入(19)式, 并作适当地变换, 得到如下的 T_c 满足的方程:

$$\int_0^\infty d\xi K(\xi) \cos(2\pi \beta T_c \xi) = \frac{1}{\lambda} (I(\lambda, \mu^*) + Z(\lambda, \mu^*) \mu^*), \quad (24)$$

其中

$$I(\lambda, \mu^*) = L(\lambda, \mu^*) - \lambda, \quad (25)$$

$$L(\lambda, \mu^*) = (1 + \lambda) \frac{B(\lambda, \mu^*)}{\bar{C}_\beta(\lambda, \mu^*)}, \quad (26)$$

$$Z(\lambda, \mu^*) = \frac{2C_0(\lambda, \mu^*)}{\bar{C}_\beta(\lambda, \mu^*)}. \quad (27)$$

注意到, 方程(24)中的参量 β 是通过定义(23)式引进的. 到现在为止, 它的数值是完全任意的. 这提供了一个可能, 使得我们可适当地选择 β 的数值, 让 $I(\lambda, \mu^*)$ 尽可能的简单.

同样, 用部分积分方法, 由(24)式得到下面按 $1/\bar{\lambda}$ 展开的 T_c 级数:

$$(2\pi\beta T_c)^{-2} = \frac{1}{\bar{\lambda}\langle\omega^2\rangle} \left\{ 1 + \frac{1}{\bar{\lambda}} \frac{\langle\omega^4\rangle}{\langle\omega^2\rangle^2} + \frac{1}{\bar{\lambda}^2} \left(2 \frac{\langle\omega^4\rangle^2}{\langle\omega^2\rangle^4} - \frac{\langle\omega^6\rangle}{\langle\omega^2\rangle^3} \right) + \dots \right\}, \quad (28)$$

其中 $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}(\lambda, \mu^*)$ 的表示式为

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{I(\lambda, \mu^*) + Z(\lambda, \mu^*)\mu^*}. \quad (29)$$

如果令 $\bar{\lambda} = \lambda$, (28)式右边的级数就是一级近似 T_c 公式. 而后者的收敛半径为 $1/\Lambda_1$, 所以级数(28)式的收敛半径 $1/\bar{\Lambda}$ 应当也是 $1/\Lambda_1$, 即

$$\bar{\Lambda} = \Lambda_1. \quad (30)$$

注意到, 从严格的定 T_c 的方程(24)得到(28)式时, 没有作任何近似, 所以如果把(28)式表示为 $1/\lambda$ 的幂级数, 它应当就是严格的 T_c 级数解(1)式. 考虑到这个事实, 由(29)和(30)式立刻得出, T_c 公式(1)的收敛半径 $1/\Lambda$ 应是下方程的解:

$$\frac{\Lambda}{I(\Lambda, \mu^*) + Z(\Lambda, \mu^*)\mu^*} = \Lambda_1. \quad (31)$$

如果知道了函数 $I(\Lambda, \mu^*)$ 和 $Z(\Lambda, \mu^*)$, 由此式解出 Λ , 便不是一件困难的事.

三、函数 $L(\lambda, \mu^*)$ 和 $Z(\lambda, \mu^*)$

我们用数值计算方法来研究函数 $L(\lambda, \mu^*) = I(\lambda, \mu^*) - \lambda$ 和 $Z(\lambda, \mu^*)$ 是怎样依赖 λ , μ^* 和有效声子谱谱形的. 数值计算的步骤如下: 1) 选定一个 $g(\omega)$. 2) 给定 T_c 和 μ^* , 用反迭代法从 Eliashberg 方程(6)解出相应的 λ 和 $\bar{\Delta}_i$ ^[7]. 当 $j_c \leq 64$ 时, 取 $N = 64$ ^[5]. 如果 j_c 超过 64, 则取 $N = j_c$. 3) 由(20)–(23)式算出 $B(\lambda, \mu^*)$, $\bar{C}_\beta(\lambda, \mu^*)$ 和 $C_0(\lambda, \mu^*)$. 4) 把它们代入(26)和(27)式, 算出 $L(\lambda, \mu^*)$ 和 $Z(\lambda, \mu^*)$. 考虑到实际超导体 μ^* 的取值范围, 把 μ^* 限制在 0 和 0.2 之间. 至于 $g(\omega) = \frac{2}{\lambda\omega} \alpha^2 F(\omega)$, 除了

Rowell, McMillan 和 Dynes 表^[8]中列出的十种超导体的 $\alpha^2 F(\omega)$ 数据外, 还用了 Moore 以及 Leslie 等人定出的 InSn 合金、非晶和无序材料的数据^[9,10].

计算结果表明, 在 λ 和 μ^* 一定时, 用不同 $g(\omega)$ 算出的结果均近似相等. 换句话说, $L(\lambda, \mu^*)$ 不依赖谱形, 仅仅依赖 λ 和 μ^* .

图 1 中标出了当 $\mu^* = 0$ 时, 用 Hg 谱、Pb 谱、非晶态 Ga 谱和非晶态 Bi 谱算出的 $L(\lambda, 0)$ 数据. 在 λ 超过 0.6 的区域中, 它们都几乎是位于同一条直线上. 我们用不同 β 值进行了计算, 发现直线的截距 α 依赖 β 的大小. 如果在 $\mu^* = 0$ 时, 从 T_c 公式(28)的第一项便直接得出 $T_c = 0.1827\sqrt{\lambda\langle\omega^2\rangle}$ 渐近结果^[5,31]. 我们应调节 β 使得相应的 α 满足下式:

$$\beta = \frac{0.871}{\sqrt{\alpha}}. \quad (32)$$

经过调试后,取 $\beta = 1.097$. 相应的 α 等于 0.63. 此时,直线的方程为

$$L(\lambda, 0) = 0.63 + \lambda. \quad (33)$$

图 1 中的数据就是在 β 取 1.097 时计算得到的. 图中的直线是按(33)式画的.

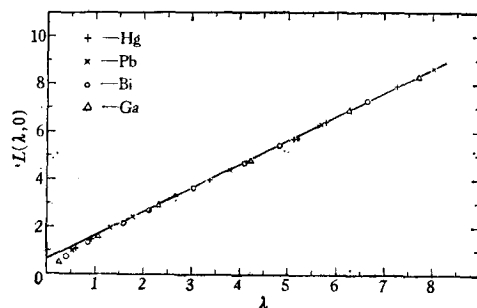


图 1

在 $\mu^* \approx 0$ 情形,选取 β 使得 $L(\lambda, \mu^*)$ 近似地不依赖 μ^* , 因而(33)式仍然成立, 即

$$L(\lambda, \mu^*) = 0.63 + \lambda. \quad (34)$$

经过调试后,取

$$\beta = \frac{0.871}{\sqrt{0.63 + 1.1\mu^*}}. \quad (35)$$

用此 β 值的部分计算结果见图 2. 在此图中,我们画出了用 Hg 谱计算出的 $L(\lambda, \mu^*)$ 数值. 图中直线的方程就是(34)式. 从图 2 可看出,在 $\lambda > 0.6$ 区域,数值计算结果可近似地用(34)式表示出来.

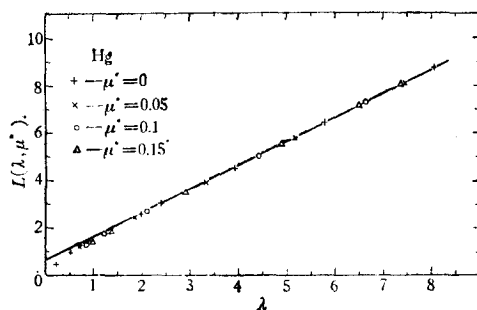


图 2

表 1 中列出了数值计算出的 $Z(\lambda, \mu^*)$ 值. 考虑到,在(31)式中, $Z(\lambda, \mu^*)$ 是出现在 μ^* 前的因子,而 μ^* 的数量级仅及 0.1, 何况由隧道实验定出的 μ^* 值,精度可能不会比 10—20% 更好,所以 $Z(\lambda, \mu^*)$ 只需准至一位有效数字. 在此精度下, $Z(\lambda, \mu^*)$ 可近似地用下式表示:

$$Z(\lambda, \mu^*) = 3 \left(1 - \frac{2}{\lambda} \mu^* \right). \quad (36)$$

此式适用于 $\lambda > 0.6$ 区域. 用此式算出的 $Z(\lambda, \mu^*)$ 值见表 1.

表 1

Hg									Ga								
$\mu^* = 0.05$			$\mu^* = 0.1$			$\mu^* = 0.15$			$\mu^* = 0.05$			$\mu^* = 0.1$			$\mu^* = 0.15$		
λ	$Z(\lambda, \mu^*)$		λ	$Z(\lambda, \mu^*)$		λ	$Z(\lambda, \mu^*)$		λ	$Z(\lambda, \mu^*)$		λ	$Z(\lambda, \mu^*)$		λ	$Z(\lambda, \mu^*)$	
	数值	(36)		数值	(36)		数值	(36)		数值	(36)		数值	(36)		数值	(36)
	计算	式		计算	式		计算	式		计算	式		计算	式		计算	式
5.19	3.2	2.9	5.11	3.1	2.9	4.91	2.8	2.8	5.30	3.3	2.9	5.06	3.1	2.9	5.15	3.0	2.8
2.80	3.1	2.9	3.18	2.9	2.8	2.91	2.6	2.7	3.02	3.2	2.9	3.06	3.0	2.8	3.02	2.7	2.7
1.86	3.0	2.8	2.12	2.7	2.7	1.83	2.4	2.5	2.09	3.2	2.9	2.06	2.8	2.7	1.95	2.5	2.5
1.45	2.9	2.8	1.65	2.6	2.6	1.36	2.3	2.4	1.53	3.1	2.8	1.44	2.7	2.6	1.61	2.4	2.4
0.728	2.7	2.6	0.836	2.3	2.3	0.931	2.0	2.0	0.996	2.9	2.7	1.15	2.6	2.5	1.28	2.3	2.3

四、收敛半径

上一节的分析表明,在 $\lambda > 0.6$ 的区域中, $L(\lambda, \mu^*)$ 和 $Z(\lambda, \mu^*)$ 可近似地用 (34) 和 (36) 式表示. 把它们代入 (31) 式, 并注意到 $I(\lambda, \mu^*) = L(\lambda, \mu^*) - \lambda$, 得到

$$A = (0.63 + 3\mu^+(A))A_1, \quad (37)$$

式中

$$\mu^+(A) = \mu^* \left(1 - \frac{2}{A} \mu^* \right). \quad (38)$$

由于 μ^+ 和 μ^* 近似相等, 所以在一级近似下, 把 (39) 式右边的 $\mu^+(A)$ 直接用 μ^* 替代. 这样算出的 A 叫做 $A^{(0)}$. 它等于

$$A^{(0)} = (0.63 + 3\mu^*)A_1. \quad (39)$$

表 2

材 料	λ	μ^*	A_1	$A^{(0)}$	A	材 料	λ	μ^*	A_1	$A^{(0)}$	A
Hg ^[8]	1.6	0.11	5.38	5.2	5.1	In _{0.79} Sn _{0.21} ^[9]	1.16	0.121	1.56	1.6	1.5
Pb ^[8]	1.55	0.131	1.21	1.2	1.1	In _{0.75} Sn _{0.25} ^[9]	1.16	0.108	1.59	1.5	1.4
Tl ^[8]	0.795	0.135	1.48	1.5	1.4	In _{0.20} Sn _{0.80} ^[9]	0.939	0.144	1.41	1.6	1.5
Pb _{0.6} Tl _{0.4} ^[8]	1.38	0.126	1.37	1.4	1.3	In _{0.16} Sn _{0.84} ^[9]	0.940	0.146	1.50	1.6	1.5
Pb _{0.4} Tl _{0.6} ^[8]	1.15	0.113	1.46	1.4	1.3	In _{0.14} Sn _{0.86} ^[9]	1.07	0.163	1.28	1.4	1.3
Pb _{0.9} Bi _{0.1} ^[8]	1.66	0.095	1.37	1.3	1.2	In _{0.05} Sn _{0.95} ^[9]	0.838	0.140	1.18	1.2	1.1
Sn ^[9]	0.862	0.158	1.18	1.3	1.2	Bi (非晶) ^[10]	2.46	0.105	2.96	2.8	2.7
In ^[9]	0.853	0.140	1.42	1.5	1.4	Ga (非晶) ^[10]	2.25	0.17	2.91	3.3	3.2
Ta ^[8]	0.69	0.111	1	0.96	0.88	Pb (无序) ^[10]	2.11	0.17	1.77	2.0	1.9
Pb _{0.6} Bi _{0.2} Tl _{0.2} ^[8]	1.81	0.137	1.37	1.4	1.3	Pb _{0.75} Bi _{0.25} (非晶) ^[10]	2.76	0.14	2.22	2.3	2.2
In _{0.95} Sn _{0.05} ^[9]	0.845	0.122	1.41	1.4	1.3	Pb _{0.5} Bi _{0.5} (非晶) ^[10]	3.00	0.14	2.48	2.6	2.5
In _{0.91} Sn _{0.09} ^[9]	0.932	0.137	1.48	1.5	1.4	Pb _{0.25} Bi _{0.75} (非晶) ^[10]	2.78	0.12	2.53	2.5	2.4
In _{0.83} Sn _{0.17} ^[9]	1.04	0.102	1.50	1.4	1.3						

再把(38)式右边的 Λ 用 $\Lambda^{(0)}$ 替代,得到下面的计算 Λ 的公式:

$$\Lambda = \left[0.63 + 3\mu^* \left(1 - \frac{2}{\Lambda^{(0)}} \mu^* \right) \right] \Lambda_1. \quad (40)$$

计算一级近似 T_c 级数解的收敛半径 $1/\Lambda_1$ 的原理和方法,已在文献[2,3]中详细讨论过.当时,计算 Λ_1 所需要的有效声子谱数据是把文献上刊载的曲线放大、读数得到的.现在,我们直接采用隧道实验定出的有效声子谱数据^[8-10]重新计算 Λ_1 . 代入(39)和(40)式,算出 $\Lambda^{(0)}$ 和 Λ . 计算结果列在表 2 中¹⁾.

用本文的公式算出的 Λ 只有一位有效数字,第二位和真实数值的偏差估计最大可达 ± 2 . 在此精度内, $\Lambda^{(0)}$ 和 Λ 实际上是相等的,因而用(39)式计算 Λ 便可以了. 除了系数略有差别外,(39)式就是公式(3). 这样,我们就证明了作者之一及其合作者在文献[3]中提出的计算 Λ 方法是正确的.

参 考 文 献

- [1] 吴杭生、蔡建华、龚昌德、吉光达、蔡俊道,物理学报, **26** (1977), 509.
- [2] 龚昌德、吴杭生、蔡建华、蔡俊道、吉光达,物理学报, **27** (1978), 85.
- [3] 蔡俊道、吉光达、吴杭生、蔡建华、龚昌德,物理学报, **28** (1979), 394.
- [4] 吴杭生、吉光达,物理学报, **27** (1978), 746.
- [5] P. B. Allen and R. C. Dynes, *Phys. Rev.*, **B12**(1975), 905.
- [6] C. R. Leavens, *Solid State Commun.*, **15**(1974), 1529.
- [7] P. B. Allen, Technical Report, No. 7, TCM Group, Cavendish Laboratory (unpublished).
- [8] J. M. Rowell, W. L. McMillan and R. C. Dynes, A Tabulation of the Electron-phonon Interaction in Superconducting Metals and Alloys, Part I.
- [9] E. L. Moore, In, Sn 及 InSn 合金的 $\alpha^2F(\omega)$ 数据.
- [10] J. D. Leslie 等,非晶态和无序超导体 Ga, Bi, Pb 及 PbBi 合金的 $\alpha^2F(\omega)$ 数据.

THE PROBLEM OF THE CONVERGENCE RADIUS OF THE T_c SERIES SOLUTION

ZHOU ZI-FANG WU HANG-SHENG

MAO DE-QIANG GU YI-MING

(University of Science and Technology of China)

ABSTRACT

Based on the Eliashberg equation, a formula for calculating the convergence radius Λ^{-1} of the T_c series solution is proved. Practically, it is identical with that which was conjectured in a previous paper by one of the authors and his co-workers. Therefore, the method for calculating Λ suggested by them is justified.

1) 表 2 中的数据一部分是由张锡祥和王仲炎计算出的.