

研究简报

扭摆——探测低频引力波的一种可能的天线¹⁾

郑庆璋 崔世治

(中山大学物理系)

1979 年 7 月 28 日收到

提 要

本文研究了扭摆对引力波的响应和吸收截面,并对有关的问题进行了讨论,指出它可以作为探测低频引力波的机械共振天线。

一、引 言

某些天体物理过程,如双星和脉冲星的旋转,辐射出比较低频的引力波^[1-3]。目前世界上使用的引力波天线大多是韦伯型机械共振天线^[3]。这类天线属于机械 1 型天线^[4],它的本征频率与天线长度的一次方成反比,要达到 10^3Hz 以下是比较困难的。即使是与天线线度平方成反比的 2 型天线,其频率要达到 10Hz 以下也是不容易的。为了获得更低的共振频率,有人提出过使用双单摆的系统^[5,6]。这种系统要达到 1Hz 以下的共振频率是不困难的。但至今未看到这方面的实际工作报告。

本文研究了扭摆对引力波的响应,计算了它的吸收截面和共振频率。指出韦伯天线实际上也可用作扭摆天线。在不影响原来探测计划的前提下,只需附加小量设备,即能同时用作探测 $1-0.1\text{Hz}$ 范围内引力波的装置。

二、扭摆的简正振动

一个简单的例子是哑铃状扭摆,它由无质量的细棒及两端固联的重小球构成,中间由一根上端固定的弹性杆悬挂着(见图 1)。这类扭摆的运动,在不少讨论振动问题的教科书中都有分析。这里我们着重研究韦伯棒的扭摆式振动。

为简单起见,假定悬挂韦伯棒的绳子是理想柔软的,扭摆的恢复力矩仅由棒的重心升高而引起。(因为棒的质量以吨计,这个假定看来是合理的。)

设天线的质量为 M , 半径为 R , 悬线的长度为 l 。以天线质心的平衡位置 G 为坐标原点,天线的对称轴为 x_1 轴,而令 x_3 轴铅直指向上(见图 2)。当天线偏离平衡位置扭过

1) 本文曾在 1979 年 11 月中国引力与相对论天体物理学会第一届代表大会上报告。

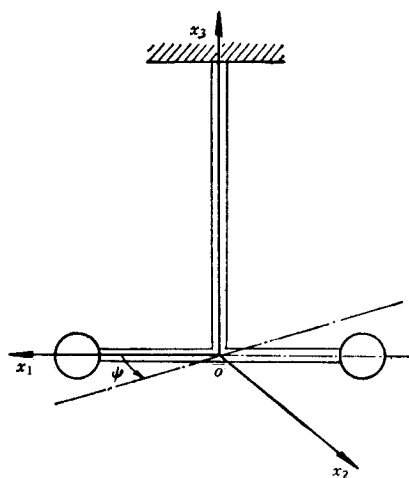


图1 “哑铃状”扭摆

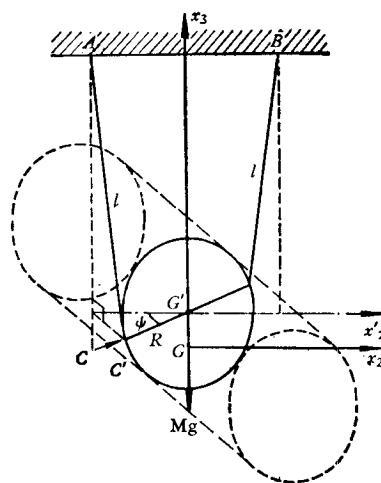


图2 韦伯棒的扭摆式振动

一角度 ψ 时, 质心 G 上升到 G' 处, 其坐标为

$$x_{G1} = x_{G2} = 0, \quad x_{G3} = l - \sqrt{l^2 - (2R \sin \psi/2)^2} \approx \frac{R\psi^2}{2l}.$$

系统的拉格朗日量为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} M \dot{x}_{G3}^2 + \frac{1}{2} J_{33} \dot{\psi}^2 - M g x_{G3} = \frac{M R^4}{2 l^2} \dot{\psi}^2 \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} J_{33} \dot{\psi}^2 - \frac{M g R^2}{2 l} \psi^2,$$

式中 $J_{33} = \frac{1}{12} M (L^2 + 3R^2)$ 为天线对 x_3 轴的转动惯量. 由于 ψ 和 $\dot{\psi}$ 都是微量, $\mathcal{L}$ 中第

一项可略去, 由拉格朗日方程得 $J_{33} \ddot{\psi} + \frac{M g R^2}{l} \psi = 0$. 由此解得 $\psi = \psi_0 e^{-i\omega_0 t}$, 其中 ψ_0 为复数振幅, ω_0 为扭摆的本征角频率,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{M g R^2}{l J_{33}}} = \sqrt{\frac{12 g}{l \left[\left(\frac{L}{R} \right)^2 + 3 \right]}}. \quad (1)$$

天线上任一点 $P(x_1, x_2, x_3)$ 的位移由图 3 易见为

$$\xi = \psi \mathbf{e}_3 \times \mathbf{r} = (-x_2 \mathbf{e}_1 + x_1 \mathbf{e}_2) \psi = (W_1 \mathbf{e}_1 + W_2 \mathbf{e}_2) \psi_0 e^{-i\omega_0 t},$$

式中的 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 分别为 x_1, x_2, x_3 方向的单位矢量. 由此可见, 简正振幅为

$$W_1 = -x_2, \quad W_2 = x_1, \quad W_3 = 0. \quad (2)$$

三、扭摆对引力波的响应

按引力波的机械探测理论^[2,3,7-9], 张量引力波具有两种偏振状态. 沿 x_3 轴方向传播的引力波, 两种偏振状态的力线如图 4 所示. 对称轴沿着 x_1 轴方向放置的韦伯棒, 在引力波作用下会经受伸缩或以 x_3 为转轴的摆动

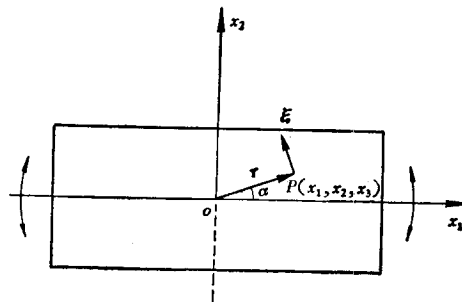


图3 韦伯棒上各点的扭动位移

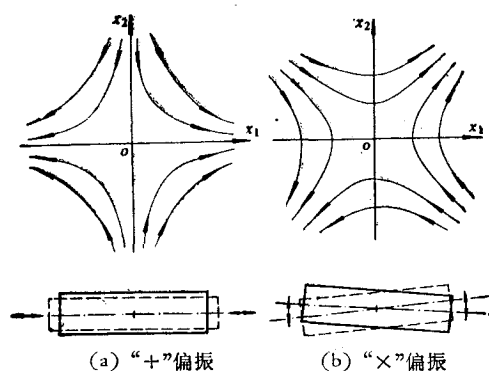


图4 引力波的偏振状态

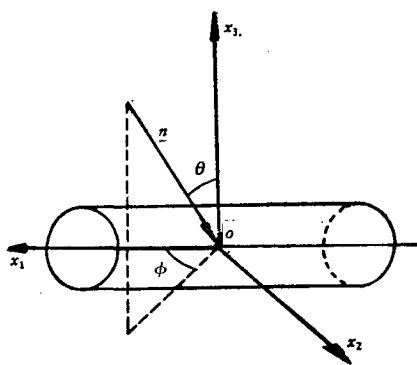


图5 引力波入射方向与扭摆取向关系图

效应.

一般地说,如果天线的质量为 M , 第 n 模的角频率为 ω_n , 品质因子为 Q_n (弛豫时间 $\tau_n = Q_n/\omega_n$), 则在能流密度为 S 的连续引力波作用下, 天线共振时达到的稳定能量显然是 $E = \sigma_n(\omega_n) S \tau_n$, 即天线的共振吸收截面为

$$\sigma_n(\omega_n) = \frac{E \omega_n}{S Q_n}.$$

利用文献[9]的(23)式,可化为

$$\sigma_n(\omega_n) = \frac{2\pi G}{5c^3} M \omega_n Q_n A_{Gn} f_n(\theta, \phi) \gamma, \quad (3)$$

式中 G 为引力常数, c 为真空中光速, γ 表征引力波的偏振态与天线取向的相配合程度; 对于偏振无规分布的引力波, $\gamma = 1/2$. A_{Gn} 为天线第 n 模的有效面积, 且

$$A_{Gn} = \frac{2 \sum_{\alpha\beta} q_{n\alpha\beta}^2}{M \int \rho \sum_{\alpha} W_{n\alpha}^2 dV}, \quad (4)$$

式中 ρ 为天线的质量密度, dV 为天线体积元, 而

$$q_{n\alpha\beta} = \int \rho \left(W_{n\alpha} x_\beta + W_{n\beta} x_\alpha - \frac{2}{3} \delta_{\alpha\beta} \sum_{\sigma} W_{n\sigma} x_\sigma \right) dV \quad (5)$$

为天线的动态四极矩; $W_{n\alpha}$ 是天线第 n 模的简正振幅的 α 分量; α, β, σ 取值为 1, 2, 3, 是空间坐标的脚标. 在(3)式中,

$$f(\theta, \phi) = \frac{\frac{1}{4} \left(\sum_{\alpha,\beta} q_{n\alpha\beta} n_\alpha n_\beta \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} q_{n\alpha\beta} q_{n\alpha\beta} - \sum_{\alpha,\beta,\sigma} q_{n\alpha\beta} q_{n\alpha\sigma} n_\beta n_\sigma}{\frac{1}{5} \sum_{\alpha,\beta} q_{n\alpha\beta} q_{n\alpha\beta}} \quad (6)$$

称为天线对于沿 $\mathbf{n}(n_1, n_2, n_3)$ 方向传播的引力波(相对于天线以极角 θ 和方位角 ϕ 表征)响应的指向性函数; 它对全空间积分为 4π , 即对所有方向的平均值为 1.

为了计算韦伯棒作为扭摆时对引力波的响应, 把(2)式代入(5)式, 易得

$$q_{12} = q_{21} = \frac{M}{4} \left(\frac{1}{3} L^2 - R^2 \right), \quad (\text{其余的 } q_{\alpha\beta} = 0). \quad (7)$$

(这里和下面略去了脚标 n , 它现在无关紧要.) 把(7)和(2)式代入(4)式中, 得

$$A_G = \frac{\left(\frac{1}{3} L^2 - R^2\right)^2}{\frac{1}{3} L^2 + R^2}. \quad (8)$$

若入射波方向为 $\mathbf{n}$: $n_1 = -\sin\theta \cos\phi$, $n_2 = -\sin\theta \sin\phi$, $n_3 = -\cos\theta$ (见图5), 则得指向性函数

$$f(\theta, \phi) = \frac{5}{2} \left(1 - \sin^2\theta + \frac{1}{4} \sin^4\theta \sin^2 2\phi \right). \quad (9)$$

由此可见, 当引力波沿 x_3 轴入射 ($\theta = 0$) 时, $f = 5/2$ 达到极大值; 而当引力波沿 x_1 或 x_2 轴入射 ($\theta = \pi/2$, $\phi = 0$ 或 $\pi/2$) 时, $f = 0$. 这是理所当然的. 又由(9)式, 有

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi f(\theta, \phi) \sin\theta d\theta = 1,$$

即指向性函数在所有方向上的平均值确为 1.

最后, 把上述结果代入(3)式, 就得到韦伯天线作为扭摆时的共振吸收截面为

$$\sigma(\omega_0) = \frac{2\pi G}{5c^3} M \omega_0 Q_0 \frac{\left(\frac{1}{3} L^2 - R^2\right)^2}{\frac{1}{3} L^2 + R^2} f(\theta, \phi) \gamma. \quad (10)$$

而对于偏振无规地分布的引力波, 在所有方向上的平均共振吸收截面为

$$\overline{\sigma(\omega_0)} = \frac{\pi G}{5c^3} M \omega_0 Q_0 \frac{\left(\frac{1}{3} L^2 - R^2\right)^2}{\frac{1}{3} L^2 + R^2}. \quad (11)$$

此外, 对于如图1的哑铃状扭摆, 类似的计算得

$$\overline{\sigma(\omega_0)} = \frac{\pi G}{5c^3} M \omega_0 Q_0 L^2. \quad (12)$$

而指向性函数与(9)式同.

四、讨 论

1) 由(1)式可见, 利用韦伯棒作扭摆天线, 可以获得较低的共振频率. 以韦伯天线的典型数据 $L = 153\text{cm}$, $R = 33\text{cm}$; 以及 $g = 980\text{cm/sec}^2$, $l = 100\text{cm}$ 代入(1)式, 得

$$\omega_0 = 2.19\text{sec}^{-1}, \quad \nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 0.35\text{Hz}.$$

事实上, 在获得较低共振频率方面, 扭摆比单摆更为有利. 众所周知, 单摆的本征角频率为 $\omega'_0 = \sqrt{g/l}$, 与(1)式比较易见, 扭摆的本征角频率为 $\omega_0 = \omega'_0 \sqrt{12/[(L/R)^2 + 3]}$, 只要 $L/R > 3$, 就有 $\omega_0 < \omega'_0$. 实际上, 天线长度与直径之比 $L/2R = 10$ 甚或更大一些也是可行的. 在这种情况下, $\omega_0 \leq 0.17\omega'_0$.

2) 扭摆天线的另一优点是容易改变本征频率. 由(1)式可见, 通过改变悬线的长度

l , 可以在一定范围内改变 ω_0 , 从而达到调谐的目的.

3) 由(11)式可见, 除了 $\omega_0 Q_0$ 不同以外, 作为扭摆的韦伯棒, 其吸收截面同通常的工作在纵基模的韦伯棒在数量级上是一致的¹⁾.

由于扭摆的 ω_0 比纵基模的低四个数量级, 故即使 Q_0 相同, $\overline{\sigma(\omega_0)}$ 也要降低四个数量级, 这是一切低频的引力波天线共有的不利因素. 然而, 如果天线在引力波作用下能建立起稳定振动, 而所探测的又是与稳定振动能量相关联的物理量, 则又当别论. [见下面第 5) 点.]

4) 至于韦伯棒作为扭摆天线的 Q 值问题, 我们作过一些粗略的估计. 发现, 在高真空(如 10^{-5} — 10^{-6} torr) 的环境中, 残余空气对 Q 值的影响可以忽略. 此时决定的因素是悬线与铝棒的相对滑动摩擦和悬线(特别是多股绞索)的内耗. 若采用适当形状的材料(例如石英扁带)作悬线, 用适当的悬挂方式尽量减小相对滑动, 则韦伯型扭摆天线的 Q 值有可能达到甚至超过同一纵基模天线的 Q 值^[5,6].

不过, 过大的 Q 值也带来一些问题. 因为天线振动的弛豫时间 $\tau_0 = Q_0/\omega_0$ 在低频下会变得很长. 例如, 若 $Q_0 = 10^5$, $\omega_0 = 1 \text{ sec}^{-1}$, 则 $\tau_0 = 10^5 \text{ sec}$. 这样长的 τ_0 下, 由于地球的自转, 任何天体源都不能视作稳定的源. 这个矛盾可能是对所有低频共振天线都存在的, 如何正确处理, 有待进一步考虑.

5) 当天线共振达到稳定时, 它的最大振动动能为

$$\frac{1}{2} J_{33} (\dot{\phi}_{\max})^2 = E = \overline{\sigma(\omega_0)} S \cdot \tau_0 = \frac{\overline{\sigma(\omega_0)} Q_0 S}{\omega_0}.$$

注意式中 E 与 ω_0 成反比, 这在一定意义上抵销了低频天线共振吸收截面随频率下降的不利因素. 倘若我们测量稳定振动下天线末端的位移, 由于

$$\dot{\phi} = -i\omega_0 \phi_0 e^{-i\omega_0 t}, \quad (\dot{\phi}_{\max})^2 = \omega_0^2 \phi_0^2 = \omega_0^2 \left(\frac{\xi_{\max}}{\frac{1}{2}L} \right)^2,$$

故扭摆天线末端的最大位移 $\xi_{\max}$ 满足如下方程:

$$\xi_{\max}^2 = \frac{2\overline{\sigma(\omega_0)} Q_0 (L/2)^2}{J_{33} \omega_0^3}.$$

以 $J_{33} = \frac{1}{12} M(L^2 + 3R^2)$ 及(11)式代入, 最后得

$$\xi_{\max}^2 = \frac{2\pi G}{5c^3} M L^2 \left(\frac{Q_0}{\omega_0} \right)^2 \left(\frac{\frac{1}{3} L^2 - R^2}{\frac{1}{3} L^2 + R^2} \right)^2 \cdot S. \quad (13)$$

由此可见, 联系到某些可观测的物理量(如天线中的最大位移), 低频天线的灵敏度可能并不亚于高频天线.

6) 利用激光干涉仪能测量小至 $10^{-4} \text{ \AA}$ 的微小位移^[10]. 若在(13)式中令 $\xi_{\max} =$

1) 以韦伯天线的数据代入(11)式, 得 $\overline{\sigma(\omega_0)} = 1.13 \times 10^{-29} (\omega_0 Q_0) \text{ cm}^2$. 如果用纵基模的数据: $\omega_0 = 2\pi \times 1660 \text{ Hz}$, $Q_0 = 2 \times 10^5$, 则 $\overline{\sigma(\omega_0)} = 2.36 \times 10^{-20} \text{ cm}^2$. 这与文献[1]的(37.23)式, 即 $\sigma_{\text{weber}} \approx 3 \times 10^{-20} \text{ cm}^2$ 一致.

$10^{-4} \text{ \AA}$; 并假定 $Q_0/\omega_0 = 10^5 \text{ Hz}^{-1}$; 又用韦伯天线的数据 $L = 153 \text{ cm}$, $R = 33 \text{ cm}$, $M = 1.44 \times 10^6 \text{ g}$, 则相应的入射引力波能流密度为 $S_{\min} = 1.68 \times 10^{-6} \text{ erg} \cdot (\text{cm}^2 \cdot \text{sec})^{-1}$.

应该指出, 上述 $S_{\min}$ 还不是天线灵敏度的量度, 因为这里暂未考虑噪声.

7) 可以在韦伯天线的两端贴上一对反射镜, 利用激光干涉仪^[10]监视天线的摆动. 这样既不影响原探测计划, 又可多加一项低频探测项目. 一种可能的附加装置如图 6 所示.

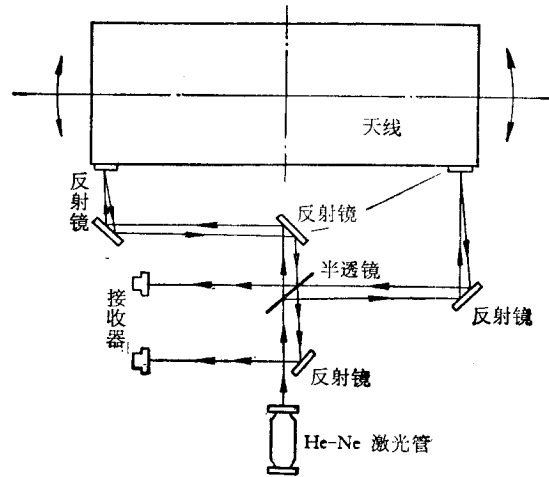


图 6 利用激光干涉仪监视扭摆天线的振动示意图

参 考 文 献

- [1] C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, *Gravitation* (Freeman, San Francisco, 1973), Box 36.3.
- [2] G. Pizzella, *Nuovo Cimento*, **5**(1975), 369.
- [3] G. Papini, *Can. J. Phys.*, **52**(1974), 880.
- [4] D. H. Douglass and J. A. Tyson, *Nature*, **229**(1971), 34.
- [5] V. B. Braginskii, *Sov. Phys.-JETP*, **26**(1968), 831.
- [6] V. B. Braginskii and V. N. Rudenko, *Sov. Phys.-Usp.*, **13**(1970), 165.
- [7] J. Weber, *General Relativity and Gravitational Waves*, Interscience, New York (1961).
- [8] *ibid.* [1], Chap. 35, 36, 37.
- [9] H. Hirakawa *et al.*, *J. Phys. Soc. Jap.*, **41**(1976), 1093.
- [10] G. E. Moss *et al.*, *Appl. Opt.*, **10**(1971), 2495.

TORSIONAL PENDULUM — A POSSIBLE ANTENNA FOR DETECTING LOW FREQUENCY GRAVI- TATIONAL WAVES

ZHENG QING-ZHANG CUI SHI-ZHI

(Department of Physics, Zhongshan University)

ABSTRACT

In this article, we have studied the response and the cross section of a torsional pendulum to gravitational waves, and discussed some related problems. This article shows that the pendulum can be taken as a mechanical resonance antenna for detecting low frequency gravitational waves.