

用初-边值方法研究具有固定边界的 等离子体 Kink 不稳定性

柯孚久 沈解伍 徐民健

(中国科学院物理研究所)

1979年12月24日收到

提 要

本文解出了具有固定边界的平衡等离子体磁面方程的解析解和数值解。用简化的 Lax-Wendroff 方法求出了压力、速度和磁场的扰动值。得到了线性增长率、平均 β 和平均 β_p 以及安全因子。我们发现: 1. 具有凹向电流剖面的等离子体比具有均匀电流剖面的等离子体更稳定, 而具有凸向电流剖面的等离子体是最不稳定的; 2. 具有逆磁电流的等离子体比具有顺磁电流的等离子体更稳定。

一、引 言

等离子体的稳定性对于等离子体的约束是一个极其重要的问题。

在一些 Tokamak 装置 (T-4^[1] 及 TFR^[2]) 上, 在观察到破裂不稳定性的过程中, 观察到 $m=1$ 、 $k=1$ 的内部模不稳定性。内部模可能是导致破裂不稳定性的机制之一。如 Mirnov^[1] 和 Edey^[2] 认为 $m=1$ 、 $k=1$ 的内部模和 $m=2$ 、 $k=1$ 的撕裂模耦合会产生破裂不稳定性, 故对内部模的研究是有意义的。我们企图研究电流分布对稳定性的影响, 以便抑制 $m=1$ 、 $k=1$ 的内部模, 来改进稳定性, 并比较在各种不同剖面下的等离子体稳定的优劣。文献 [3] 中给出在 Ormak 中用中性注入将电流剖面从凸形变为 hollow 形, 文献 [4] 中给出在 PLT 中发现 hollow 剖面的情况。可见采用一定的物理手段是可以改变电流剖面的形状的。Wesson 等人^[5-10] 对内部模不稳定性作了一些工作, 但他们仅考虑了特殊电流分布下的不稳定性, 而我们计算了较普遍电流分布情况。

本文用一无量纲量 α 来调节电流剖面。Bateman 等人在文献 [11] 中, 对于平衡纵向电流密度 $j_z = \frac{j_{zc}}{\phi_c} \phi$, $\beta_p = 1$ 的情况, 着重研究了当截面拉长时对于低 m 模稳定性的影响。我们则研究了 $j_z = j_{zc} \left[\alpha - (\alpha - 1) \frac{\phi}{\phi_c} \right]$, $\beta_p \geq 1$ 时的稳定性。文献 [11] 中的电流剖面相应于本文 $\alpha = 0$ 的电流剖面, $\beta_p = 1$ 的情况。计算表明, $0 \leq \alpha < 1$ 时对应凸形体电流剖面; $\alpha = 1$ 时对应均匀电流剖面; $\alpha > 1$ 时对应凹形电流剖面。在不同的电流剖面下将解出的平衡解上的扰动发展加以比较, 发现凹形电流剖面或逆磁电流存在时对于稳定等离子体内部模较好。

1) ϕ_c 为磁轴中心处的磁面函数值。

二、等离子体的平衡问题

本文讨论小截面为矩形, 长度为 L 的直柱形等离子体(见图 1), 其边界为固定的理想导体壁, 内中充满了理想等离子体(无电阻、无粘性). 本文计算了 $m = 1$ 的具有固定边界的等离子体的 Kink 模不稳定性, 采用线性化小扰动法进行处理. 为了使计算稳定, 要求等离子体密度高. 等离子体是可压缩的, 其比热比 γ_r 取为 $5/3$. 一般说来, 本文所采用的计算方法仅适于低 m 模.

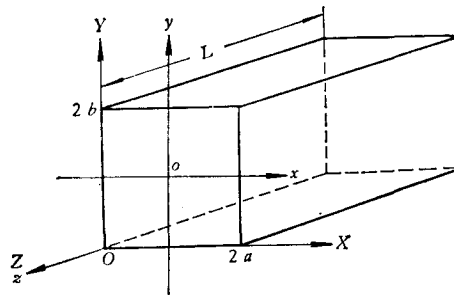


图 1 等离子体柱的长度为 L , 小截面上 X 方向长度为 $2a$, Y 方向长度为 $2b$

平衡时磁面函数所满足的方程为¹⁾

$$\nabla^2 \phi_m = -j_{zem} = p'_{em}(\phi_m) + B_{zem} B'_{zem}(\phi_m), \quad \phi|_{\text{边界}} = 0, \quad (1)$$

式中 ϕ 为磁面函数, $j_{zem} = j_{zcm} \left[\alpha - (\alpha - 1) \frac{\phi_m}{\phi_{cm}} \right]$. (各物理量均采用 MKS 制.)

将(1)式无量纲化为²⁾:

$$\frac{\partial \phi}{\partial X^2} + \frac{\partial \phi}{\partial Y^2} = -j_{ze} = -j_{zec} \left[\alpha - (\alpha - 1) \frac{\phi}{\phi_c} \right], \quad \phi|_{\text{边界}} = 0. \quad (1')$$

本文诸量意义如下: $\mathbf{B}$ 为磁场, $\mathbf{j}$ 为电流密度, j_{ze} 为等离子体沿 z 方向的电流密度, p 为压强, $\mathbf{v}$ 为等离子体速度, ρ 为密度, $\mathbf{E}$ 为电场, t 为时间, k 为波数.

1. 平衡无量纲方程及边条件(1)'式的解析解

为计算方便, 作坐标变换, 将 XOY 坐标原点移到等离子体柱的几何中心, 则有(见图 1)

$$x = X - a, \quad y = Y - b.$$

1) 无角向电流时, 引入 $c_1 = \frac{j_{zec}(\alpha - 1)}{\phi_c}$, $c_2 = j_{zec}\alpha$, $L = \frac{n^2 \pi^2}{4a^2} + c_1$, $f_z = -\frac{4c_2}{n\pi} \times (-1)^{\frac{n-1}{2}}$,

$$k' = \sqrt{L}, \quad \text{当 } L > 0;$$

$$l = \sqrt{-L}, \quad \text{当 } L < 0. \quad \text{则(1)'式化为}$$

1) 本文中, 下标 e 表示平衡量, 下标 m 表示该量为有量纲量.

2) 无下标 m 表示该量为无量纲量. 下标 X (或 y , 或 z) 表示 X (y 或 z) 方向分量.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = c_1 \phi - c_2, \quad \phi|_{x=\pm a} = \phi|_{y=\pm b} = 0. \quad (2)$$

下面按照 α 的取值给出相应的平衡解:

$$(1) \alpha = 0 \quad \phi = \phi_c \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b}, \quad (3)$$

其中 $\phi_c = j_{zec} / \left[\left(\frac{\pi}{2a} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{2b} \right)^2 \right]$, 与文献[13]一致.

(2) $0 < \alpha < 1$ (即 $c_1 < 0$)——凸形电流剖面

$$\phi = \sum_{n=1,3,\dots}^N \frac{f_n}{l^2} \cos \frac{n\pi}{2a} x \left(1 - \frac{\cos ly}{\cos lb} \right) + \sum_{n=N+2, N+4, \dots}^{\infty} \frac{f_n}{k'^2} \cos \frac{n\pi}{2a} x \left(\frac{\text{ch} k' y}{\text{ch} k' b} - 1 \right), \quad (4)$$

式中 $N = \left[\frac{j_{zec}}{\phi_c} (1 - \alpha) \frac{4a^2}{\pi^2} \right]^{\frac{1}{2}}$ 为奇整数.

(3) $\alpha = 1$ (即 $c_1 = 0$)——均匀电流剖面

$$\phi = \frac{16 c_2 a^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^3} \left(1 - \frac{\text{ch} \frac{n\pi}{2a} y}{\text{ch} \frac{n\pi}{2a} b} \right) \cos \frac{n\pi}{2a} x. \quad (5)$$

(4) $\alpha > 1$ (即 $c_1 > 0$)——凹形电流剖面

$$\phi = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{f_n}{k'^2} \cos \frac{n\pi}{2a} x \left(\frac{\text{ch} k' y}{\text{ch} k' b} - 1 \right). \quad (6)$$

图2(a),(b) 仅给出了 ϕ, j_{ze} 在 x 方向的剖面, 在 y 方向的剖面与此类似, 故略去. α, ϕ_c, j_{zec} 中只有两个是独立的. 磁面的空间分布如图3所示.

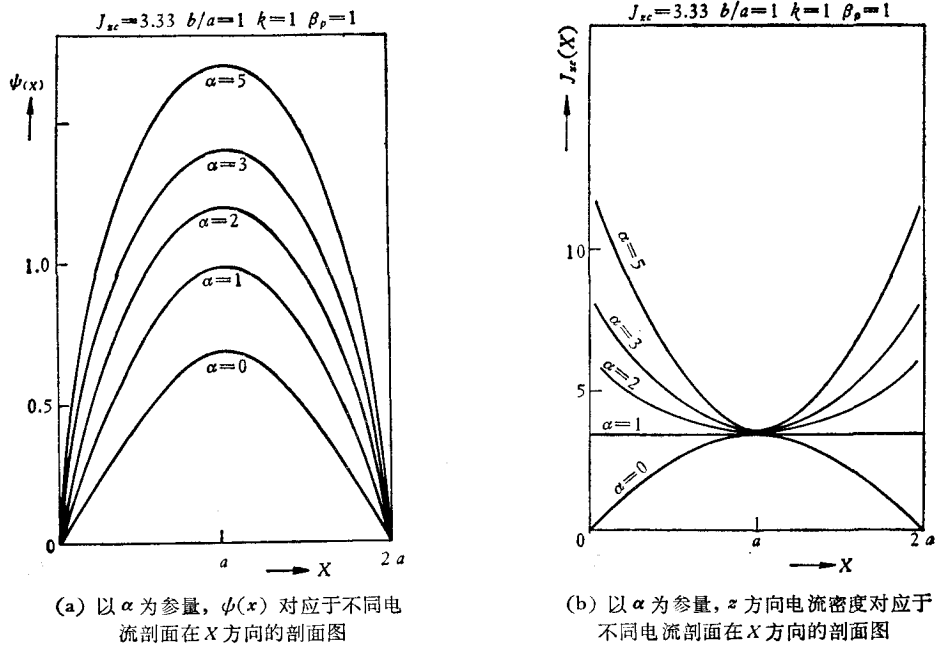


图 2

2) 有角向电流时 (即 $\beta_p \approx 1$), 方程 (1)' 为

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = c'_1 \phi + c'_1' \phi - c'_2 - c'_2', \quad \phi|_{\text{边界}} = 0. \quad (1)''$$

设 $\frac{\partial p_c}{\partial \phi} = -(c'_1 \phi - c'_2), \quad \frac{1}{2} \frac{dB_{ze}^2}{d\phi} = -(c'_1' \phi - c'_2'), \quad (7)$

令 $c_1 = c'_1 + c'_1', \quad c_2 = c'_2 + c'_2',$

c'_1, c'_2, c'_1', c'_2' 是可以调节的. 当 $c'_1' = c'_2' = 0$ 时, 回到无角向电流的情况.

由顺(逆)磁条件与 $B_z^2 > 0$, 可推出

$$\begin{aligned} 0 \leq 2c'_2 - c'_1'(\phi + \phi_c) &\leq \frac{1}{\phi_c - \phi} \quad \text{当 } \beta_p < 1; \\ 2c'_2 - c'_1'(\phi_c + \phi) &\leq 0 \quad \text{当 } \beta_p > 1. \end{aligned} \quad (8)$$

此时磁面 ϕ 的解仍为 (3)–(6) 式. 磁场 B_x, B_y 的表达式与无角向电流时一样, 但压强与 B_z 之值与无角向电流时的解不同.

ϕ, B_z, p_c 等量收敛很快. 各种电流下的 β 值如图 4 所示. α 越大时, 其 β 值越高. 故凹形电流剖面对提高等离子体的 β 值也是有利的.

$b/a=1, k=1, \alpha=0.5, J_{zc}=8, \beta_p=1$

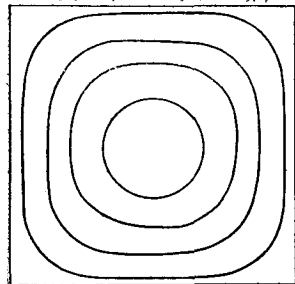


图 3 等离子体处于平衡态时, 其小截面上磁面的剖线

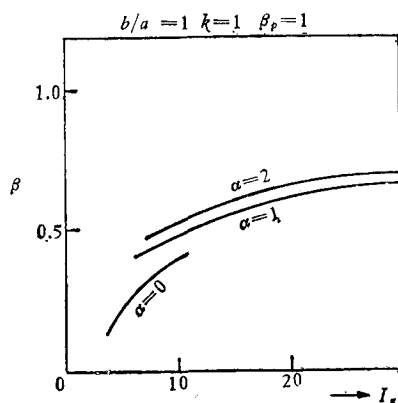


图 4 以 α 为参量, 在不同电流剖面下, β 随总电流 I_z 变化的曲线

2. (1)' 式的迭代解

采用超松弛法求解 (1)' 式, 所得迭代解与解析解符合得较好.

三、等离子体的稳定问题

稳定性的计算的出发点为理想 MHD 方程组.

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t_m} + \nabla_m \cdot (\rho \mathbf{v}_m) = 0, \quad (2.1)$$

$$\rho_m \left(\frac{\partial}{\partial t_m} + \mathbf{v}_m \cdot \nabla_m \right) \mathbf{v}_m + \nabla_m p_m - \mathbf{j}_m \times \mathbf{B}_m = 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial p_m}{\partial t_m} + \nabla_m \cdot (p_m \mathbf{v}_m) + (\gamma_r - 1)p_m(\nabla_m \cdot \mathbf{v}_m) = 0, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_m}{\partial t_m} + \nabla_m \times \mathbf{E}_m = 0, \quad (2.4)$$

$$\nabla_m \times \mathbf{B}_m = \mu_0 \mathbf{j}_m, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{E}_m + \mathbf{v}_m \times \mathbf{B}_m = 0. \quad (2.6)$$

1. 基本公式及方法

将(2)式线性化及无量纲化得到的扰动方程为¹⁾

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + \nabla p_1 - \mathbf{j}_1 \times \mathbf{B}_e - \mathbf{j}_e \times \mathbf{B}_1 &= 0, \\ \frac{\partial p_1}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla p_e + \gamma_r p_e (\nabla \cdot \mathbf{v}_1) &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_e) &= 0, \\ \mathbf{j}_1 &= \nabla \times \mathbf{B}_1, \quad \mathbf{E}_1 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_e = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

设扰动量

$$U(X, Y, z, t) = \text{Re}\{U(X, Y, z, t)e^{ikz}\} = \text{Re}\{[U^r(X, Y, t) + iU^i(X, Y, t)]e^{ikz}\}; \quad (10)$$

边条件为(根据固定理想导体壁的假设)

$$p_1|_{\text{边界}} = 0, \quad \mathbf{E}_{11}|_{\text{边界}} = 0, \quad \mathbf{B}_1|_{\text{边界}} = 0, \quad \mathbf{v}_1|_{\text{边界}} = 0; \quad (11)$$

初条件为

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 &= 0 \quad (\text{可确保 } \nabla \cdot \mathbf{B}_1 = 0), \\ p_1 &= 0 \quad (\text{满足理想气体状态方程}), \\ \mathbf{E}_1 &= -\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_e, \quad \mathbf{j}_1 = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

再设 $t = 0$ 时等离子体是不可压缩的, 从而可用流函数 s 给出流场²⁾

$$\begin{aligned} s^r &= s_0 \sin \frac{\pi}{a} X \sin \frac{\pi}{2b} Y, \\ v_{x1}^r &= \frac{\partial s}{\partial Y} = \frac{s_0 \pi}{2b} \sin \frac{\pi}{a} X \cos \frac{\pi}{2b} Y, \\ v_{y1}^r &= -\frac{\partial s}{\partial X} = -\frac{s_0 \pi}{a} \cos \frac{\pi}{a} X \sin \frac{\pi}{2b} Y, \\ v_{z1}^r &= 0; \\ s^i &= -s_0 \sin \frac{\pi}{2a} X \sin \frac{\pi}{b} Y, \\ v_{x1}^i &= \frac{\partial s}{\partial Y} = -\frac{s_0 \pi}{b} \sin \frac{\pi}{2a} X \cos \frac{\pi}{b} Y, \quad \left(\text{在 } z = \frac{L}{4} \text{ 处} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

$$v_{y1}^i = -\frac{\partial s}{\partial X} = -\frac{s_0 \pi}{a} \cos \frac{\pi}{2a} X \sin \frac{\pi}{b} Y, \quad \left(\text{在 } z = \frac{L}{4} \text{ 处} \right) \quad (14)$$

1) 下标 1 表示一级无量纲扰动量。

2) 上标 r 表示复数的实部, 上标 i 表示复数的虚部。

$$v_{y1}^i = -\frac{\partial s}{\partial X} = \frac{s_0 \pi}{2a} \cos \frac{\pi}{2a} X \sin \frac{\pi}{b} Y,$$

$$v_{z1}^i = 0.$$

采用简化的二步 Lax-Wendroff 方法. 根据 $v_1 = v_1(t=0)e^{\gamma t}$ 计算了增长率 γ . 固定空间一点时, 用最小二乘法算 γ 随时间的演化, 并给出标准偏差; 固定时刻, 算出空间扰动的增长率.

$m=1$ 的模在小截面上的速度扰动图案如图 5 所示, 它是两个旋转方向相反的涡旋.

为验证结果是否正确, 检验了在计算过程中能量是否守恒(见附录). 由于计算误差, (A.4) 式不可能严格成立. 将 (A.4) 式写为 $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = \varepsilon$, ε 是小量. 即 $\frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{E}_e + \mathcal{E}_i) + \nabla \cdot (\mathbf{F}_e + \mathbf{F}_i) = \varepsilon_0 + \varepsilon_1$, 故 $\frac{\partial \mathcal{E}_i}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}_i = \varepsilon_1$. 认为当 $\varepsilon_1/(\partial \mathcal{E}_i/\partial t) <$ 某一给定小量时, 即符合要求. 计算表明, $\varepsilon_1/(\partial \mathcal{E}_i/\partial t) < 10\%$.

2. 结 果

1) 不稳定性与电流剖面的关系

当 $\alpha=0$ 时, 增长率与文献[12]的结果符合得很好, 如表 1 所示. 图 6 给出 γ 与总纵向电流 I_z 之间的函数关系. 将每条曲线外推, 可得到 $\gamma=0$ 的两个电流临界点(由于计算上的困难, $\gamma-I_z$ 曲线不能一直算到 $\gamma=0$ 处, 故需将曲线外推). α 越小, 其不稳定区域越大, 即凹形电流剖面的 $\gamma_{\max}$ 、不稳定范围以及固定 I_z 时得到的 γ 均较均匀电流剖面为小; 而均匀电流剖面的上述结果却较凸形电流剖面为小. 同一种类型的电流剖面中, α 小者较 α 大者的稳定性为好.

表 1

	I_{zcc}	γ
本 文	3.3333	0.542
Bateman 文	3.333	0.524

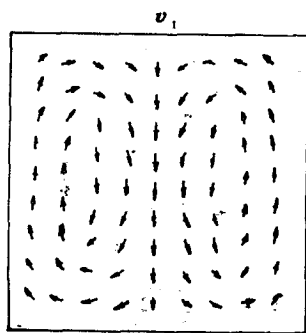


图 5 扰动速度 v_1 的流动示意图

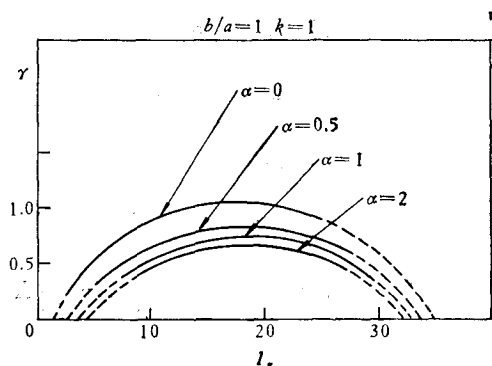


图 6 以 α 为参量, 不同电流剖面下, 增长率 γ 与总电流 I_z 的关系. 实线代表计算得到的曲线; 虚线代表外推得到的曲线

从图 8 可见, 固定某一 I_z 值, α 小的磁阱较深, 但各电流剖面对应的磁阱深度¹⁾相差甚微。在图 7 中, α 小的 q_c ²⁾ 越小, 且各电流剖面在同样 I_z 下对应的 q_c 相差较为悬殊。从图 9 可以看得更清楚。任意挑出一组 I_z 为某固定值时所对应的 $q-X$, $\Delta B-X$ 曲线, α 越大者虽各点的磁阱越浅, 但它们的安全因子均较大 (有时所有的 $q < 1$, 但 α 大的 q 较 α 小的 q 更接近 1, 从而后者比前者更不稳定)。结果同样 I_z 下凹形电流的增长率最小。以使 $\gamma = \gamma_{\max}$ 的 I_z 为分界线, 在此线左边接近 $\gamma = 0$ 的低电流临界点时, 尽管此时阱深几乎不起作用, 但 $q > 1$ 足以保证等离子体的内部 Kink 模被稳定住。而处在分界线右边时, 随着 I_z 增大, 尽管 $q < 1$, 起不了稳定作用, 但磁阱变深, 仍能达到 $\gamma = 0$ 的另一个高电流临界点。可见, 对每一种电流剖面, 都有一高、一低两个电流临界点存在, 给出了不稳定性对应的电流范围。

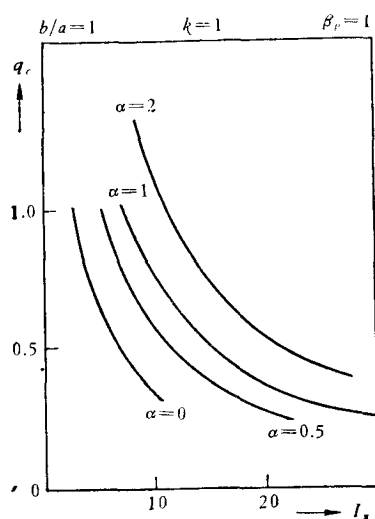


图 7 以 α 为参量, 在不同电流剖面下, 磁轴处的安全因子 q_c 随总电流 I_z 变化的曲线

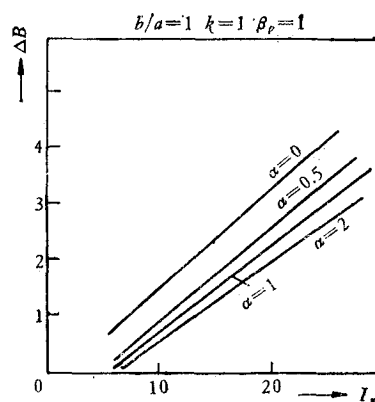


图 8 以 α 为参量, 不同电流剖面下边界上磁阱深度与总电流 I_z 的关系 其中 $B(a) - B(0) = \Delta B$ 为磁阱深度, $B_{zc} = 1$

2) 逆磁或顺磁角向电流的存在对 γ 的影响

以 $\alpha = 0$ 的凸形电流为例, β_p 越小, 其增长率越大 (图 10), 即逆磁电流对稳定有利。这不难想像, 逆磁电流的存在使磁场位阱加深, 而顺磁电流的存在却起相反的作用。从图 11 可见, 当固定电流剖面时, q 从 $q_c = 1$ 出发, $\beta_p = 1$ 的曲线在中间, $\beta_p > 1$ (< 1) 的 q 值向上增加 (向下减少)。从受力的角度亦不难理解此结果。从图 10 可知, 顺磁电流的增强会导致不稳定性急剧上升, 而逆磁电流的存在虽能减少不稳定性, 使增长率下降, 但其效果不明显。从图 12 可见, 当 β_p 较小时, 磁阱阱深趋于零, 而随 β_p 上升, 磁阱阱深增加较少。

3) 不稳定的增长时间

我们定义当扰动值为初始值的 e 倍时, 就认为等离子体不稳定了。此时的时间记

1) 在直柱中, 定义磁阱深度为 $\Delta B = B(a) - B(0)$ 。

2) q_c 为磁轴处的安全因子。

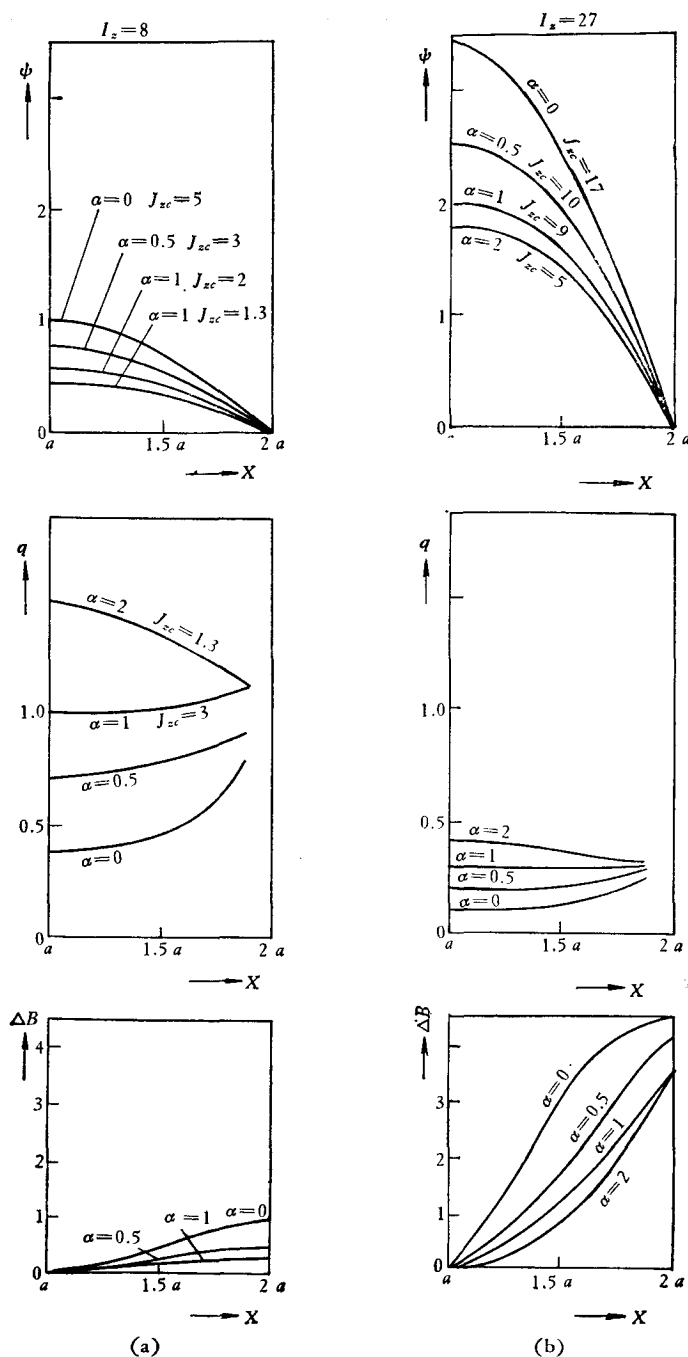


图9 $b/a = 1$, $k = 1$, 以 α 为参量, 不同电流剖面下 ϕ , q , B 在 X 方向分布图

为 $t_{g,m}$.

故 $t_{g,m} = \frac{1}{\gamma_m} = \frac{1}{2\gamma} t_{\text{Alfvén},m}$. 有量纲的 γ 表达式为 $\gamma_m = \frac{t}{t_m} \gamma = \frac{B_{\text{rem}}}{a_m (\mu_0 \rho_{em})^{1/2}} \gamma$ (1/秒).

4) 内部 Kink 模的特点及受力分析

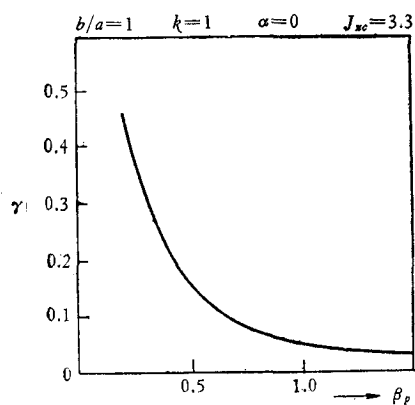


图 10 增长率 γ 随角向电流从顺磁变为逆磁的变化曲线

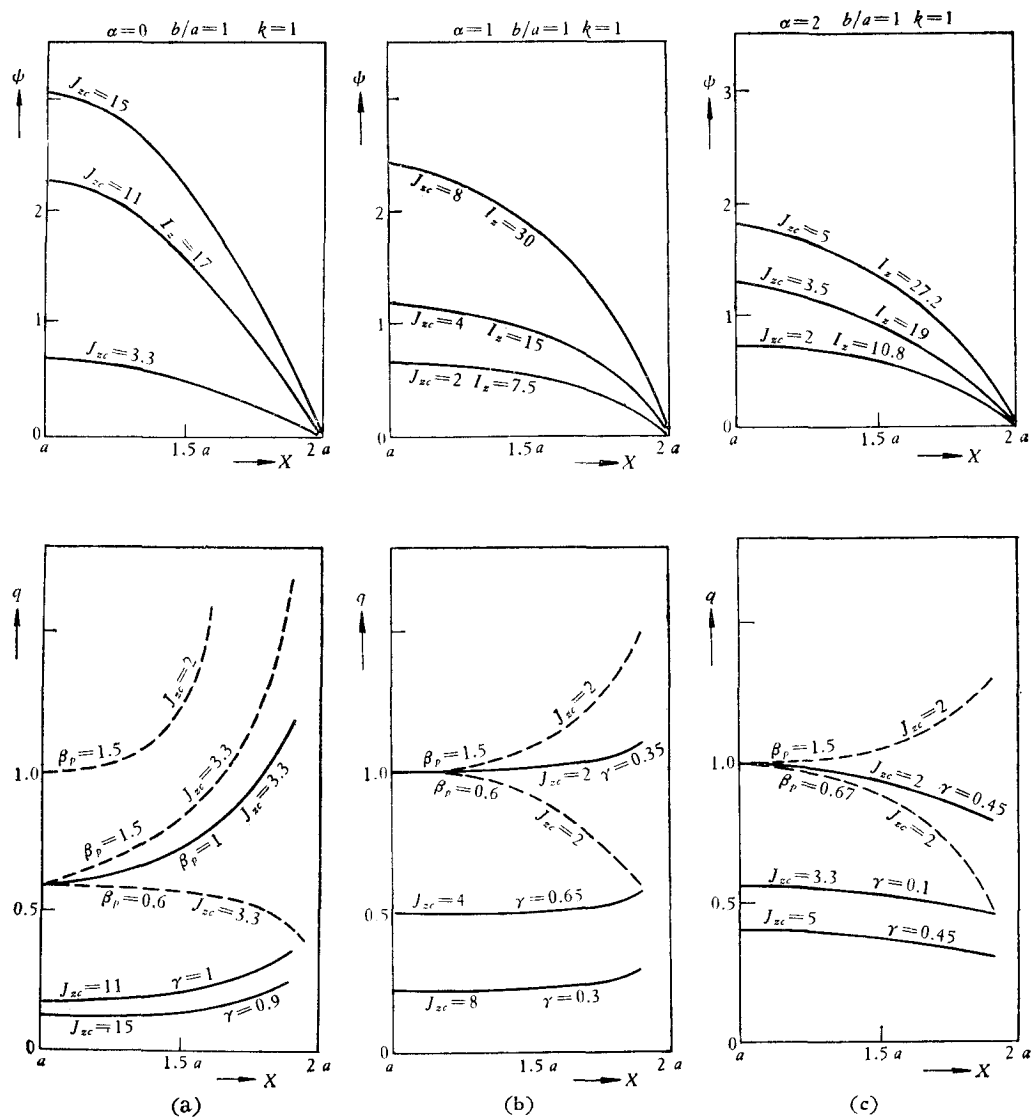


图 11 各种电流剖面下以 β_p, J_{zc} 为参量的 ψ, q 在 X 方向的剖面 实线代表无角向电流的情况；虚线代表有角向电流的情况

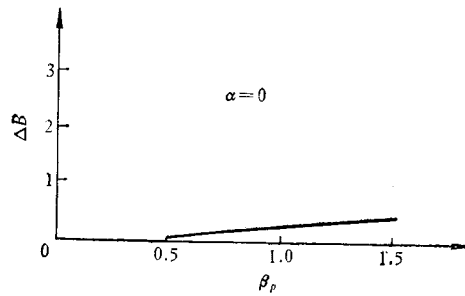
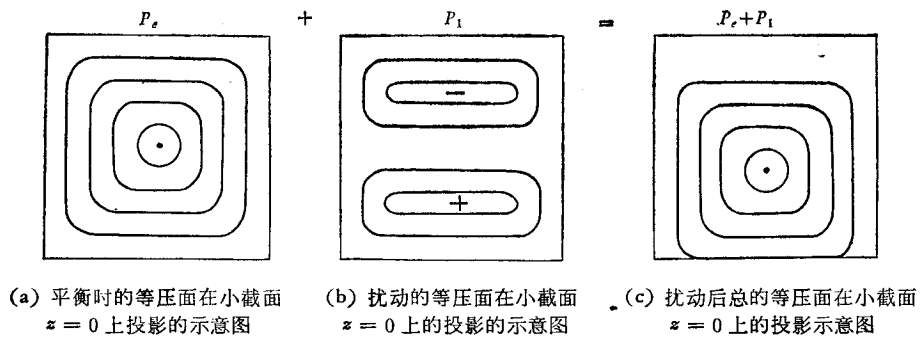
图 12 磁阱深度 β_p 变化曲线

图 13

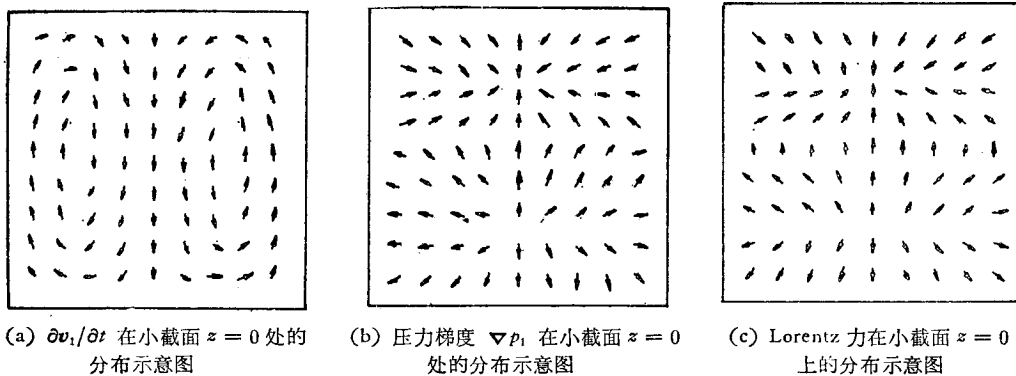


图 14

固定一个时刻,在小截面 $z=0$ 上,扰动速度形成两个旋转方向相反的涡旋. 同一时刻,沿纵向从 $z=0$ 出发,两个涡旋开始在空间旋转. 当固定空间一点时,发现随时间增加,后一时刻的速率总大于前一时刻的速率. 当 α, j_{zcc} 等参量给定后,这种扰动图案在扰动过程中保持不变. 图 13(a) 给出了平衡时在 $z=0$ 小截面上等压面的投影,当它与扰动压力 p_1 迭加后,(扰动压力 p_1 在小截面 $z=0$ 上的投影如图 13(b) 所示)得到的总压力如图 13(c) 所示. 从图 13(c) 可以看出,压力扰动后,等压面沿着 Y 轴向下移动. 而从

$z = 0$ 出发, 这种位形在空间开始旋转, 从而得到 $m = 1$ 的 Kink 模.

等离子体一旦作涡旋运动, 小截面上等离子体受两个力的作用, 一个为 Lorentz 力, 另一个为 $-\nabla p$ (如图 14(b), (c) 所示). 以 $z = 0$ 的面为例, 计算表明, $p_{1\max}$ 在 $x = 0$, $y = b/2$ 处, $p_{1\min}$ 在 $x = 0$, $y = -b/2$ 处. 从图 14(b) 也可看出这一点. 这两种力合成的效果是形成两个涡旋, 如图 14(a) 所示. 合力在涡旋的切线方向的分量用来加速等离子体的速率, 在法线方向的分力是保持等离子体作曲线运动的向心力.

四、结 论

本文采用初-边值法求出了等离子体的各扰动量及增长率. 给出初始扰动为 $m = 1$ 的本征模, 发现扰动模始终保持此本征模的特点 (例如流动图案不变), 而本征值 (增长率) 是与所给的初始扰动大小无关. 初-边值法对于边界形状要求不太苛刻, 而其初条件在某种程度上的任意性又使得方程组较易于求解, 故这种数值模拟方法对于求解稳定性问题不失为一种较好的方法.

计算结果还表明, 对所设的各种电流剖面, 等离子体都有一个不稳定的区域, 并存在使 $\gamma = 0$ 的一高、一低的两个电流临界点. 凹形电流剖面较均匀电流剖面稳定; 而均匀电流剖面又较凸形电流剖面稳定. 存在逆磁电流时的等离子体较存在顺磁电流时更为稳定.

参加过此项工作的还有薛明伦、吴汉明、汪诗金同志, 计算中心邹华模同志对差分格式提出了很好的建议, 在此表示感谢.

附 录

对单位小体积元能量守恒的检验

由 (2.1)–(2.4) 式可推出能量守恒方程

$$\frac{\partial}{\partial t_m} \left[\frac{1}{2} \rho_m v_m^2 + \frac{p_m}{\gamma_r - 1} + \frac{B_m^2}{2\mu_0} \right] + \nabla \cdot \left\{ \left(\frac{1}{2} \rho_m v_m^2 + \frac{\gamma_r}{\gamma_r - 1} p_m \right) \mathbf{v}_m + \frac{\mathbf{E}_m \times \mathbf{B}_m}{\mu_0} \right\} = 0. \quad (\text{A.1})$$

由 (A.1) 式推出零级、一级能量守恒关系式为零级:

$$\frac{1}{\gamma_r - 1} \frac{\partial p_{em}}{\partial t_m} + \frac{\mathbf{B}_{em}}{\mu_0} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_{em}}{\partial t_m} + \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\mathbf{E}_{em} \times \mathbf{B}_{em}) = 0. \quad (\text{A.2})$$

注意到 p_{em} , $\mathbf{B}_{em}$ 不显含时间, $\mathbf{E}_{em} = -\mathbf{v}_{em} \times \mathbf{B}_{em} = 0$, 此式显然成立.

$$\begin{aligned} \text{一级: } & \frac{1}{\gamma_r - 1} \frac{\partial p_{1m}}{\partial t_m} + \frac{\mathbf{B}_{em}}{\mu_0} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_{1m}}{\partial t_m} + \frac{\mathbf{B}_{1m}}{\mu_0} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_{em}}{\partial t_m} + \frac{\gamma_r}{\gamma_r - 1} \nabla \cdot (p_{em} \mathbf{v}_{1m}) \\ & + \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\mathbf{E}_{em} \times \mathbf{B}_{1m}) + \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\mathbf{E}_{1m} \times \mathbf{B}_{em}) = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

无量纲化后, (A.3) 式变为

$$\frac{1}{\gamma_r - 1} \frac{\partial p_1}{\partial t} + \mathbf{B}_e \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} + \frac{\gamma_r}{\gamma_r - 1} \nabla \cdot (p_e \mathbf{v}_1) + \nabla \cdot (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}_e) = 0. \quad (\text{A.4})$$

参 考 文 献

- [1] S. V. Mirnov, Proceeding of the IAEA Symposium on Current Disruption in Toroidal Devices,

- Garching February (1979), 14—16. IPP 3/51, Edited by K. Lackner and H. P. Zehrfeld, July (1979), B 6.
- [2] D. Edey, R. Pellat and J. L. Soulé, *Ibid*, D 10.
 - [3] L. A. Berry *et al.*, *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research*, 1 (1976), 49.
 - [4] B. Carreras, H. R. Hicks, B. V. Waddell, *Nuclear Fusion*, 19 (1979), 583.
 - [5] J. A. Wesson, *Nuclear Fusion*, 18 (1978), 87.
 - [6] V. D. Shafranov, *Ж. Т. Ф.*, 40(1970), 241.
 - [7] G. Bateman, H. R. Hicks, J. W. Wooten, ORNL/TM-5796 (1977).
 - [8] C. H. An, G. Bateman, ORNL/TM-6419 (1978).
 - [9] J. A. Wesson, A. Sykes, *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research*, 1 (1974), 449.
 - [10] H. C. Lui, *Nuclear Fusion*, 18 (1978), 1365.
 - [11] G. Bateman, W. Schneider, W. Grossmann, *Nuclear Fusion*, 14 (1974), 669.
 - [12] W. Schneider, G. Bateman, *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research*, 1 (1974), 429.
 - [13] J. Wooten *et al.*, ORNL/TM-4784 (1977).

THE KINK INSTABILITY OF A PLASMA WITH FIXED-BOUNDARY BY THE METHOD OF INITIAL-BOUNDARY VALUES

KE FU-JIU SHEN JIE-WU XU MIN-JIAN

(*Institute of Physics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

The analytic solutions and numerical solutions of the equations of magnetic surface with fixed-boundary conditions are solved for the equilibrium plasma. The pressure, the velocity and the magnetic field fluctuations are evaluated with the simplified Lax-Wendroff method. The linear growth rates, the average β and β_p , and the safety factor are obtained. We find that (1) plasma with concave currents profiles is more stable than that with uniform currents profiles, and plasma with convex currents profiles is least stable; (2) plasma with diamagnetic currents is more stable than that with paramagnetic currents.