

关于一级近似 T_c 级数解的收敛问题

周子舫 茅德强 顾一鸣 吴杭生

(中国科学技术大学)

1980年2月13日收到

提 要

本文通过一个实例说明: $\mu^* = 0$ 时, 一级近似 T_c 级数解的收敛半径既不是由 $\bar{z}_{ph} = -\int_0^{\omega_{ph}} d\omega g(\omega)$ 决定的, 也不是由 $\bar{z}_{ph} = \int_0^{\omega_{ph}} d\omega g(\omega) \frac{\omega^2}{\omega_{ph}^2 + \omega^2}$ 决定的.

由于严格的 T_c 级数解的收敛半径 $1/\Lambda$ 可以从 $\mu^* = 0$ 时, 一级近似 T_c 级数解的收敛半径 $1/\Lambda_1$ 除以 $0.63 + 3\mu^*$ 得到^[1,2], 所以计算 Λ 的任务便归结为如何求出 Λ_1 的问题了. 假设复变函数

$$z = F(y) = \int_0^{\omega_{ph}} d\omega g(\omega) \frac{\omega^2 y}{\omega^2 y + 1} \quad (1)$$

的反函数 $y = G(z)$ 离原点 $z = 0$ 最近的奇点为 z_s , z_s 的绝对值便是 $1/\Lambda_1$ ^[3]. 按照文献[3]的看法, 奇点 z_s 或者是位于 z 复平面的正实轴上的 $z = 1$ 极点, 或者是位于复平面中的正则分枝点 z , 看它们哪一个离原点 $z = 0$ 最近而定. 因此,

$$\frac{1}{\Lambda_1} = \min(|z_s|, 1). \quad (2)$$

用上述方法计算出的 Λ 值^[1,2]表明了, 对一些重要的 T_c 较高的超导体, 严格的 T_c 级数解是适用的.

但是, 最近一些作者对(2)式提出了异议.

雷啸霖^[4]认为, 位于 z 复平面的负实轴上的点

$$\bar{z}_{ph} = F(-\omega_{ph}^{-2}) = -\int_0^{\omega_{ph}} d\omega g(\omega) \frac{\omega^2}{\omega_{ph}^2 - \omega^2} \quad (3)$$

也是函数 $y = G(z)$ 的分枝点, 因此在计算 Λ 时应当予以考虑. 按照这个看法, 正确的计算 Λ_1 公式应为

$$\frac{1}{\Lambda_1} = \min(|\bar{z}_{ph}|, |z_s|, 1). \quad (4)$$

Cohen 认为¹⁾, 文献[5]在导出 T_c 级数解的过程中用到了如下的展开式:

$$\lambda(1) = \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} \frac{\langle \omega^{2l} \rangle}{(2\pi T)^{2l}}. \quad (5)$$

而此级数只有当 $T > \Theta$ 时才是收敛的, 所以 T_c 级数解只能适用于 $T_c > \Theta$ 情形, 其中 $\Theta = \omega_{ph}/k$ 是 Debye 温度. 这个看法意味着:

$$\frac{1}{\Lambda_1} = z_{ph}, \quad (6)$$

式中

$$z_{ph} = F(\omega_{ph}^{-2}) = \int_0^{\omega_{ph}} d\omega g(\omega) \frac{\omega^2}{\omega_{ph}^2 - \omega^2}. \quad (7)$$

应当指出, 由(4)式或(6)式算出的 $1/\Lambda_1$ 都是如此地小, 以致迄今已发现的超导体没有一个能落在严格的 T_c 级数解的收敛圆内. 这样, 这个 T_c 级数解实际上也就没有什么价值了. 可是, 正确的计算 Λ_1 的公式是(2)式, 还是(4)式或(6)式呢? 这就是本文企图澄清的问题.

二

由于从隧道实验定出的有效声子谱 $\alpha^2 F(\omega)$ 只有两位有效数字, 不能满足计算的需要, 所以我们不直接采用实际谱, 而用如下的理想谱:

$$\alpha^2 F(\omega) = \begin{cases} 0.015\omega^2 & 0 \leq \omega \leq 20 - 4\sqrt{\frac{55}{3}}; \\ 0.6\omega - 1.6 & 20 - 4\sqrt{\frac{55}{3}} \leq \omega \leq 7.8 - \sqrt{11.45}; \\ 0.2(\omega - 6.3)^2 + 0.34 & 7.8 - \sqrt{11.45} \leq \omega \leq 3.25 + 5\sqrt{1.0069}; \\ -1.22\omega + 11.2 & 3.25 + 5\sqrt{1.0069} \leq \omega \leq -\frac{4.5}{0.7} + \frac{32}{0.7}\sqrt{0.115}; \\ 0.035(\omega - 11)^2 & -\frac{4.5}{0.7} + \frac{32}{0.7}\sqrt{0.115} \leq \omega \leq 11. \end{cases} \quad (8)$$

ω 的单位为 meV. 它是由三条抛物线和两条直线组成的. 我们调节抛物线的曲率和极小点的位置以及直线的斜率和截距, 使它尽可能地逼近实际的 Pb 谱^[6]. 表 1 中列出的

表 1

	λ	$\langle \omega \rangle$ (meV)	$\langle \omega^2 \rangle$ (meV) ²	$\langle \omega^3 \rangle$ (meV) ³	$\langle \omega^4 \rangle$ (meV) ⁴
理想谱	1.475	5.249	31.53	209.2	1493
Pb 谱	1.55	5.21	30.9	204	1450

1) 段三孚先生给蔡俊道的信中转述的 Cohen 批评意见.

用这两种谱算出的 λ 和头几级矩的数值,表明了它们接近的程度.

利用关系式 $g(\omega) = \frac{2}{\lambda\omega} \alpha^2 F(\omega)$, 算出和(8)式相应的 $g(\omega)$. 把它代入(3)和(7)式,计算得到

$$\bar{z}_{ph} = -0.4844; \quad z_{ph} = 0.1909. \quad (9)$$

接着,确定函数(1)式的反函数 $y = G(z)$ 离原点 $z = 0$ 最近的正则分枝点 $\bar{z}^{[2]}$, 得到

$$\bar{z}_+ = 0.147 + 0.875i, \quad (10a)$$

$$\bar{z}_- = 0.147 - 0.875i. \quad (10b)$$

显然, $|\bar{z}_+| = |\bar{z}_-|$, 并且

$$1 > |\bar{z}_\pm| > |\bar{z}_{ph}| > z_{ph}. \quad (11)$$

因此,由(2),(4)和(6)式算出的 $\bar{\lambda}_i$ 分别为 0.887, 0.484 和 0.191. 以这些值为半径, 以 $z = 0$ 为圆心画出的圆分别用实线、虚线和点线画在图 1 中. 在图 1 中还标出了 $\bar{z}_\pm$, $\bar{z}_{ph}$ 和 z_{ph} 的位置.

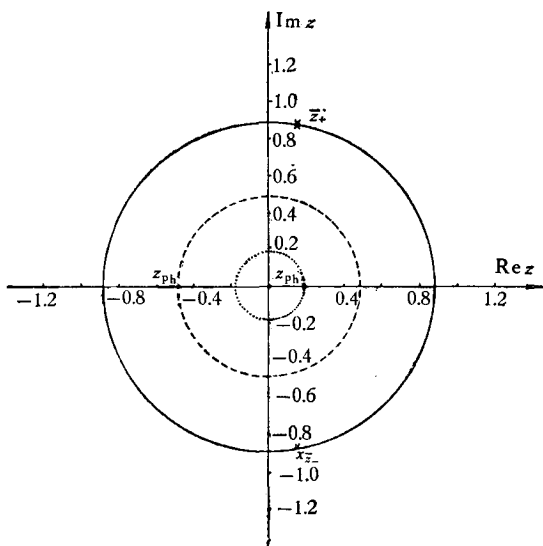


图 1

$$\text{再把 } g(\omega) \text{ 代入 } \langle \omega^n \rangle = \int_0^{\omega_{ph}} d\omega$$

$\cdot g(\omega) \omega^n$, 算出各级矩. 同时, 把 λ 分别取为 $\lambda_1 = 2.1994$ 和 $\lambda_2 = 1.9768$, 代入一级近似 T_c 级数解 ($\mu^* = 0$)^[5]:

$$\frac{\lambda \langle \omega^2 \rangle}{4\pi^2 T_c^2} = 1 + \frac{1}{\lambda} \frac{\langle \omega^4 \rangle}{\langle \omega^2 \rangle^2} + \frac{1}{\lambda^2} \left(2 \frac{\langle \omega^4 \rangle^2}{\langle \omega^2 \rangle^4} - \frac{\langle \omega^6 \rangle}{\langle \omega^2 \rangle^3} \right) + \dots, \quad (12)$$

算出右端头十一项的数值以及由此十一项算出的 T_c 值. 计算结果列在表 2 中. 在表 2 的最后一行列出了由 Eliashberg 方程计算出的 T_c 严格值.

按照雷啸霖的看法, $\bar{z}_{ph}$ 也是函数

$y = G(z)$ 的分枝点. 因此, 级数解(12)式的收敛半径 $1/\bar{\lambda}_i$ 是由 $\bar{z}_{ph}$ 决定的, 等于 0.4844. 相应的收敛圆是由图 1 中的虚线所表示的. 现在, $1/\lambda = 1/\lambda_2 = 0.5059$ 位于收敛圆外, 级数解(12)式应是发散级数; $1/\lambda = 1/\lambda_1 = 0.4547$ 虽然位于收敛圆内, 但由于它邻近收敛圆, 级数解(12)式应收敛得非常慢. 可是, 表 2 表明的情况并不是这样. 不论是前者, 还是后者, 级数解都是收敛的, 并且仅级数解的头十一项算出的 T_c 值便可以和严格的 T_c 值很好地符合. 可见, 级数解(12)式的收敛半径 $1/\bar{\lambda}_i$ 不是由 $\bar{z}_{ph}$ 决定的.

同样, $1/\bar{\lambda}_i$ 也不是由 z_{ph} 决定的. 这个问题实际上已在文献[3]中详细讨论过. 文献[3]指出, 尽管展开式(5)只有当 $T > \Theta$ 时, 才是收敛的, 但由此式经 Lagrange 公式反解得到的 T_c 级数, 仍然可以在大得多的范围内收敛. 表 2 中的数据再次肯定了这个结论.

表 2

		$\lambda_1 = 2.1994$	$\lambda_2 = 1.9768$
头 十 一 项 的 数 值	1	1.0000	1.0000
	2	0.6826	0.7595
	3	0.3546	0.4391
	4	0.1647	0.2268
	5	0.0395	0.1332
	6	0.0354	0.0604
	7	0.0168	0.0318
	8	0.0080	0.0168
	9	0.0035	0.0082
	10	0.0017	0.0044
	11	0.0007	0.0023
$T_c(\text{级数解})$		0.8661 meV	0.7701 meV
$T_c(\text{严格解})$		0.8660 meV	0.7698 meV

参 考 文 献

- [1] 周子舫、吴杭生、茅德强、顾一鸣, 物理学报, **29** (1980), 1186.
 [2] 蔡俊道、吉光达、吴杭生、蔡建华、龚昌德, 物理学报, **28**(1979), 394.
 [3] 龚昌德、吴杭生、蔡建华、蔡俊道、吉光达, 物理学报, **27**(1978), 85.
 [4] 雷啸霖, 本刊本期.
 [5] 吴杭生、蔡建华、龚昌德、吉光达、蔡俊道, 物理学报, **26**(1977), 509.
 [6] J. M. Rowell, W. L. McMillan and R. C. Dynes, "A Tabulation of the Electron-phonon Interaction in Superconducting Metals and Alloys", Part I.

NOTE ON THE PROBLEM OF THE CONVERGENCE OF THE
FIRST ORDER APPROXIMATE T_c SERIES SOLUTION

ZHOU ZI-FANG MAO DE-QIANG

GU YI-MING WU HANG-SHENG

(University of Science and Technology of China)

ABSTRACT

In this paper, an example is given, through which we have arrived at the following conclusion: the convergence radius of the first order approximate T_c series solution

for $\mu^*=0$ is determined neither by $\bar{z}_{ph} = - \int_0^{\omega_{ph}} d\omega g(\omega) \frac{\omega^2}{\omega_{ph}^2 - \omega^2}$ nor by $z_{ph} =$

$$\int_0^{\omega_{ph}} d\omega g(\omega) \frac{\omega^2}{\omega_{ph}^2 + \omega^2}.$$