

随机磁场中的动力学方程

夏蒙芬 胡慧玲

(北京大学物理系)

1979年12月25日收到

提 要

本文讨论了随机磁场中的等离子体的关联与随机性质,导出了关联函数与动力学方程。在此基础上给出了输运方程,并讨论了输运现象的若干特征。

一、引 言

近来,随机磁场问题颇引人注目^[1-3]。因为在托卡马克中由于磁岛重迭可出现随机磁场,而这可能是托卡马克中反常输运现象的主要起因之一。

在文献[3]中,从随机磁场中的动力学方程出发,讨论了等离子体在随机磁场中的行为。

由于动力学方程对描写等离子体的行为有基本的重要性,本文对此重新进行了研究。我们从随机磁场中的等离子体的一个基本的物理模型出发,引入和计算了描写等离子体在随机磁场中行为的关联函数,导出了动力学方程,对其主要物理特征进行了讨论。我们所得到的方程与文献[3]中给出的方程是不相同的。我们在这个动力学方程的基础上,讨论了等离子体的行为,包括双极电场、杂质输运、热输运以及高能尾的稳态解等问题。

二、物 理 模 型

随机磁场的基本特征是磁力线对其平均方向发生了偏离,这种偏离的时-空变化具有微观的尺度,有一定的关联性,而在宏观上则呈现出随机性的特征。取如下的磁场模型:

$$\mathbf{B} = B_0 \hat{e}_z + \alpha_F(t, \mathbf{r}) B \hat{e}_x, \quad (1)$$

$B_0 \hat{e}_z$ 为平均磁场,假定 B_0 为常数。 B 为总场强。第二项是横向扰动磁场分量, α_F 描述磁力线方向的偏离。在实际条件下,这种偏离一般是很小的,因此这里只讨论 $|\alpha_F| \ll 1$ 的情形。 α_F 在宏观上是随机量。一方面,通过一个宏观点的一束磁力线,其 α_F 值有一定的分布,可假定为高斯分布

$$\phi(\alpha_F) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha_0} e^{-\alpha_F^2/2\alpha_0^2}, \quad (2)$$

α_0 代表平均偏离;另一方面,当粒子沿一条磁力线运动时,其 x 方向的移动具有随机漫步的性质,这可导致横向输运的增强。

假定还存在一个横向电场

$$\mathbf{E} = E(x)\hat{e}_x. \quad (3)$$

例如,随机磁场引起的双极电场,它一般是 x 的函数. 由于随机磁场效应主要联系于粒子的纵向运动,因此只关心这部分运动,其运动方程为

$$dv/dt = a(x)\alpha(t) + c(t), \quad (4)$$

$$dx/dt = v\alpha(t), \quad (5)$$

$$dl/dt = v, \quad (6)$$

l 和 v 为沿磁力线的坐标和速度, x 实际上是漂移中心的坐标. a 是电场引起的加速度

$$a(x) = (ze/m)E(x). \quad (7)$$

z 与 m 是粒子的电荷数(对电子 $z = -1$)和质量. α 是粒子所感受到的 α_F 值:

$$\alpha(t) = \alpha_F(t, \mathbf{r}(t)), \quad (8)$$

式中 $\mathbf{r}(t)$ 代表粒子的位置. $c(t)$ 是碰撞引起的纵向速度变化率,也是一个随机量. 在无碰撞情形时, $c = 0$, 由(4),(5)式可得到 x 与 v 之间的关系

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) - a(x) \frac{dx}{dt} = 0. \quad (9)$$

我们将从宏观的角度进行考察,即研究的是一个粒子系综,这个系综是由 t 时刻处于宏观位置 x 具有速度 v 的粒子所组成的. 在 t 时刻,系综中的粒子按 α 的分布是(2)式给出的分布 $\phi(\alpha)$. 但是,系综中每个粒子均按方程(4)–(6)运动,其 α 值也将按一定的规律变化. 引入两个特征参量描写这种变化规律: 关联长度 L_s 与关联时间 τ_s . 其意义是,对一个确定的粒子而言,在 L_s 以及 τ_s 尺度内, α 近似保持不变;而当达到 L_s 或者 τ_s 尺度时, α 将发生显著的、随机性的变化. L_s 与 τ_s 首先决定于随机磁场的空间结构与时间演化,同时也联系于粒子从一条磁力线向另一条磁力线的随机性迁移. 由于粒子移动一个关联长度也相应于一个特征时间 τ_L , 因此,粒子运动的关联与随机特征可以统一地用一特征关联时间 t_s 描写,

$$t_s \sim \min(\tau_s, \tau_L). \quad (10)$$

下面除个别情形外,主要讨论稳态随机磁场即 $\tau_s \rightarrow \infty$ 而 $t_s = \tau_L$ 的情形.

随机磁场中,粒子系综的行为可以用一系列关联函数描写,其定义为

$$g_1(t_1) = \langle \alpha(t_1) \rangle, \quad g_2(t_1, t_2) = \langle \alpha(t_1) \alpha(t_2) \rangle, \quad (11)$$

等等,其中 $\langle \cdots \rangle$ 代表系综平均. 显然,磁场的随机性的效应主要地是在大于 t_s 的时间尺度上才能表现出来. 因此我们关心的只是大于关联时间的“宏观”时间尺度 Δt 上的平均行为. 事实上,输运问题中起作用的是关联函数的时间积分

$$G_1 = \int_t^{t+\Delta t} g_1(t_1) dt_1, \\ G_2 = \int_t^{t+\Delta t} dt_1 \int_t^{t_1} g_2(t_1, t_2) dt_2, \quad (12)$$

等等. 而为了反映场的随机性,必须使 $\Delta t \gg t_s$.

三、动力学方程

现在来导出由于存在随机磁场而在动力学方程中引起的附加项。先考虑 $|\Delta v/v| \ll 1$ 的情形。 Δv 是在某个 Δt 时间内速度的变化, Δt 的意义是: 我们所考虑的是 Δt 时间尺度上的平均行为。

对于无碰撞的情形, 由粒子的能量方程 (9) 可以看出, v 与 x 的变化之间有确定的关系。粒子系综的演化可以用一转移几率来表示。令 t_0 时刻处于 $x_0 - x_0 + dx_0$, $v_0 - v_0 + dv_0$ 内的粒子到 t 时刻转移到 $x - x + dx$ 的几率为

$$P(x_0, v_0, x - x_0, t - t_0) dx \quad (13)$$

转移到 x 后, v 值的范围 $v - v + dv$ 由 (9) 式决定。

在 t 时刻处于 $x - x + dx$, $v - v + dv$ 内的粒子, 是 t_0 时刻处于各个 $x_0 - x_0 + dx_0$ 区域内并具有相应速度 $v_0 - v_0 + dv_0$ 的粒子以一定几率转移而来的。其中, $v_0 = v_0(x, x_0, v)$ 和 $dv_0 = |(\partial v_0 / \partial v)_{x, x_0}| dv$ 是由 (9) 式决定的。而在 t_0 时刻处于 $x_0 - x_0 + dx_0$ 并且可能转移到 $x - x + dx$, $v - v + dv$ 的粒子数为

$$f(x_0, v_0(x, x_0, v), t_0) dx_0 |(\partial v_0 / \partial v)_{x, x_0}| dv.$$

转移几率为 $P(x_0, v_0(x, x_0, v), x - x_0, t - t_0) dx$ 。对 x_0 积分便得到 t 时刻处于 $x - x + dx$, $v - v + dv$ 内的粒子数 $f(x, v, t) dx dv$ 。于是, 便得到

$$f(x, v, t) = \int dx_0 f(x_0, v_0(x, x_0, v), t - \Delta t) P(x_0, v_0(x, x_0, v), x - x_0, \Delta t) \times |(\partial v_0(x, x_0, v) / \partial v)_{x, x_0}|. \quad (14)$$

将被积函数在 (x, t) 展开, 保留到 Δt 的一级项, 便可得到微分方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} = & \left(\frac{a}{v^2} R_x + \frac{3a^2}{v^4} Q_{xx} - \frac{a'}{v^2} Q_{xx} \right) f - \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{a}{v} \frac{\partial}{\partial v} \right) R_x f \\ & - \frac{2a}{v^2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{a}{v} \frac{\partial}{\partial v} \right) Q_{xx} f + \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{a}{v} \frac{\partial}{\partial v} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{a}{v} \frac{\partial}{\partial v} \right) Q_{xx} f, \end{aligned} \quad (15)$$

式中 $a' = da/dx$ 。假定 $a(x)$ 是平缓函数, 已作了展开。

$$R_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \Delta x \rangle}{\Delta t},$$

$$Q_{xx} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle (\Delta x)^2 \rangle}{2\Delta t}. \quad (16)$$

注意, 此处及下面的 $\Delta t \rightarrow 0$ 都只是宏观意义下的极限, 要求 $\Delta t \gg t_s$ 。

对有碰撞的情形, 可将随机磁场效应和碰撞效应统一地用一个转移几率 $K(x, v, t; \Delta x, \Delta v, \Delta t)$ 表示。得到

$$f(x, v, t) = \iint dx_0 dv_0 f(x_0, v_0, t - \Delta t) K(x_0, v_0, t - \Delta t; x - x_0, v - v_0, \Delta t). \quad (17)$$

将被积函数在 (x, v, t) 展开, 保留到 Δt 的一级项, 有

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} (R_x f) - \frac{\partial}{\partial v} (R_v f) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (Q_{xx} f) + \frac{\partial^2}{\partial v^2} (Q_{vv} f)$$

$$+ 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial v} (Q_{xv} f), \quad (18)$$

式中

$$R_v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle \Delta v \rangle / \Delta t, \quad Q_{vv} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle (\Delta v)^2 \rangle / 2 \Delta t, \quad Q_{xv} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle \Delta x \Delta v \rangle / 2 \Delta t. \quad (19)$$

通常情形一般属于弱碰撞, 即 $L_s/l \ll 1$, l 是平均自由程. 下面只考虑这种弱碰撞情形.

方程(15)与(18)都是由速度及位置变化的一级矩与二级矩表示的, 现在来计算这些量. 由(4), (5)式得

$$\Delta v \simeq \Delta v_c + a(x) \int_t^{t+\Delta t} \alpha(t_1) dt_1 + a'(x)v \int_t^{t+\Delta t} dt_1 \int_t^{t_1} \alpha(t_1) \alpha(t_2) dt_2, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \Delta x \simeq v \int_t^{t+\Delta t} \alpha(t_1) dt_1 + a(x) \int_t^{t+\Delta t} dt_1 \int_t^{t_1} \alpha(t_1) \alpha(t_2) dt_2 \\ + \int_t^{t+\Delta t} dt_1 \int_t^{t_1} \alpha(t_1) c(t_2) dt_2, \end{aligned} \quad (21)$$

式中

$$\Delta v_c = \int_t^{t+\Delta t} c(t_1) dt_1. \quad (22)$$

由(20)–(22)式, 利用(11), (12)式, 可得到

$$\begin{aligned} \langle \Delta x \rangle &= v G_1 + a G_2, \quad \langle \Delta v \rangle = a G_1 + a' v G_2 + \langle \Delta v_c \rangle, \\ \langle (\Delta x)^2 \rangle &= 2v^2 G_2, \quad \langle (\Delta v)^2 \rangle = 2a^2 G_2 + \langle (\Delta v_c)^2 \rangle, \\ \langle \Delta x \Delta v \rangle &= 2av G_2, \end{aligned} \quad (23)$$

式中, 由于 c 与 α 互不关联, 故交叉项是更高级的项, 已略去. 令

$$A = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} G_1 / \Delta t, \quad D = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} G_2 / \Delta t, \quad (24)$$

$$R_c = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle \Delta v_c \rangle / \Delta t, \quad D_c = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle (\Delta v_c)^2 \rangle / \Delta t. \quad (25)$$

由(16), (19)及(23)–(25)式, 得到

$$\begin{aligned} R_x &= vA + aD, \quad R_v = aA + a'vD + R_c, \\ Q_{xx} &= v^2D, \quad Q_{vv} = a^2D + \frac{1}{2}D_c, \quad Q_{xv} = avD. \end{aligned} \quad (26)$$

将(26)式代入(15)式, 便得到无碰撞情形动力学方程中相应于随机磁场的项为

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \left(v \frac{\partial}{\partial x} + a \frac{\partial}{\partial v} \right) Af + \left(v \frac{\partial}{\partial x} + a \frac{\partial}{\partial v} \right) \left(v \frac{\partial}{\partial x} + a \frac{\partial}{\partial v} \right) Df. \quad (27)$$

将(26)式代入(18)式, 便得到弱碰撞情形下动力学方程中相应于碰撞及随机磁场的项为

$$\frac{\partial f}{\partial t} = C(f) - \left(v \frac{\partial}{\partial x} + a \frac{\partial}{\partial v} \right) Af + \left(v \frac{\partial}{\partial x} + a \frac{\partial}{\partial v} \right) \left(v \frac{\partial}{\partial x} + a \frac{\partial}{\partial v} \right) Df, \quad (28)$$

式中

$$C(f) = - \frac{\partial}{\partial v} (R_c f) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v^2} (D_c f) \quad (29)$$

是通常的碰撞项.

(27) 与 (28) 式给出了动力学方程中相应于随机磁场的项, 它是由关联函数的积分 A

与 D 表示的. 适用于 $|\Delta v/v| \ll 1$ 的情形. 在这种情形下, 无碰撞时和弱碰撞时, 随机磁场项具有相同的形式, 以下还将看到 A 与 D 的表达式也是相同的.

由(11), (12)及(24)式可以看出, D 联系于 g_2 的特征宽度, 即平均关联时间, 而 A 联系于系综中粒子对 α 的分布的不对称性, 这取决于关联时间随 α 的变化. 在我们所考虑的问题中, 不对称性是由电场引起的. 以下将采用一个等效的数学模型来计算 A 和 D , 即令 α 值在关联长度内保持常数, 而达到关联长度时发生随机性变化.

对无碰撞 ($c = 0$)、无电场 ($a = 0$) 的情形, v 保持不变, 关联时间是常数, 即

$$t_s = L_s/|v|. \quad (30)$$

此时, 系综对 α 的分布是对称的, 由(2)式易得到

$$\begin{aligned} g_1 &= 0, \\ g_2(t_1, t_2) &= \alpha_0^2 \theta\left(\frac{t_1 - t_2}{t_s}\right), \\ \theta(\zeta) &= \begin{cases} 1 & \text{当 } |\zeta| \leq 1, \\ 0 & \text{当 } |\zeta| > 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (31)$$

于是有

$$A = 0, \quad (32)$$

$$D = \frac{D_0}{|v|}, \quad (33)$$

式中

$$D_0 = L_s \alpha_0^2. \quad (34)$$

由(30)式, 当 $v \rightarrow 0$ 时, $t_s \rightarrow \infty$. 这表明, 在考察某个时间间隔 Δt 内的行为时, 只有 $|v|$ 足够大的粒子才反映磁场的随机性, 而 $|v|$ 小的粒子是动力学关联型的, 故不能将(33)式用到 $v \rightarrow 0$ 的情形.

若考虑非稳态的随机场, τ_s 为有限值, 则只要 $\Delta t > \tau_s$, 所有粒子均呈现随机性, 并有

$$\begin{aligned} A &= 0, \\ D &= \begin{cases} D_0/|v| & \text{当 } |v| \geq v_s, \\ D_0/v_s & \text{当 } |v| < v_s, \end{cases} \end{aligned} \quad (35)$$

式中

$$v_s = L_s/\tau_s. \quad (36)$$

在有碰撞或电场时, 系综中的不同粒子在 Δt 内的不同时刻均可有不同的速度 v' , 在 $|\Delta v/v| \ll 1$ 的情形下, 这种速度变化对 D 只引起小的修正, 可以忽略, D 仍为(33)式. 但这种速度变化效应对 A 是重要的. 假定在某个 t' 时刻, 系综中一群速度为 v' 的粒子, 其 α 值发生了随机性转变, 则这些粒子的“瞬时”关联时间基本上是 $L_s/|v'|$, 而它们按 α 的分布如(2)式分布, 基本上是对称的. 但在 $L_s/|v'|$ 时间内, 碰撞和电场可引起速度变化, 分别为

$$\begin{aligned} \delta v_c &\sim \pm v_T \left(\frac{L_s}{\tau_c |v'|} \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \delta v_a &\sim \alpha a \frac{L_s}{|v'|}. \end{aligned}$$

τ_c 为平均碰撞时间, v_T 为平均热速度. 由于速度的变化使得关联时间变为

$$t_s \simeq \frac{L_s}{|v'|} \left(1 \pm \left(\frac{v_0}{|v'|} \right)^{\frac{2}{3}} - \frac{L_s \alpha a v'}{2 |v'|^3} \right), \quad (37)$$

$$\text{式中} \quad v_0 = v_T \left(\frac{L_s}{4l} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (38)$$

碰撞引起的速度变化, 不导致系综按 α 分布的不对称性, 其平均效应是不重要的. 但电场引起的速度变化对关联时间的修正是与 α 有关的. 这导致系综按 α 分布的不对称性, 其平均效应相当于将(2)式乘上一个正比于关联时间的因子 $\left(1 - \frac{1}{2} \frac{L_s \alpha a v'}{|v'|^3} \right)$, 因为发现一个粒子具有某个 α 值的几率是正比于粒子保持该 α 值的时间的, 即与相应的关联时间成正比. 略去高级项后, 这因子可写成 $\left(1 - \frac{L_s \alpha a v}{2 |v|^3} \right)$, 对系综中一切粒子均相同. 于是可以得到

$$A = - \frac{D_0 a v}{2 |v|^3}. \quad (39)$$

(39) 式给出的 A , 和 (33) 式给出的 D 在动力学方程中的贡献有相同的量级. 将 (39), (33) 式代入 (28) 式, 便得到 $|\Delta v/v| \ll 1$ 情形的动力学方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} = C(f) + & \left(v \frac{\partial}{\partial x} + a \frac{\partial}{\partial v} \right) \frac{D_0 a v}{2 |v|^3} f \\ & + \left(v \frac{\partial}{\partial x} + a \frac{\partial}{\partial v} \right) \left(v \frac{\partial}{\partial x} + a \frac{\partial}{\partial v} \right) \frac{D_0}{|v|} f. \end{aligned} \quad (40)$$

此方程与 Molvig^[3] 所用的不同, 相差的项为

$$\left(\frac{D_0 a^2}{|v|^3} - \frac{D_0 a'}{2 |v|} \right) f - \frac{3}{2} \frac{D_0 a}{|v|} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{a}{v} \frac{\partial}{\partial v} \right) f$$

这些项与所保留的项具有相同的量级.

前面已指出, 存在碰撞或电场时粒子速度将发生变化, 而在随机磁场中我们考虑的是 $\Delta t > t_s$ 的平均行为, 故不可能使 Δv 趋于零. 因此, 随机磁场中的等离子体的统计描述具有一定的不准确度, 不仅速度有一不准确度, 而且位置也有量级为 $|\Delta x| \sim \alpha_0 L_s$ 的不准确度. 因而, 我们得到的是一种“粗网格”的动力学方程. 在一般的参量下, 通常有 $|\delta v_c| > |\delta v_a|$. 同时, 在弱碰撞情形有 $v_0 \ll v_T$, 故对大部分粒子有 $|v| \gg v_0$. 对于 $|v| \gg v_0$ 的粒子, 有 $|\Delta v/v| \ll 1$, 这种不准确度是不重要的, 这时方程形式为(40)式. 对于 $|v| \lesssim v_0$ 的粒子, 则有 $|\Delta v/v| \gtrsim 1$. 但是, $|v|$ 小的粒子很少, 又因为随机磁场效应联系于粒子的纵向运动, 故 $|v|$ 小的粒子的贡献一般是不重要的, 可能起重要作用的是电场引起的不对称性. 然而, 由于碰撞可使 $|v| \lesssim v_0$ 的粒子在一个关联长度内导致速度反转, 而且 v 具有正值和负值的几率是近似相等的. 因此, 一个正过程与其相应的逆过程具有近于相等的几率. 这就使得电场对 $|v| \lesssim v_0$ 的粒子所引起的不对称性大为削弱.

由(38)式可以看出, v_0 大体上是 $|v| \lesssim v_0$ 的粒子在关联时间内的平均速度. 可利用 v_0 将(33), (37)式外推到包括 $|v|$ 小的情形, 近似地取

$$A = - \frac{D_0 a v}{2 (v^2 + v_0^2)^{3/2}}, \quad D = \frac{D_0}{(v^2 + v_0^2)^{1/2}}, \quad (41)$$

将(41)式代入(28)式,得到动力学方程的形式为

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} = C(f) + \left(v \frac{\partial}{\partial x} + a \frac{\partial}{\partial v} \right) \frac{D_0 a v}{2(v^2 + v_0^2)^{3/2}} f \\ + \left(v \frac{\partial}{\partial x} + a \frac{\partial}{\partial v} \right) \left(v \frac{\partial}{\partial x} + a \frac{\partial}{\partial v} \right) \frac{D_0}{(v^2 + v_0^2)^{1/2}} f. \end{aligned} \quad (42)$$

方程(42)是满足粒子数守恒条件的,在 $v \rightarrow 0$ 时不发散.

四、输运现象

从以上得到的动力学方程可以讨论随机磁场中的各种输运问题. 令第 i 种粒子的分布函数为

$$f_i = n_i F_{\parallel i}(v) F_{\perp i}(\mathbf{v}_{\perp}), \quad (43)$$

n_i 为粒子密度, $F_{\parallel i}$ 与 $F_{\perp i}$ 为平行速度与垂直速度的分布函数 ($v \simeq v_*$). 将(43)式代入(42)式并作积分,便得到扩散流为

$$\Gamma_i = - \frac{\partial}{\partial x} \left(n_i D_{0i} \int \frac{v^2 F_{\parallel i}}{(v^2 + v_{0i}^2)^{1/2}} dv \right) + E \frac{n_i D_{0i} z_i e}{m_i} \int \frac{v^2 + 2v_{0i}^2}{2(v^2 + v_{0i}^2)^{3/2}} F_{\parallel i} dv, \quad (44)$$

电子扩散流为

$$\Gamma_e = - \frac{\partial}{\partial x} \left(n_e D_{0e} \int \frac{v^2 F_{\parallel e}}{(v^2 + v_{0e}^2)^{1/2}} dv \right) - \frac{\sigma_{\perp e}}{e} E, \quad (45)$$

式中 $\sigma_{\perp e}$ 是电子的垂直电导率

$$\sigma_{\perp e} = \frac{n_e e^2 D_{0e}}{m_e} \int \frac{v^2 + 2v_{0e}^2}{2(v^2 + v_{0e}^2)^{3/2}} F_{\parallel e} dv. \quad (46)$$

由 $\Gamma_e \simeq 0$ 可得到双极电场方程

$$E = - \frac{e}{\sigma_{\perp e}} \frac{\partial}{\partial x} \left(n_e D_{0e} \int \frac{v^2}{(v^2 + v_{0e}^2)^{1/2}} F_{\parallel e} dv \right). \quad (47)$$

对动力学方程求能量矩,可得到随机磁场对电子能量方程的贡献

$$\frac{3}{2} n_e \frac{\partial T_e}{\partial t} = S_e - \frac{\partial q_e}{\partial x}, \quad (48)$$

$$\text{式中} \quad S_e = \sigma_{\perp e} E^2 - e D_{0e} n \int \frac{v^2 F_{\parallel}}{(v^2 + v_{0e}^2)^{1/2}} dv \cdot \frac{\partial E}{\partial x}, \quad (49)$$

q_e 为电子热流

$$\begin{aligned} q_e = - \frac{\partial}{\partial x} \left(n_e D_{0e} \int \frac{1}{2} m_e v^4 \frac{F_{\parallel e}}{(v^2 + v_{0e}^2)^{1/2}} dv \right) - n_e D_{0e} \int \frac{v^2 F_{\parallel e}}{(v^2 + v_{0e}^2)^{1/2}} dv \frac{\partial T_e}{\partial x} \\ - E n_e D_{0e} \frac{e}{m_e} \left[\int \frac{5}{2} m_e v^2 \frac{F_{\parallel e}}{(v^2 + v_{0e}^2)^{1/2}} dv - \int \frac{1}{2} m_e v^4 \frac{F_{\parallel e}}{2(v^2 + v_{0e}^2)^{3/2}} dv \right]. \end{aligned} \quad (50)$$

在(44)式中的 D_{0i} 代表第 i 种粒子的随机磁场参量. D_{0i} 实际上是回转半径内的平均值,而 α_F 的横向变化尺度一般认为是离子回转半径的量级,因此离子的 D_0 可能比电子小.

现取分布函数(43)式为局域麦氏分布来讨论随机磁场中输运现象的特征:

$$F_{\parallel i} = \sqrt{\frac{m_i}{2\pi T_i}} e^{-m_i v^2/2T_i}. \quad (51)$$

为简单起见, 取 $D_{0i} = D_{0e} = D_0$, $T_i = T_e$, $l_i = l_e = l$, 由此得到

$$\sigma_{\perp e} = \frac{\gamma}{2} n_e e^2 \frac{D_0 v_e}{T_e}, \quad (52)$$

式中 $v_e = \left(\frac{2T_e}{\pi m_e}\right)^{1/2}$, γ 是决定于 L_s/l 的量级为 1 的数值参数

$$\gamma = \int_0^\infty \frac{u^2 + 2(L_s/4l)^{2/3}}{[u^2 + (L_s/4l)^{2/3}]^{3/2}} e^{-u^2} du. \quad (53)$$

双极电场与扩散流为

$$E = -\frac{2}{\gamma} \frac{T_e}{e} \frac{\partial}{\partial x} \ln(n_e v_e), \quad (54)$$

$$\Gamma_i = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{\frac{m_e}{m_i}} D_0 v_e n_i \right) - z_i \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} D_0 \frac{n_i}{n_e} \frac{\partial}{\partial x} (n_e v_e). \quad (55)$$

Γ_i 中第二项是电场项, 当 $z_i \gg 1$ 时电场项是主要的, 平均扩散速度为

$$V_i = \frac{\Gamma_i}{n_i} \simeq -z_i \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} D_0 v_e \frac{\partial}{\partial x} \ln(n_e v_e). \quad (56)$$

在能量方程中

$$S_e = \frac{2}{\gamma} D_0 v_e n_e T_e \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \ln(n_e v_e) \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln(n_e v_e) + \frac{\partial \ln(n_e v_e)}{\partial x} \cdot \frac{\partial \ln T_e}{\partial x} \right], \quad (57)$$

$$q_e = -n_e D_0 v_e \frac{\partial T_e}{\partial x} - \left(1 - \frac{9}{2\gamma} \right) D_0 v_e T_e \frac{\partial}{\partial x} \ln(n_e v_e). \quad (58)$$

由 (55) 式看到, 扩散系数正比于 $D_0 v_e \sqrt{m_e/m_i}$, 扩散不是自动双极的. 若随机磁场引起的电子热导是主要的能量损失机制, 则随机磁场引起的扩散一般是非自动双极扩散中的主要过程. 这种情况下必导致双极电场 (54) 式的出现. 电场指向电子压强下降的方向. 测量等离子体中的电势分布将有助于判断随机磁场是否是引起反常输运的主要机制.

双极电场使电子扩散降到离子扩散水平, 并使离子的扩散增强. 由 (56) 式看出, 电场引起的迁移速度正比于 $\sqrt{z_i^2/m_i}$, 因此, 高 z 杂质的损失率可能超过离子.

但一些实验表明, 在稳态放电时, 等离子体中心处于负电位^[4,5], 而高 z 杂质有向中心聚集的趋势^[6]. 这不象是随机磁场起主要作用的情形. 而在等离子体柱发生破裂时, 观测到电场反转^[5]和高 z 杂质的聚集过程受到阻挡或比等离子体更优先地从中心向外扩散, 这与随机磁场机制起主要作用的图象比较接近.

由 (57) 和 (58) 式看出, 双极电场使电子热流下降, 但它只引起同量级的修正, 不改变热流的量级. 热导系数 $\sim n D_0 v_e$, 因而能量约束时间

$$\tau_E \propto r_p^2 / D_0 T_e^{1/2}, \quad (59)$$

r_p 为等离子体的小半径. (59) 式表明 τ_E 与密度无关, 对温度也不敏感. 这是 $L_s < l$ 情形随机磁场中电子热导的定标特征.

现考虑电子分布函数高能尾的稳态解,取碰撞项为^[7]

$$C(f) = \frac{\partial}{\partial v} v(v) \left(v f + \frac{T_e}{m_e} \frac{\partial f}{\partial v} \right), \quad v(v) = v_0 v_{Te}^3 / (v_{Te}^2 + v^2)^{3/2}, \quad (60)$$

其中 v_0 为常数. 令 f_0 为麦氏分布,而

$$f = f_0 + f_1. \quad (61)$$

对高能尾可求得

$$f_1 \simeq \frac{D_0 v_{Te}}{v_0} \left[\frac{1}{6} \left(\frac{v}{v_{Te}} \right)^6 \frac{T_e''}{T_e} + \frac{1}{8} \left(\frac{v}{v_{Te}} \right)^8 \left(\frac{T_e'}{T_e} \right)^2 \right] f_0. \quad (62)$$

在等离子体中心区, $T_e' \sim 0$, 而 $T_e'' < 0$, 有

$$f_1 \simeq -\frac{1}{6} \frac{D_0 v_{Te}}{v_0} \left| \frac{T_e''}{T_e} \right| \left(\frac{v}{v_{Te}} \right)^6 f_0. \quad (63)$$

而在外层区 T_e'' 可略去,有

$$f_1 \simeq \frac{1}{8} \frac{D_0 v_{Te}}{v_0} \left(\frac{T_e'}{T_e} \right)^2 \left(\frac{v}{v_{Te}} \right)^8 f_0. \quad (64)$$

Molvig^[3] 曾得到相似于 (64) 的式子,并用来解释 Alcator 韧致辐射谱高能段的过热特征. 但由 (63) 与 (64) 式可看到,随机磁场只在外层区导致电子分布函数的高能尾部“过热”,而在中心区则相反,是导致“过冷”的分布. 一般,韧致辐射主要来自中心区,因此 Molvig^[3] 的解释是可疑的.

参 考 文 献

- [1] T. H. Stix, *Nucl. Fusion* **18** (1978), 353.
- [2] A. B. Rechester *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **40** (1978), 38.
- [3] Kim Molvig *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **41** (1978), 1240.
- [4] J. C. Hosea, *Phys. Rev. Lett.*, **30** (1973), 839.
- [5] M. G. Bell, *Nucl. Fusion* **19** (1979), 33.
- [6] V. A. Vershkov *et al.*, *Nucl. Fusion* **14** (1974), 383.
- [7] V. V. Parail *et al.*, *Nucl. Fusion*, **18** (1978), 303.

KINETIC EQUATION IN A STOCHASTIC MAGNETIC FIELD

XIA MENG-FEN HU HUI-LING

(Department of Physics, Peking University)

ABSTRACT

The correlation functions and kinetic equation for a plasma immersed in a stochastic magnetic field are derived. Based on our equation, the transport phenomenon are discussed.