

研究简报

关于超导临界温度级数收敛半径的一个注记

雷 啸 霖

(中国科学院上海冶金研究所)

1979 年 12 月 17 日收到

提 要

本文指出,对于实际的归一化有效声子谱函数 $g(\omega)$, 一般来说, $\bar{z}_{ph} \equiv F(-\omega_{ph}^{-2})$ 是函数 $z = F(y) \equiv \int_0^{\omega_{ph}} \frac{\omega^2 y}{\omega^2 y + 1} g(\omega) d\omega$ 的反函数的分支点. 因此,在估算超导 T_c 级数的收敛半径时,应当予以考虑.

在文献[1]中,吴杭生和吉光达建议:按 T_c 对有效声子谱依赖关系的不同,可以把超导体分成 A 型和 B 型两类,前者 $\lambda < \Lambda$, 后者 $\lambda > \Lambda$. 这里 $1/\Lambda$ 是线性化的 Eliashberg 方程按 $1/\lambda$ 的幂级数解^[2]

$$(2\pi T_c)^{-2} = c_0(\lambda \langle \omega^2 \rangle)^{-1} \left\{ 1 + c_1 \frac{\langle \omega^4 \rangle}{\langle \omega^2 \rangle^2} \frac{1}{\lambda} + \left(c_{21} \frac{\langle \omega^6 \rangle}{\langle \omega^2 \rangle^3} + c_{22} \frac{\langle \omega^4 \rangle^2}{\langle \omega^2 \rangle^4} \right) \frac{1}{\lambda^2} + \dots \right\} \quad (1)$$

的收敛半径. 文献[3]指出,可以用一个各项系数都已知的级数来近似代表严格级数解(1)式,这个级数与 $\mu^* = 0$ 的一级近似级数解的差别,除了一个系数因子以外,只是将 λ 换成 $\bar{\lambda} \equiv \lambda/[0.65(1 + 3.0\mu^*)]$. 因此,这个近似 T_c 级数的收敛半径,从而参数 $1/\Lambda$ 的估值,可以从 $\mu^* = 0$ 的一级近似级数的收敛半径乘 $[0.65(1 + 3.0\mu^*)]^{-1}$ 而得. 文献[3]讨论过计算这个收敛半径的方法.

记 $y \equiv (2\pi T_c)^{-2}$, $z \equiv 1/\lambda$, $\mu^* = 0$ 的一级近似级数是方程

$$z = F(y) \equiv \int_0^{\omega_{ph}} \frac{\omega^2 y}{\omega^2 y + 1} g(\omega) d\omega \quad (2)$$

的解 $y = G(z)$ 在 $z = 0$ 的幂级数展式

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} B_n z^n. \quad (3)$$

这里 $g(\omega) \equiv \frac{2}{\lambda} \alpha^2(\omega) F(\omega)$ 是归一化的有效声子谱, ω_{ph} 是声子频率的上限,

$$\int_0^{\omega_{ph}} g(\omega) d\omega = 1. \quad (4)$$

本文中,我们指出,要得到正确的一级近似级数的收敛半径,点

$$\bar{z}_{ph} \equiv \int_0^{\omega_{ph}} \frac{\omega^2 g(\omega)}{\omega^2 - \omega_{ph}^2} d\omega \quad (5)$$

应当予以考虑.

为了研究级数(3)式的收敛行为,我们将函数 $F(y)$ 因而也就将其反函数 $G(z)$ 从实轴开始解析延拓. 由解析延拓得到的函数(仍用 $F(y)$ 和 $G(z)$ 表示)一般是多值的,幂级数(3)式的收敛半径将决定于函数 $G(z)$ 的满足条件——当 z 为正实数时, $y=G(z)$ 也为正实数——的那一个单值支中离原点最近的奇异点. 显然,把(2)式中的 y 和 z 看作复数就实现了解析延拓的一部分. (2)式中积分所表示的函数是在 y 平面上除负实轴 $(-\infty, -\omega_{ph}^2)$ 外的区域处处有定义的单值解析函数. 可以说从 $-\omega_{ph}^2$ 到 $-\infty$ 这一段负实轴的“上岸” Γ_+ 和“下岸” Γ_- 是这个区域的边界(见图 1). 上岸的一点 $y_+ = -\omega_1^{-2} + i0^+$ 对应于

$$z_+ = \oint_0^{\omega_{ph}} \frac{\omega^2 g(\omega)}{\omega^2 - \omega_1^2} d\omega + i \frac{\pi}{2} \omega_1 g(\omega_1), \quad (6)$$

式中 $\oint$ 代表主值积分. 实参数 $\omega_1 (0 \leq \omega_1 \leq \omega_{ph})$ 的复函数 $z_+(\omega_1)$, 决定了 Γ_+ 在 z 平面的象 γ_+ . 同样, y 平面负实轴下岸 Γ_- 的一点 $y_- = -\omega_1^{-2} - i0^+$, 对应于

$$z_- = \oint_0^{\omega_{ph}} \frac{\omega^2 g(\omega)}{\omega^2 - \omega_1^2} d\omega - i \frac{\pi}{2} \omega_1 g(\omega_1). \quad (7)$$

曲线 $z_-(\omega_1) (0 \leq \omega_1 \leq \omega_{ph})$ 是 Γ_- 在 z 平面的象 γ_- . (2)式所表示的单值解析函数 $z = F(y)$ 将有割缝的 y 平面映射到 z 平面上曲线 γ_+ 和 γ_- 所包围的区域内. 下面,我们考虑这个函数进一步的解析延拓.

设 ω_1 是区间 $(0, \omega_{ph})$ 内的任一点. 如果谱函数 $g(\omega)$ 在 ω_1 有连续的微商, 则对充分小的 τ , 可得

$$\text{Im}[z_+(\omega_1 + \tau) - z_+(\omega_1)] = \frac{\pi}{2} [g(\omega_1) + \omega_1 g'(\omega_1)] \tau, \quad (8)$$

$$\text{Re}[z_+(\omega_1 + \tau) - z_+(\omega_1)] = \left[\int_0^{\omega_{ph}} \frac{f(\omega)}{\omega - \omega_1} d\omega \right] \tau, \quad (9)$$

其中

$$f(\omega) \equiv \frac{\omega}{\omega + \omega_1} \left[\frac{2\omega_1}{\omega + \omega_1} g(\omega) + \omega g'(\omega) \right]. \quad (9a)$$

因而实变量函数 $z_+(\omega)$ 在 ω_1 点是可微的, 而且其微商 $z'_+(\omega)$ 与 $z_+(\omega)$ 有同样的函数形式. 可见, 只要 $g(\omega)$ 在 ω_1 点是解析的(有任意阶微商), 则 $z_+(\omega)$ 在 ω_1 点也是解析的. 由于谱函数的奇异性只可能发生在频率的上端 ω_{ph} 及 $(0, \omega_{ph})$ 区间内一些孤立的点, 而且 $\frac{\pi}{2} [g(\omega_1) + \omega_1 g'(\omega_1)]$ 及 $\int_0^{\omega_{ph}} \frac{f(\omega)}{\omega - \omega_1} d\omega$ 同时为零的情况至多只能在个别孤立的地方出现; 所以, 在 ω_{ph} 附近必存在有限区间 $(\bar{\omega}, \omega_{ph})$, 当 $\bar{\omega} < \omega < \omega_{ph}$ 时, 弧 $z_+(\omega_1)$ 是正则解析的. 由于这段弧是 y 平面上一段直线的映射, 因而按照对称原理^[4], 函数 $y = G(z)$ 可以越过这段弧解析延拓. 对于 γ_- 边界当然也有同样的结论.

假定谱函数在频率上端的行为是

$$g(\omega) = A(\omega_{\text{ph}} - \omega)^n, \quad (10)$$

$A > 0$. 按 Van Hove 定理^[5], 对理想的三维无限晶格, 在严格简谐力支配下的振动, 声子谱中临界点的奇异性是 $n = \frac{1}{2}$. 但任何晶格缺陷、无序或非谐效应都将平滑临界点的尖锐性^[6], 从而使奇异行为比 $n = \frac{1}{2}$ 为弱. 所以我们考虑 $n \geq \frac{1}{2}$ 就足够了.

根据(6)式, 对充分小的 τ , 只保留首项时,

$$\text{Im}[z_+(\omega_{\text{ph}} - \tau) - \bar{z}_{\text{ph}}] = \frac{\pi}{2} A \omega_{\text{ph}} \tau^n, \quad (11)$$

$$\text{Re}[z_+(\omega_{\text{ph}} - \tau) - \bar{z}_{\text{ph}}] = \begin{cases} -\frac{A}{2} \omega_{\text{ph}} a \tau & \text{当 } n > 1, \\ -\frac{A}{2} \omega_{\text{ph}} \tau \ln \frac{1}{\tau} & \text{当 } n = 1, \\ -\frac{A}{2} \omega_{\text{ph}} b_n \tau^n & \text{当 } n < 1, \end{cases} \quad (12)$$

上式中

$$a = \frac{4}{A} \int_0^{\omega_{\text{ph}}} \frac{\omega^2 g(\omega) d\omega}{(\omega + \omega_{\text{ph}})^2 (\omega - \omega_{\text{ph}})^2} > 0, \quad (13)$$

$$b_n = \int_0^1 \frac{(1+x)^n - (1-x)^n}{x} dx + \int_1^\infty \frac{(1+x)^n - x^n}{x} dx - \frac{1}{n}. \quad (14)$$

当 $n > \frac{1}{2}$ 时, $b_n > 0$. 因此在 $\bar{z}_{\text{ph}}$ 附近曲线 γ_+ 的行为大致如图 2 和图 3 所示的形式, 而曲线 γ_- 是 γ_+ 相对于实轴的镜像. 这时, 容易看出 $\bar{z}_{\text{ph}}$ 是函数 $G(z)$ 的分支点. 为此, 我们考虑 $\bar{z}_{\text{ph}}$ 左边近处实轴上的一点 $\bar{z}$. 设相对于正则解析弧 γ_+ 与 $\bar{z}$ 对称的点是 z_1 , 而 z_1 是 y_1 点的映射, 则按照对称原理, 经弧 γ_+ 解析延拓到 $\bar{z}$ 时必对应于 y_1 相对于 Γ_+ 的对称点 y_1^* . 另一方面, 相对于弧 γ_- 与 $\bar{z}$ 对称的点是 z_1^* , 它显然是 y_1^* 的映射. 所以经 γ_+ 和 γ_- 解析延拓到 $\bar{z}$ 所对应的 y 是不同的, 因而 $\bar{z}_{\text{ph}}$ 必是函数 $y = G(z)$ 的分支点.

当 $n = \frac{1}{2}$ 时, $b_n = 0$. 初看起来 γ_+ 和 γ_- 在 $\bar{z}_{\text{ph}}$ 点似乎吻合, 但进一步分析表明, 企图把 γ_+ 和 γ_- 两条曲线用一个宗量连续变化的函数表示时, 一般情况下在 $\bar{z}_{\text{ph}}$ 点总是不解析的. 这可说明如下: 假定已用一个连续变化的参数 t 的函数 $\gamma(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t)$ 来描述曲线 $\gamma_+ + \gamma_-$. 不失普遍性, 可设 $t = 0$ 相应于点 $\bar{z}_{\text{ph}}$, $t < 0$ 相应于 γ_- 部分, $t > 0$ 相应于 γ_+ 部分. 而且, 由于(6)和(7)式的对称性总可以要求

$$\gamma_1(t) = \gamma_1(-t), \quad \gamma_2(t) = -\gamma_2(-t). \quad (15)$$

如果 $\gamma(t)$ 在 $t = 0$ 解析, 即 $\gamma_1(t)$ 和 $\gamma_2(t)$ 可在 $t = 0$ 展成 t 的幂级数, 则 $\gamma_1(t)$ 的展式只能有偶次幂项, $\gamma_2(t)$ 的展式只能有奇次幂项. 根据 Van Hove 定理^[5], $g(\omega)$ 在 ω_{ph} 附近的行为是

$$g(\omega) = A(\omega_{\text{ph}} - \omega)^{1/2} + A_1(\omega_{\text{ph}} - \omega) + \dots, \quad (16)$$

则不难看出

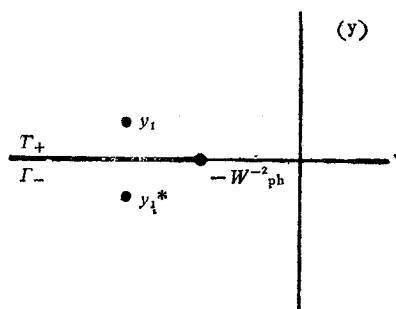


图 1

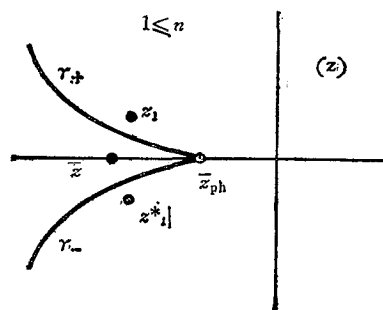


图 2

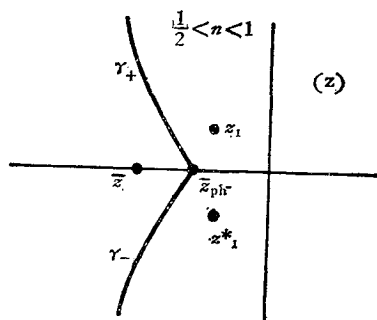


图 3

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}[z_+(\omega_{ph} - \tau) - \bar{z}_{ph}] &= -\operatorname{Im}[z_-(\omega_{ph} - \tau) - \bar{z}_{ph}] \\ &= \frac{\pi}{2} A \omega_{ph} \tau^{1/2} + \frac{\pi}{2} A_1 \omega_{ph} \tau + \dots, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[z_+(\omega_{ph} - \tau) - \bar{z}_{ph}] &= \operatorname{Re}[z_-(\omega_{ph} - \tau) - \bar{z}_{ph}] \\ &= \beta_1 \tau + \beta_{3/2} \tau^{3/2} + \dots. \end{aligned} \quad (18)$$

一般地说, (16) 式中 τ 的整数次幂的系数不会都为零, 所以 (17) 式中总是同时存在整数次幂及半整数次幂的项。即使 $g(\omega)$ 中所有整数次幂的系数都为零, 一般情况下 (18) 式中也会有不为零的半整数次幂系数。因此, 要造成满足 (15) 式, 在 $t=0$ 又解析的 $\gamma_1(t)$ 和 $\gamma_2(t)$ 一般是不可能的。由此可见, 即使是 $n = \frac{1}{2}$ 的情况, γ_+ 和 γ_- 也必须看作两条解析曲线。于是, 对于在 $\bar{z}_{ph}$ 左边实轴上的点 $\bar{z}$, 相对于 γ_+ 的对称点 z_1 将不在实轴上, 所以它是 y 平面离实轴有限远点 y_1 的映射。类似于前面的讨论, 可知经 γ_+ 和 γ_- 延拓到 $\bar{z}$ 时将对应于不同的 y , 故 $\bar{z}_{ph}$ 仍是分支点。

这样就证明了: 不论 $g(\omega)$ 在 ω_{ph} 附近行为如何, 一般情况下 $\bar{z}_{ph}$ 总是反函数 $y = G(z)$ 的分支点。很明显, $\bar{z}_{ph}$ 点属于 $G(z)$ 的满足条件——当 z 为正实数时, $y = G(z)$ 也为正实数——的那个单值分支。因此, $\bar{z}_{ph}$ 要限制级数 (3) 式的收敛半径, 如果它离原点的距离比属于这个单值分支的其他奇点更近。

作者在进行此项工作时与吴杭生同志进行了多次极为有益的讨论, 谨此致谢。

参 考 文 献

- [1] 吴杭生、吉光达, 中国科学 **6** (1979), 6, 657.
- [2] 吴杭生、蔡建华、龚昌德、吉光达、蔡俊道, 物理学报, **26**(1977), 509.
- [3] 蔡俊道、吉光达、吴杭生、龚昌德、蔡建华, 物理学报, **28**(1979), 393.
- [4] 例如, И. И. 普里瓦洛夫, 复变函数引论, 高等教育出版社 (1956 年).
- [5] L. Van Hove, *Phys. Rev.*, **89** (1953), 1189.
- [6] R. C. Dynes, J. M. Rowell, *Phys. Rev.*, **187** (1969), 821.

A NOTE ON THE RADIUS OF CONVERGENCE OF THE SERIES FOR SUPERCONDUCTING CRITICAL TEMPERATURE

LEI XIAO-LIN

(Shanghai Institute of Metallurgy, Academia Sinica)

ABSTRACT

It is pointed out that $z_{ph} \equiv F(-\omega_{ph}^{-2})$ is generally a branch point of the inverse function of the function

$$z = F(y) \equiv \int_0^{\omega_{ph}} \frac{\omega^2 y}{\omega^2 y + 1} g(\omega) d\omega,$$

where $g(\omega)$ is the normalized effective phonon spectral function of the system. Therefore it should be taken into account in evaluating the radius of convergence of the series for superconducting critical temperature of the system.