

Walsh 变换光学实现的一种方案

杨国桢 潘少华

(中国科学院物理研究所)

1979 年 12 月 27 日收到

提 要

本文分析了 Walsh 变换的光学实现问题,并给出了为实现二维空间 8×8 复数 Walsh 变换所需的全息透镜系统的光学设计.

Walsh 函数是 Walsh 在 1923 年引入的正交完备的函数系^[1]. 此后,许多数学和物理学工作者在这方面从事了研究,提出许多应用的可能性^[2]. 近年来,又有人提出了 Walsh 函数可用于图象的恢复和象质改善方面^[3]. 可是,通常 Walsh 变换是用计算机实现的,用光学方法实现 Walsh 变换至今还没有较好解决^[4,5]. 作为实现傅里叶变换的一个具体例子,我们采用全息透镜列的方法^[6],对 Walsh 变换的光学实现问题进行研究.

自然序的离散的 Walsh 变换矩阵由下式给出:

$$\text{Wal}_H(j, k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad j, k = 0, 1,$$

以及

$$\text{Wal}_H(j, k) = \begin{bmatrix} \text{Wal}_H(n-1) & \text{Wal}_H(n-1) \\ \text{Wal}_H(n-1) & -\text{Wal}_H(n-1) \end{bmatrix}, \quad (1)$$

矩阵的维数 $N = 2^n, j, k = 0, 1, \dots, (N-1)$.

从自然序的 Walsh 矩阵利用一定的变换关系不难得到 Walsh 序的 Walsh 矩阵 $\text{Wal}_W(j, k)$ ^[7], 在八维情况下,

$$\text{Wal}_W(j, k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

不难证明^[2]:

$$\frac{1}{N} \sum_k \text{Wal}_H(j, k) \text{Wal}_H(j', k) = \delta_{jj'},$$

$$\frac{1}{N} \sum_i \text{Wal}_H(j, k) \text{Wal}_H(j, k') = \delta_{kk'}$$

以及

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_k \text{Wal}_W(j, k) \text{Wal}_W(j', k) &= \delta_{jj'}, \\ \frac{1}{N} \sum_j \text{Wal}_W(j, k) \text{Wal}_W(j, k') &= \delta_{kk'}. \end{aligned} \quad (3)$$

上式表明, $\text{Wal}_H(j, k)$, $\text{Wal}_W(j, k)$ 归一化后都是么正矩阵(归一化常数为 $1/\sqrt{N}$), 原则上可以采用全息透镜列的方法^[6]去实现它们. 然而, 由于自然序和 Walsh 序的 Walsh 矩阵的矩阵元之间变化很大, 不是 +1 就是 -1, 因此用光学实现它们有一定困难, 需要较多数目的全息透镜才能以足够精度实现它们. 于是与傅里叶变换类似, 可能考虑复数 Walsh 矩阵较合适. 为此引入参数 l ,

$$l = \begin{cases} 0, & i = 0, \\ j/2, & i \text{ 为偶数}, \\ (j+1)/2, & i \text{ 为奇数}, \end{cases} \quad (4)$$

式中 i 为 Walsh 序 Walsh 矩阵的行指标, 即该行经过 0 点的次数. 再令

$$\begin{aligned} \text{cal}(l, k) &= \text{Wal}_W(j, k), & i \text{ 为偶数}; \\ \text{sal}(l, k) &= \text{Wal}_W(j, k), & i \text{ 为奇数}. \end{aligned}$$

复数的 Walsh 矩阵可定义为

$$\begin{aligned} \text{Wal}_0(0, k) &= \text{Wal}_W(0, k), \\ \text{Wal}_0(l, k) &= \frac{1}{2} [(1-i)\text{sal}(l, k) + (1+i)\text{cal}(l, k)], \\ \text{Wal}_0\left(\frac{N}{2}, k\right) &= \text{sal}\left(\frac{N}{2}, k\right), \\ \text{Wal}_0\left(\frac{N}{2} + l, k\right) &= \text{Wal}_0^*\left(\frac{N}{2} - l, k\right), \end{aligned} \quad (5)$$

式中

$$\begin{aligned} l &= 1, 2, \dots, \left(\frac{N}{2} - 1\right), \\ k &= 0, 1, \dots, (N-1). \end{aligned}$$

利用 Walsh 序 Walsh 矩阵的么正性(3)式, 可以直接证明

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_k \text{Wal}_0(j, k) \text{Wal}_0^*(j', k) &= \delta_{jj'}, \\ \frac{1}{N} \sum_j \text{Wal}_0^*(j, k) \text{Wal}_0(j, k') &= \delta_{kk'}. \end{aligned} \quad (6)$$

上式表明: 复数的 Walsh 矩阵归一化后也是么正矩阵.

由于任何的么正矩阵都可用全息透镜组成的系统来实现, 我们采用迭代方法^[6], 编写了计算机程序, 并对于实现八维复数 Walsh 变换所需的光学系统进行了设计, 得到了如下结果: (1) 光学系统如图 1 所示. 我们分三种情况考虑: 一种为输入平面和输出平面分

别和两个全息透镜紧贴,如图 1(a) 所示;一种为输出平面和一个全息透镜紧贴,如图 1(b) 所示;一种为输入平面和一个全息透镜紧贴,如图 1(c) 所示。表 1 中列出了用图 1 所示的三种光学系统实现八维复数 Walsh 变换所需的全息透镜数目以及相应的方差,方差的意义见文献[6]。(2)表 2 和表 3 中分别列出了图 1(a) 和 (b) 所示光学系统实现八

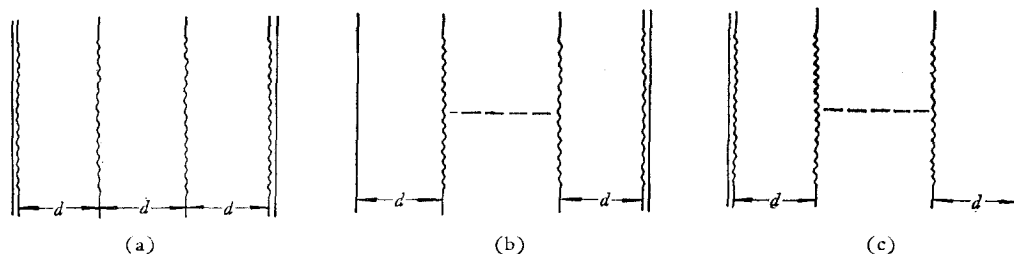


图 1

表 1

光 学 系 统	全息透镜数	方 差
图 1(a)	2	0.0761
	3	0.0761
	4	$<10^{-4}$
图 1(b)	2	0.0761
	3	0.0761
	4	$<10^{-4}$
图 1(c)	2	0.1464
	3	0.0761
	4	0.0761

维复数 Walsh 变换所需全息透镜的数目和各个全息透镜的位相值。如果采用表 2 和表 3 的数据,可以以足够精度实现八维复数 Walsh 变换。

迭代法要求^[6]自由传播矩阵 G_0 是么正的,从而可以确定取样数目 N 、输入孔径 x_m 、输出孔径 x'_m 、光波波长 λ 与全息透镜间距之间的关系。为了具体分析这一点,必须考察 G_0 的性质。光在自由空间的传播如图 2 所示。它的数学形式由菲涅尔-基尔霍夫积分给

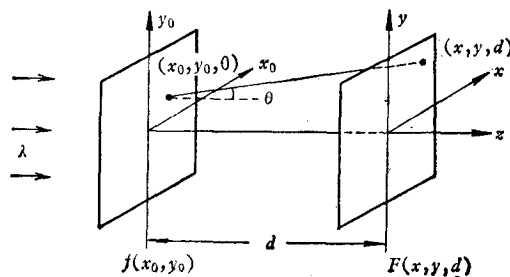


图 2

出:

$$F(x, y; d) = (2j\lambda)^{-1} \iint f(x_0, y_0) (1 + \cos \theta) \frac{e^{ikr}}{r} dx_0 dy_0. \quad (7)$$

表 2

	全息透镜 1	全息透镜 2	全息透镜 3	全息透镜 4
相 对 位 相 值	-0.1652	-0.0206	1.2166	-1.0470
	-2.9083	0.8398	-1.9089	0.8391
	-1.7360	-1.5914	-1.8927	2.0946
	-2.9198	1.6257	1.2327	0.0581
	-0.1652	-0.0206	1.2166	-1.0470
	0.2333	-2.3018	-1.9088	0.8391
	-1.7360	-1.5913	-1.8926	2.0946
	0.2218	-1.5159	1.2328	0.0581

表 3

	全息透镜 1	全息透镜 2	全息透镜 3	全息透镜 4
相 对 位 相 值	-0.1652	-0.0206	1.2307	-1.8324
	0.2268	-1.5161	1.2307	0.4486
	-1.7360	-1.5914	-1.9068	2.88
	0.2282	-2.3015	-1.9088	2.8048
	-0.1652	-0.0206	1.2307	-1.8324
	-2.9148	1.6255	1.2328	-2.6930
	-1.7359	-1.5913	-1.9068	2.88
	-2.9133	0.8401	-1.9088	-0.3368

在傍轴近似下,即假定 $|x - x_0| \ll d$, $|y - y_0| \ll d$, (7) 式可简化成

$$F(x, y; d) = (j\lambda d)^{-1} \iint f(x_0, y_0) \exp \left\{ ik \left[d + (x - x_0)^2 / 2d + (y - y_0)^2 / 2d \right] \right\} dx_0 dy_0. \quad (8)$$

(8) 式可改写成用传播函数表示的形式

$$F(x, y, d) = \iint G_0(x, y; x_0, y_0; d) f(x_0, y_0) dx_0 dy_0, \quad (9)$$

式中

$$G_0(x, y; x_0, y_0; d) = (j\lambda d)^{-1} \cdot \exp \left\{ ikd + \frac{ik}{2d} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] \right\}. \quad (10)$$

(9) 式描述了光在自由空间传播的形式。(10) 式为自由空间传播矩阵 G_0 的表达式。容

易证明

$$G_0^+ G_0 = G_0 G_0^+ = I, \quad (11)$$

式中 G_0^+ 表示 G_0 的转置共轭矩阵, I 表示单位矩阵, 在 x, y, x_0, y_0 连续取值时, 则相应于 $\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)$.

在一维的离散情形下, 有

$$x = \frac{m}{N} x_m, \quad x' = \frac{m'}{N'} x_{m'}. \quad (12)$$

式中 N 和 x_m 分别表示输入平面的取样数目和孔径, N' 和 $x_{m'}$ 则为输出平面的取样数目和孔径, m 和 m' 为正整数. 把(12)式代入(10)式, 可得在离散情形下 G_0 的表达式. 为了保持 G_0 的么正性(11)式, 容易证明下列关系必须得到满足:

$$N = N', \quad N = x_m \cdot x_{m'} / (\lambda d). \quad (13)$$

上式表明输入平面和输出平面的取样数目应相同. 作为一个例子, 取 $N=8$, $\lambda=6328 \text{ \AA}$, $x_m = x_{m'} = 1.04 \text{ mm}$, 从(13)式求得 $d = 213.65 \text{ mm}$.

从(10)式可得

$$G_0(x, y; x_0, y_0) \propto G_0(x; x_0) \cdot G_0(y; y_0). \quad (14)$$

这表明, 在傍轴近似下, x 方向和 y 方向的自由传播矩阵是可分离的. 因此, 如果在 x 方向和 y 方向都采用表 2 和表 3 的数据制作全息透镜, 如图 3 所示, 就可在二维空间实现八维的 Walsh 变换.

从(5)式容易得到 Walsh 序 Walsh 变换的“频谱” $s(l, k)$ 和 $c(l, k)$ [各与 $\text{sal}(l, k)$ 和 $\text{cal}(l, k)$ 相应] 和复数 Walsh 变换的频谱 $o(l, k)$ 的关系.

$$s(0, k) = o(0, k),$$

$$s(l, k) = \frac{1}{2} [(1+i)o(l, k) + (1-i)o(l, N-k)],$$

$$c(l, k) = \frac{1}{2} [(1-i)o(l, k) + (1+i)o(l, N-k)],$$

$$s\left(\frac{N}{2}, k\right) = o\left(\frac{N}{2}, k\right),$$

$$l = 1, 2, \dots, \left(\frac{N}{2} - 1\right), \quad k = 0, 1, \dots, (N-1). \quad (15)$$

从上式看到, 通过复数 Walsh 变换的相加或相减可用以实现 Walsh 序的 Walsh 变换.

综上所述, 采用图 1 所示的光学系统, 取表 2 或表 3 所设计的全息透镜, 以及满足(13)式所要求的关系, 在理论上是能够以足够的精度实现一维或二维空间的八维 Walsh 变换的. 初步的实验证实了上述结论^[8].

作者感谢陈岩松同志在数值计算中给予的帮助.

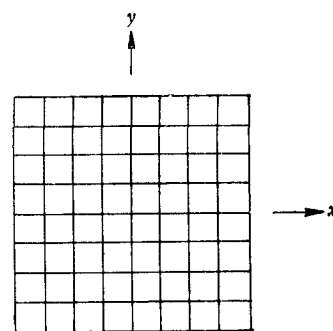


图 3

参 考 文 献

- [1] J. L. Walsh, *Am. F. Math.*, **55** (1923), 5.
- [2] J. N. Bramhall, An Annotated Bibliography on Walsh and Walsh Related Functions (Silver Spring, Maryland, The Johns Hopkins University).
- [3] M. De and L. N. Hazra, *Optica Acta*, **24**(1977), 211; **24**(1977), 221.
- [4] B. E. Krivenkov, P. E. Tverdokhlebov and Yu. V. Chugui, *Appl. Opt.*, **14**(1975), 1829.
- [5] A. A. Васильев, П. В. Вашурин, И. Н. Компанец, *Квантовая электроника*, **4**(1977), 1917.
- [6] 霍裕平、杨国桢、顾本源, 物理学报, **24**(1975), 438; **25**(1976), 31.
- [7] N. Ahmed and K. R. Rao, Orthogonal Transforms for Digital Signal Processing (Springer-Verlag, Berlin. Heidelberg. New York, 1975).
- [8] 陈岩松、王玉堂、李秀英, 本刊本期, 1307.

A SCHEME FOR OPTICAL REALIZATION OF WALSH TRANSFORMATION

YANG GUO-ZHEN PAN SHAO-HUA

(Institute of Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT

In this paper, we analyse the problem of the optical realization of Walsh transformation, and give the design of the optical system which is composed of holographic lenses and can be used to realize the 8×8 complex Walsh transformation in two-dimensional space.