

随机磁场对漂移波本征模的影响

张承福

(北京大学物理系)

1979年10月22日收到

提 要

本文分析随机磁场对低频漂移波本征模的影响。计算表明,存在随机磁场可影响电子对波的响应,改变电子色散函数。在有理磁面附近($k_{\parallel} \simeq 0$ 处),这种变化尤大,随机场可使电子色散函数变得相当平缓,这对漂移波本征模的稳定性有很大影响。本文证明了,在足够强的(但仍是实验允许范围内的)随机磁场下,漂移波普适模可成为绝对不稳定的。

一、引 言

低频漂移波与等离子体中的反常输运紧密相关。近年来,对低频漂移波本征模稳定性的研究取得了不少进展。主要进展是证明了原来认为不稳定的所谓“普适模”实际上是绝对稳定的^[1-4],而实验上发现的不稳定性则被归之为对流不稳定性。

另一方面,不少理论研究表明,在环形磁约束等离子体中,由于存在各种微观的电磁模,在规则的(平均的)磁场形态上还存在着小的、随机性的磁场。这种随机场可引起显著的电子热导,认为这可能是等离子体中反常输运的重要原因之一^[5,6]。一些实验迹象也表明可能存在随机磁场^[7,8]。

自然地会产生一个问题:如果随机磁场对稳态输运是重要的,它对漂移波色散关系和稳定性会有什么影响呢?本文企图回答这一问题。

计算结果表明,存在随机磁场可改变电子对波的响应,因而改变电子色散函数。当随机场足够强时,可使电子色散函数变得很平缓,这对漂移波本征模的稳定性有很大影响。本文证明了,当随机磁场增强时,漂移波本征模可成为绝对不稳定的。

二、随机磁场对电子色散函数的影响

取坐标如下:密度梯度在 x 方向,主磁场为 z 方向,平均磁场为 $\mathbf{B} = B_0(0, x/L_s, 1)$,其中 L_s 是磁剪切长度。

无随机磁场时,按通常的轨道积分方法^[9]可求出粒子(e, i)的扰动分布函数为

$$f_1 = -\frac{e\varphi(t)}{T} f_M [1 + (\omega - \omega_*)I], \quad (1)$$

式中

$$\begin{aligned}
 I &= i \int_{-\infty}^t dt_1 \exp \{ -i(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel})(t_1 - t) + i\xi \\
 &\quad \times [\sin(\phi - \alpha + \Omega_0 t_1) - \sin(\phi - \alpha + \Omega_0 t)] \}, \quad (2) \\
 \omega_* &= k_y \frac{cT}{eB} \frac{1}{n} \frac{dn}{dx}, \quad k_{\parallel} = k_y x / L_s, \quad \Omega_0 = eB_0 / mc, \\
 \tan \phi &= k_y / k_x, \quad \xi = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \cdot v_{\perp} / \Omega_0,
 \end{aligned}$$

f_M 是麦氏分布, α 是速度位相角.

一般漂移波的垂直方向波长比电子拉摩半径 ρ_e 大得多, 即 $k_{\perp} \rho_e \ll 1$, 所以, 对于电子, (2) 式可化简为

$$I_e = i \int_{-\infty}^t dt_1 \exp \{ -i(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel})(t_1 - t) \} = - \frac{1}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}}. \quad (3)$$

I_e 对麦氏分布的平均值为

$$\langle I_e \rangle_M = - \frac{1}{\omega} Z_e(\mathcal{S}), \quad (4)$$

式中

$$Z_e(\mathcal{S}) = \frac{\mathcal{S}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-V^2} dV}{\mathcal{S} - V + i0^+}. \quad (5)$$

这就是通常的电子色散函数. 其中 $V = v_{\parallel} / v_{Te}$, $\mathcal{S} = \omega / k_{\parallel} v_{Te}$, v_{Te} 是平均电子热运动速度.

如果在上述平均磁场上还叠加有小的随机性磁场, 将有什么改变呢? 存在随机磁场的主要作用是使粒子相对于平均的磁力线有一横向扩散. 设在 y 方向存在着空间均匀的、稳态的随机磁场, 则 t_0 时处于 y_0 的一群粒子, 到 t 时在 y 处发现这些粒子的几率为^[5]

$$p(y_0, t_0; y, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D(t - t_0)}} \exp \{ -(y - y_0)^2 / 4D(t - t_0) \}, \quad (6)$$

式中 $D = D_{My} |v_{\parallel}|$ 是粒子的空间扩散系数, D_{My} 是由磁结构性质决定的一个常数, 反映随机场的大小. 正是由于 D 正比于粒子速度, 所以在随机场中离子扩散要比电子慢得多. 由于平衡态时 y 方向是均匀的, 这种扩散的非双极性不产生宏观效果, 也不会建立双极电场. 在波动问题中, 这种随机扩散则将改变色散关系, $D_i / D_e \ll 1$ 则表示随机场主要改变电子对波的响应, 而对离子的影响是可略去. (这与静电波湍流扩散情形很不相同, 在那里, 扩散是双极的, 由于离子也参与扩散, 湍流扩散项总是阻尼因素^[10], 而这里则不然.) 因此, 下面只考虑随机场对电子的影响.

根据轨道积分法, 电子在 y 方向有扩散相应于在 I_e 的表式 (3) 中, 被积函数还应乘上因子 $\langle \varphi(y_1) / \varphi(y) \rangle_p = \langle e^{ik_y(y_1 - y)} \rangle_p$, 其中 $\langle \rangle_p$ 表示对 (6) 式的几率平均, 即

$$\langle e^{ik_y(y_1 - y)} \rangle_p = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy_1}{\sqrt{4\pi D(t - t_1)}} \exp \left\{ -\frac{(y - y_1)^2}{4D(t - t_1)} + ik_y(y_1 - y) \right\} = e^{-k_y^2 D(t - t_1)}. \quad (7)$$

所以

$$\begin{aligned}
 I_e &= i \int_{-\infty}^t dt_1 \exp \{ -i(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} + ik_y^2 D_{My} |v_{\parallel}|)(t_1 - t) \} \\
 &= -(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} + ik_y^2 D_{My} |v_{\parallel}|)^{-1}. \quad (8)
 \end{aligned}$$

以上考虑的是 y 方向随机磁场 D_{My} 对 I_e 的影响. 实际上, x 方向也有随机场 D_{Mx} (在稳态输运问题中有兴趣的正是此项, 关于 D_{Mx} 与 D_{My} 的关系目前不很清楚. 从物理上看, 考虑到 x 方向有磁剪切而 y 方向则无, 似应有 $D_{My} \geq D_{Mx}$, 强湍流时应有 $D_{My} \simeq D_{Mx}$. 初步的实验测量表明^[8] $D_{Mx} \simeq D_{My}$). 则在 I_e 的表式 (8) 的被积函数中还应乘上因子 $\langle \varphi(x_1)/\varphi(x) \rangle_p$. 此因子的严格数学处理是十分棘手的, 原因在于: 1. x 方向是梯度方向, 对平衡态必然存在双极电场 E_{x0} , 这使粒子转移几率不再是 (6) 式的高斯分布了. 2. 更大的困难在于 $\varphi(x)$ 非简谐形式, 而且 $\varphi(x)$ 应由本征方程求解后才能确定, 这就使本征方程成为异常复杂的积分方程了. 我们用如下近似方法处理这一困难: 先令

$$\langle \varphi(x_1)/\varphi(x) \rangle_p = 1,$$

即忽略 D_{Mx} 的影响, 只考虑 D_{My} 对漂移波的影响, 这样也可解出 $\varphi(x)$ 的近似解. 然后证明 (见附录) 在我们感兴趣的条件下 ($D_{My} \geq D_{Mx}$, D_{My} 足够大, $k_y \rho_i \lesssim 1$), $\langle \varphi(x_1)/\varphi(x) \rangle_p$ 对 1 的偏离是小量, 即 D_{Mx} 对漂移波的影响是不重要的, 起主要作用的是 D_{My} 项. 因此, 上述近似处理方法是自洽的. (这与稳态输运问题很不同, 在那里, D_{My} 不引起宏观效果, 仅 D_{Mx} 对应于反常输运.) 下面可以从 (8) 式出发计算电子色散函数. 求 I_e 对麦氏分布的平均

$$\langle I_e \rangle_M = -\frac{1}{\omega} W(\mathcal{S}, \delta), \quad (9)$$

$$W(\mathcal{S}, \delta) = \frac{\mathcal{S}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-V^2} dV}{\mathcal{S} - V + i\delta \mathcal{S} |V|}, \quad (10)$$

其中 $\delta = k_y^2 D_T / \omega$, $D_T = D_{My} v_{Te}$ 代表具有平均热运动速度的电子的扩散系数. $W(\mathcal{S}, \delta)$ 是存在随机场时的电子色散函数. 显然, 当 $\delta \rightarrow 0$ 时有 $W \rightarrow Z_e$. 易证 W 是 $\mathcal{S}$ 的偶函数, 为讨论方便, 下面总可认为 $\mathcal{S}$ 是正的.

由 (10) 式经简单的数学变换可得 $W(\mathcal{S}, \delta)$ 的实部与虚部

$$\text{Re} W = \frac{\mathcal{S}_1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\mathcal{S} - \mathcal{S}_1) - z}{z^2 + \beta} e^{-(z+\mathcal{S}_1)^2} dz, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \text{Im} W = & -\sqrt{\frac{\beta}{\pi}} \left\{ \int_{\mathcal{S}_1}^{\infty} \frac{dz}{z^2 + \beta} [(z + \mathcal{S}_1)e^{-(z+\mathcal{S}_1)^2} + (z - \mathcal{S}_1)e^{-(z-\mathcal{S}_1)^2}] \right. \\ & \left. + \int_{-\mathcal{S}_1}^{\mathcal{S}_1} \frac{dz}{z^2 + \beta} (z + \mathcal{S}_1)e^{-(z+\mathcal{S}_1)^2} \right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

式中

$$\mathcal{S}_1 \equiv \frac{\mathcal{S}}{(1 + \delta^2 \mathcal{S}^2)}, \quad (13)$$

$$\beta \equiv \delta^2 \mathcal{S}^2 \mathcal{S}_1^2. \quad (14)$$

注意到在本征模问题中,

$$\mathcal{S} = \omega / k_{\parallel} v_{Te} = \omega L_s / k_y v_{Te} x$$

是坐标 x 的函数, 在有理磁面附近 $\mathcal{S} \rightarrow \infty$, 而在漂移波存在的主要区域则 $\mathcal{S} \ll 1$. 图 1 给出 $\mathcal{S}_1$ 与 $\mathcal{S}$, δ 的关系, 可见当 $\delta > 1$ 时就可将 $\mathcal{S}_1$ 视为小量了. 由下面可知, $\delta > 1$ 正代表我们感兴趣的、随机场对漂移波有明显影响的范围. 因此, 在以下计算中都假定了

$\delta > 1$, $\mathcal{S}_1$ 是小量. 在 (11), (12) 式中对 $\mathcal{S}_1$ 作展开, 保留到 $\mathcal{S}_1^2$ 项, 可得

$$\operatorname{Re} W = e^{-\mathcal{S}_1^2} \left\{ 2\mathcal{S}_1^2(1 + \mathcal{S}\mathcal{S}_1) + \frac{\sqrt{\pi}}{\delta} \left(1 - \frac{\mathcal{S}_1}{\mathcal{S}} \right) e^{\beta} [1 - \Phi(\delta\mathcal{S}\mathcal{S}_1)] \right\}, \quad (15)$$

$$\operatorname{Im} W = -\sqrt{\frac{\beta}{\pi}} e^{-\mathcal{S}_1^2} \left[\frac{2(1+2\beta)}{\delta\mathcal{S}} \operatorname{tg}^{-1}(1/\delta\mathcal{S}) - e^{\beta} E_i(-\mathcal{S}^2/(1+\delta^2\mathcal{S}^2)) \right], \quad (16)$$

式中

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt \quad (\text{误差函数}), \quad (17)$$

$$E_i(-z) = -\int_z^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (z > 0, \text{指数函数}). \quad (18)$$

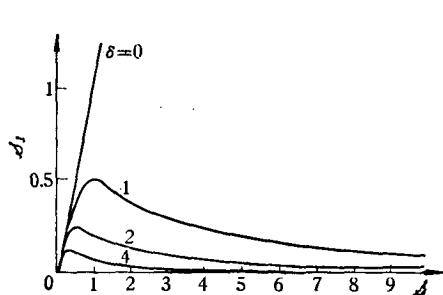


图 1 $\mathcal{S}_1$ - $\mathcal{S}$ 图

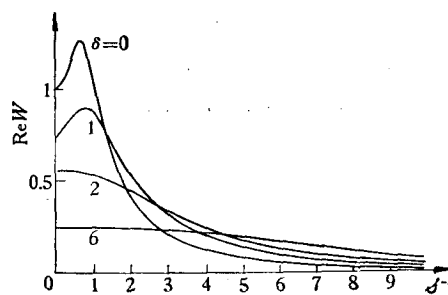


图 2 $\operatorname{Re} W$ - $\mathcal{S}^{-1}$ 图

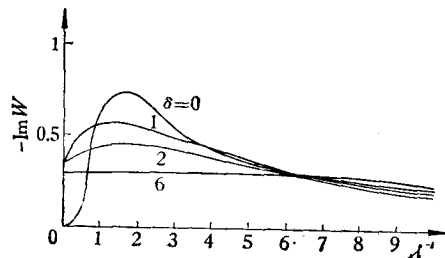


图 3 $\operatorname{Im} W$ - $\mathcal{S}^{-1}$ 图

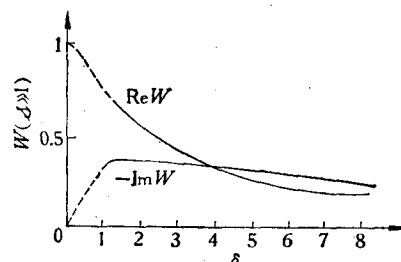


图 4 $\mathcal{S} \gg 1$ 时的 W - δ 图

$E_i(-z)$ 的级数表式为

$$E_i(-z) = c + \ln z - z + \frac{z^2}{2 \cdot 2!} - \frac{z^3}{3 \cdot 3!} + \cdots, \quad (19)$$

式中欧勒常数 $c = 0.5772 \cdots$. 计算中已用到积分关系

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^2 + \beta} dt = \frac{\pi}{\sqrt{\beta}} e^{\beta} [1 - \Phi(\sqrt{\beta})], \quad (20)$$

$$\int_0^{\mathcal{S}_1} \frac{e^{-t^2}}{t^2 + \beta} dt = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \operatorname{tg}^{-1}(\mathcal{S}_1/\sqrt{\beta}) [1 + o(\mathcal{S}_1^2)]. \quad (21)$$

图 2 和图 3 分别给出了 $\operatorname{Re} W$ 与 $\operatorname{Im} W$ 随 $1/\mathcal{S}$ 的变化. 作为比较, 图中也给出了

$\delta = 0$, 即 $Z_e(\mathcal{S})$ 的曲线. 由图可见, 在 x 较大处, W 与 Z_e 的差别很小, 而在有理磁面附近则 W 与 Z_e 的差别甚大, 随机场使电子色散函数变平缓了. 当 $\delta \lesssim 1$ 时就有 $\text{Re} W < 1$, 当 $\delta \gg 1$ 时 (实际上当 $\delta \lesssim 5$ 时即可) $\text{Re} W$ 成为极平坦的函数, 且是小量, $\text{Im} W$ 也如此.

在有理磁面附近, 即 $\mathcal{S} \gg 1$ 时, (15), (16) 式可大为简化, 得

$$\text{Re} W = \frac{\sqrt{\pi}}{\delta} e^{1/\delta^2} [1 - \Phi(1/\delta)], \quad (22)$$

$$\text{Im} W = \frac{1}{\sqrt{\pi} \delta} e^{1/\delta^2} E_i(-1/\delta^2). \quad (23)$$

它们随 δ 的变化由图 4 给出. 而当 $\delta \gg 1$ 时, (22), (23) 式成立的条件可以放宽到 $\mathcal{S} \lesssim 1/\delta$ 的整个区域, 这正反映了上述结论, 即在相当宽的 x 区域内, $\text{Re} W$, $\text{Im} W$ 近于常数.

W 函数具有上述性质的物理原因是: 在漂移波存在的主要区域 ($|x|$ 较大), 电子主要作纵向响应 ($\text{Re} Z_e \simeq 0$), 随机场引起的扩散并不重要; 在 $x \simeq 0$ 附近, 原来 (即无随机场时) 电子的纵向响应是不足的 ($\text{Re} Z_e \simeq 1$), 而存在随机场扩散可弥补此不足, 使得 $\text{Re} W$ 下降. $\delta = k_y^2 D_T / \omega > 1$ 正表示在 $1/\omega$ 时间内, 电子足以扩散波长 $1/k_y$ 距离. 同时, 扩散也使电子共振区加宽, 所以 $\text{Im} W$ 也变平坦了, 它在 $x = 0$ 处也不为零.

注意到 Pearlstein 与 Berk^[11] 在忽略 $\text{Re} Z_e$ 的情况下证明了普适模不稳定, 而 Ross 等^[11-13] 正是保留了 $\text{Re} Z_e$ 项, 从而证明了普适模是绝对稳定的. 现在, 随机场使 $\text{Re} W$ 变成平缓的小量, 可以预期, 这对稳定性的影响是大的.

三、本征方程与稳定性讨论

由上所述, 随机场使电子色散函数 $Z_e(\mathcal{S})$ 变为 $W(\mathcal{S}, \delta)$. 由于 $\delta_i = k_y^2 D_{My} v_{Ti} / \omega = \delta_e v_{Te} / v_{Ti} \ll 1$, 随机场对离子色散函数 Z_i 的影响是可略去. 则由通常的方法^[9] 就可以求出 $\varphi(x)$ 满足的本征方程为

$$\rho_i^2 \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = \left[-\frac{\Gamma_0}{\Gamma_0 - \Gamma_1} + \frac{1 + \Delta(1 - W)}{Z_i(\Gamma_0 - \Gamma_1)} \right] \varphi(x), \quad (24)$$

式中

$$\Delta = -(1 - \omega/\omega_{*e}) / (1 + \tau\omega/\omega_{*e}), \quad \tau = T_e/T_i,$$

$$\Gamma_n \equiv \Gamma_n(S_y) = e^{-S_y} I_n(S_y),$$

$I_n(S_y)$ 是虚宗量贝塞耳函数,

$$S_y = k_y^2 \rho_i^2, \quad Z_i \equiv Z(\omega/|k_{\parallel} v_{Ti}|)$$

为离子色散函数. 漂移波存在的区域必有

$$|k_{\parallel} v_{Ti} / \omega| = \frac{\omega |x|}{\tau \omega_{*e} x_i}$$

是小量 (因为 $|x|$ 更大时将受离子强烈阻尼), 式中

$$x_i \equiv \frac{L_s}{2r_n} \rho_i, \quad r_n = \left| \frac{1}{n} \frac{dn}{dx} \right|^{-1}.$$

故对 Z_i 可作展开

$$Z_i \simeq 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_{*e} x}{\omega \tau x_i} \right)^2. \quad (25)$$

因此, (24) 式可表为

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = Q(x) \varphi(x), \quad (26)$$

$$Q(x) = \left[1 - \Gamma_0 + \Delta(1 - W) - \frac{1}{2} (1 + \Delta - \Delta W) \left(\frac{\omega_{*e} x}{\tau \omega x_i} \right)^2 \right] / [(\Gamma_0 - \Gamma_1) \rho_i^2]. \quad (27)$$

需要说明的是, 在求得(24)式时已假定了 $\varphi(x)$ 是平缓函数^[9]. 我们在文献[12]中曾指出, 在无随机场情形, 对于 $S_y \lesssim 1$ 的短波模, $\varphi(x)$ 在有理面附近必是陡变的(其原因是 $\text{Re} Z_e \simeq 1$), 上述假定是不自洽的, (24) 式需作修改. 为了避免数学上的复杂性, 我们在下面主要将 (24) 式用于 $\delta \lesssim 5$ 的强随机场情形, 这时 $\text{Re} W$ 是平缓的小量, 接近于文献[11]所讨论的情形, 因此, 上述假定是自洽的.

由于 W 函数的复杂性, 要一般地讨论 (26) 式的稳定性似需数值计算或有待更巧妙的方法. 下面主要用近似的方法说明, 存在随机场时, 漂移波本征模可以是绝对不稳定的.

首先将表明, 存在随机场时, 文献[3]中论证“ $\gamma > 0$ 的模不可能存在”的理由不再成立. 为与文献[3]一致, 对 (27) 式取冷离子极限, 得

$$Q(x) = \left[\tilde{S}_y - \left(\frac{\omega_{*e}}{\omega} - 1 \right) (1 - W) - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_{*e}}{\omega} \right)^2 \frac{x^2}{x_i^2} \right] / \rho_i^2, \quad (28)$$

式中

$$\rho_i^2 = 2T_e m_i c^2 / e^2 B^2, \quad \tilde{S}_y = k_y^2 \rho_i^2, \quad x_i = \frac{L_s}{2r_n} \rho_{e*}.$$

这里与文献[3]的唯一差别就是以 W 代替了 Z_e . 因此, 以下的步骤可与文献[3]类似地进行, 为节省篇幅, 这里仅指出与文献[3]的不同之处.

假设存在 $\gamma > 0$ 的解. 作变换 $x = -i\eta\omega/\omega_{*e}$, η 是正实数, 则可得 $\mathcal{S} = ix_e/\eta$, 其中

$$x_e \equiv \frac{L_s}{2r_n} \rho_{e*}.$$

相应地由 (10) 式可得

$$W(\eta, \delta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-V^2} dV}{1 + i \left(\frac{V\eta}{x_e} + \delta |V| \right)}. \quad (29)$$

定义

$$G(\eta, \delta) = 1 - W(\eta, \delta), \quad (30)$$

则此 G 函数就是文献[3]中 $g(\eta)$ 函数的推广, $G(\eta, 0) = g(\eta)$. $g(\eta)$ 是实函数, 但 $G(\eta, \delta)$ 一般是复函数:

$$\text{Re} G(\eta, \delta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(V\eta/x_e + \delta |V|)^2}{1 + (V\eta/x_e + \delta |V|)^2} e^{-V^2} dV. \quad (31)$$

易见必有 $1 > \text{Re}G > 0$.

$$\begin{aligned} \text{Im}G(\eta, \delta) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(V\eta/x_e + \delta|V|)}{1 + (V\eta/x_e + \delta|V|)^2} e^{-V^2} dV \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left[\frac{1}{\delta + \eta/x_e} e^{1/(\delta + \eta/x_e)^2} E_i(-1/(\delta + \eta/x_e)^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\delta - \eta/x_e} e^{1/(\delta - \eta/x_e)^2} E_i(-1/(\delta - \eta/x_e)^2) \right]. \end{aligned} \quad (32)$$

由图 5 可见, $\text{Im}G$ 主要是正的 (在 $\eta \lesssim \delta x_e$ 区), 这一性质对于下面的讨论是重要的.

经变换后, $\varphi(\eta)$ 满足的方程为

$$\begin{aligned} \rho_s^2 \left(\frac{\omega_{*e}}{\omega} \right)^2 \frac{d^2 \varphi}{d\eta^2} + \left[\frac{1}{2} \frac{\eta^2}{x_e^2} + \tilde{S}_y \right. \\ \left. + \left(1 - \frac{\omega_{*e}}{\omega} \right) G(\eta, \delta) \right] \varphi = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

由 (33) 式及边条件

$$\varphi(\infty) = 0, \quad \varphi(0) = 0 \quad (\text{奇模})$$

或

$$\left. \frac{d\varphi}{d\eta} \right|_0 = 0 \quad (\text{偶模})$$

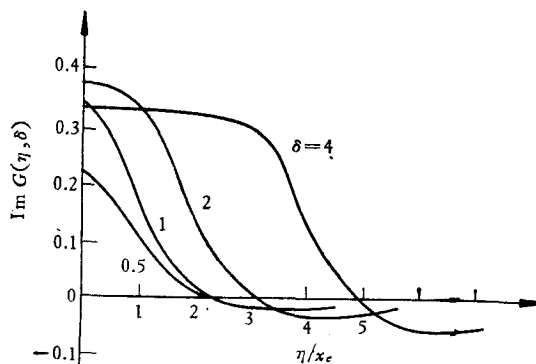


图 5 $\text{Im}G-\eta/x_e$ 图

可得到两个与文献 [3] 中 (6) 式相应的二次型

$$\begin{aligned} \gamma \int_0^{\infty} d\eta \left[\rho_s^2 \frac{\omega_0 \omega_{*e}^2}{|\omega|^2} \left| \frac{d\varphi}{d\eta} \right|^2 + \frac{\omega_{*e}}{2|\omega|^2} \text{Re}G |\varphi|^2 \right] &= \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_{*e}}{\omega} - 1 \right) \int_0^{\infty} \text{Im}G |\varphi|^2 d\eta, \quad (34) \\ \int_0^{\infty} d\eta \left\{ \frac{(\gamma^2 - \omega_0^2) \omega_{*e}^2}{|\omega|^2} \rho_s^2 \left| \frac{d\varphi}{d\eta} \right|^2 + |\varphi|^2 \left[\frac{1}{2} \frac{\eta^2}{x_e^2} + \tilde{S}_y \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \left(1 - \frac{\omega_0 \omega_{*e}}{|\omega|^2} \right) \text{Re}G - \frac{\gamma \omega_{*e}}{|\omega|^2} \text{Im}G \right] \right\} &= 0, \end{aligned} \quad (35)$$

其中 $\omega = \omega_0 + i\gamma$.

以 (34) 式代入 (35) 式, 可得下式以代替 (35) 式:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} d\eta \left\{ \rho_s^2 \frac{(\gamma^2 + \omega_0^2) \omega_{*e}^2}{|\omega|^2} \left| \frac{d\varphi}{d\eta} \right|^2 + |\varphi|^2 \left[\frac{1}{2} \frac{\eta^2}{x_e^2} + \tilde{S}_y + \text{Re}G \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\frac{\omega_{*e} - \omega_0}{\gamma} + \frac{\gamma \omega_{*e}}{|\omega|^2} \right) \text{Im}G \right] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (36)$$

无随机场时, $\text{Im}G = 0$, $\text{Re}G \geq 0$, (36) 式不可能成立 ($\omega_0/\omega_{*e} > 0$ 时 (34) 式也不可能成立), 因此文献 [3] 证明了 $\gamma > 0$ 的解是不可能存在的. 但是, 当 $\delta > 0$ 时, $\text{Im}G$ 有大于零的区域. 且此区随 δ 而增大. 因此只要 $\omega_0/\omega_{*e} < 1$, (34) 与 (36) 式都是可能成立的, 也即文献 [3] 关于 “ $\gamma > 0$ 的解不可能成立” 的结论不再适用了.

当然, 上面的反证法还不足以证明一定存在不稳定的模. 下面我们对 $\delta \lesssim 5$ 的强随机场情形用近似方法证明确实存在不稳定模.

当 $\delta \lesssim 5$ 时, $W(\mathcal{L}, \delta)$ 是平缓的小量, 我们可近似地把它当成常数来处理, 则

(26) 和 (27) 式具有如下简单形式:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = (A - Bx^2)\varphi, \quad (37)$$

式中

$$A = [1 - \Gamma_0 + \Delta(1 - W)]/[(\Gamma_0 - \Gamma_1)\rho_i^2], \quad (38.1)$$

$$B = \frac{1 + \Delta(1 - W)}{2(\Gamma_0 - \Gamma_1)\rho_i^2\tau^2x_i^2} \left(\frac{\omega_{*e}}{\omega} \right)^2. \quad (38.2)$$

这与文献 [11] 的情形很相似. 作变换

$$x_1 = [-4B]^{1/4}x, \quad (39)$$

则 (37) 式可变为标准的韦伯方程

$$4 \frac{d^2\varphi}{dx_1^2} = (-2iA/\sqrt{B} + x_1^2)\varphi. \quad (40)$$

而 $\varphi(x)$ 的外行波边条件恰好对应于 $\varphi(x_1)|_{x_1=\pm\infty} = 0^{[11]}$. 因此, (40) 式的本征值方程为

$$-2iA/\sqrt{B} = -2(2n+1) \quad (n \text{ 正整数})$$

即

$$1 - \Gamma_0 + \Delta(1 - W) = -i(2n+1) \sqrt{\frac{1}{2} [1 + \Delta(1 - W)](\Gamma_0 - \Gamma_1)} \frac{\rho_i\omega_{*e}}{\tau x_i\omega}. \quad (41)$$

注意到虚部是小量, 保留其一次项, 由 (41) 式可解出 (取最不稳定的 $n=0$ 模)

$$\Delta_0 = -\frac{1 - \Gamma_0}{1 - W_0} < 0, \quad (42)$$

$$\Delta_1 = \frac{1}{1 - W_0} \left[-\frac{1 - \Gamma_0}{1 - W_0} W_1 - \frac{\omega_{*e}\rho_i}{\tau\omega_0 x_i} \sqrt{\frac{1}{2} \Gamma_0(\Gamma_0 - \Gamma_1)} \right], \quad (43)$$

其中 Δ_0, W_0 与 Δ_1, W_1 分别是 Δ, W 的实部与虚部. 而 ω 与 Δ 的关系是

$$\frac{\omega_0}{\omega_{*e}} = \frac{1 + \Delta_0}{1 - \tau\Delta_0} < 1, \quad (44)$$

$$\frac{\gamma}{\omega_{*e}} = \frac{(1 + \tau\omega_0/\omega_{*e})^2}{1 + \tau} \Delta_1. \quad (45)$$

注意到 γ/ω_{*e} 与 Δ_1 同号, $W_1 < 0$, $\frac{\rho_i}{x_i} = \frac{2r_n}{L_s}$, 可见 (43) 式右端第二项代表剪切阻尼项, 它与剪切强度 (r_n/L_s) 成正比; 右端第一项则是电子共振项, 是不稳定因素. 当剪切不太强时, 随着 S_y 的增加, 模式可由稳定的转变为不稳定的, 也即证明了确实存在不稳定区.

以上证明中要求 $\delta \lesssim 5$ 条件, 但这并不是出现不稳定性的必要条件. 而要回答“ δ 值大于多少时就有不稳定区”的问题, 有待于数值计算或更巧妙的方法了. 但作为判断随机场是否重要的特征量, 应该是 $\delta \simeq 1$. 实验上对于随机场的强度还是不很清楚的, 但初步的数据与粗略的估计表明, 这样强度的随机场是可能存在的:

$$\delta = k_z^2 D_T / \omega = 2 \frac{\omega_{*e}}{\omega} \sqrt{S_y} \frac{r_n}{\rho_e \rho_i} D_M,$$

而

$$D_M = \left(\frac{B_1}{B_0} \right)^2 l_s,$$

(l_s 是随机场的关联长度.) 若 $B_1/B_0 \sim 10^{-4}$, $l_s \sim qR \sim 10^2 \text{cm}$, 则在托卡马克条件下, 对 $S_y \lesssim 1$ 的模就可有 $\delta \lesssim 1$. 此外, 从反常输运的估计来看, 若对于 $S_y = 1$ 的模有 $\delta = 1$, 则要求

$$D_T = \frac{\omega}{\omega_{*e}} \frac{\rho_i}{r_n} \frac{cT}{eB} \sim 10^{-2} \frac{cT}{eB}. \quad (46)$$

考虑到 $D_{Mx} \simeq D_{My}$, 这就是随机场相应的电子反常温导系数. (46) 式所要求的值与目前实验中的反常值在量级上是一致的. 也就是说, 如果目前实验中电子反常热导主要是由随机场所引起, 则此随机场也将明显影响漂移波本征模的稳定性, 使之可能成为绝对不稳定的模, 这就是本文的简短结论.

附 录

关于 D_{Mx} 影响的估计

下面将证明, 在我们感兴趣的情形下 ($D_{My} \geq D_{Mx}$, $\delta > 1$, $S_y \geq 1$), D_{Mx} 的影响是可略去.

正文中已证明, 在忽略 D_{Mx} , $\delta > 1$ 情形下, $\varphi(x)$ 满足方程 (26), W_0 近似于小的常数, 则 (26) 式相应于最低模的解为

$$\varphi(x) = \varphi_0 e^{-i\sigma_0 x^2}, \quad (A.1)$$

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{\Gamma_0}{8(\Gamma_0 - \Gamma_1)}} \frac{\omega_{*e}}{\tau\omega} \frac{1}{\rho_i x_i}. \quad (A.2)$$

这就是文献 [11] 中所得的解. 对于 $W_0 = W_0(x)$ 的情形, (A.1) 式只是近似解, 由于 $W(x)$ 的缓变性, 可认为差别是不大的. (A.1) 式只适用于 $(x/x_i)^2 \ll 1$ 区域, 当 $|x| \sim x_i$ 时将受离子强烈阻尼, 为反映此性质, 我们将 $\varphi(x)$ 表为

$$\varphi(x) = \varphi_0 e^{-i\sigma_0 x^2 - x^2/x_i^2} = \varphi_0 e^{-i\sigma x^2}, \quad (A.3)$$

其中

$$\sigma = \sigma_0 - i/x_i^2, \quad (A.4)$$

所以

$$\varphi(x_i)/\varphi(x) = e^{-i\sigma(x_i^2 - x^2)}. \quad (A.5)$$

关于 x 方向的电子转移几率需略加说明. 由于 $\frac{dn_0}{dx} \simeq 0$, 为维持扩散的双极性, 必存在双极电场 E_{x_0} (可证其量级为 $\frac{eE_{x_0}}{T_e} \sim \frac{1}{n} \frac{dn}{dx}$), 由于此电场, 粒子转移几率不再是 (6) 式的高斯分布了 (对此问题将另文讨论). 但在本题中这一因素并不重要. 因为 $\varphi(x)$ 是宽度 $\sim x_i$ 的波包, $\langle \varphi(x_i)/\varphi(x) \rangle_p$ 因子的有效积分范围是 $\sim x_i$, 在通常剪切条件下 $x_i/r_n \ll 1$, 若忽略此级小量, 则 (6) 式仍成立. 所以有

$$\begin{aligned} \langle \varphi(x_i)/\varphi(x) \rangle_p &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_i [4\pi D_{Mx} |v_\phi|(t-t_i)]^{-1/2} \exp[-(x_i-x)^2/4D_{Mx}|v_\phi|(t-t_i) \\ &\quad - i\sigma(x_i^2 - x^2)] = [1 + 4i\sigma D_{Mx}|v_\phi|(t-t_i)]^{-1/2} \exp\{-4D_{Mx}|v_\phi|(t-t_i)\sigma^2 x^2 / \\ &\quad [1 + 4i\sigma D_{Mx}|v_\phi|(t-t_i)]\}. \end{aligned} \quad (A.6)$$

可见, 当 $(t-t_i) \rightarrow 0$ 时, $\langle \varphi(x_i)/\varphi(x) \rangle_p \rightarrow 1$, $(t-t_i)$ 很大时 $\langle \varphi(x_i)/\varphi(x) \rangle_p \propto (t-t_i)^{-1/2}$, 即随 $(t-t_i)$ 增加而缓慢地趋于零. 使 $\langle \varphi(x_i)/\varphi(x) \rangle_p$ 明显偏离 1 的特征时间是

$$(t-t_i)_{ex} = (4D_{Mx}|v_\phi|\sigma)^{-1}. \quad (A.7)$$

而同时存在 D_{My} 时, I_e 的表式 (8) 中还有一个时间因子 $e^{-k_y^2 D_{My}|v_\phi|(t-t_i)}$, 其衰减的特征时间是

$$(t-t_i)_{ey} = (k_y^2 D_{My}|v_\phi|)^{-1} \quad (A.8)$$

比较两个特征时间

$$\frac{(t-t_i)_{cy}}{(t-t_i)_{cx}} = 2\sqrt{\frac{2\Gamma_0}{\Gamma_0-\Gamma_1}} \left(\frac{\omega_{*e}}{\tau\omega}\right) \frac{D_{Mx}}{D_{My}} \frac{r_n}{S_y L_s}. \quad (\text{A.9})$$

考虑到 $D_{Mx} \leq D_{My}$, $S_y \lesssim 1$, $r_n/L_s \ll 1$, 上式是远小于 1 的. 这表明在 I_e 积分的有效时间内 ($\sim (t-t_i)_{cy}$), $\langle \varphi(x_i)/\varphi(x) \rangle$ 是接近于 1 的因子. 也就是说, 令 $\langle \varphi(x_i)/\varphi(x) \rangle_p = 1$, 即忽略 D_{Mx} 的影响, 并不引起明显差别, 这就是我们所要论证的.

参 考 文 献

- [1] D. W. Ross, S. M. Mahajan, *Phys. Rev. Lett.*, **40**(1978), 324.
- [2] K. T. Tsang *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **40**(1978), 327.
- [3] T. M. Antonson, Jr., *Phys. Rev. Lett.*, **41**(1978), 33.
- [4] L. Chen *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **41**(1978), 649.
- [5] T. H. Stix, *Nucl. Fusion*, **18**(1978), 353.
- [6] A. B. Rechester, M. N. Rosenbluth, *Phys. Rev. Lett.*, **40**(1978), 38.
- [7] Kim Molvig *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **41**(1978), 1240.
- [8] S. J. Zweben *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **42**(1979), 1270.
- [9] N. A. Krall, M. N. Rosenbluth, *Phys. Fluids*, **8**(1965), 1488;
M. N. Rosenbluth, P. J. Catto, *Nucl. Fusion*, **15**(1975), 573.
- [10] T. H. Dupree, *Phys. Fluids*, **10**(1967), 1049;
J. Weinstock, *Phys. Fluids*, **13**(1970), 2308.
- [11] L. D. Pearlstein, H. L. Berk, *Phys. Rev. Lett.*, **23**(1969), 220.
- [12] 张承福, 物理学报, **29**(1980), 778.

THE EFFECT OF STOCHASTIC MAGNETIC FIELD ON THE EIGEN-MODES OF DRIFT WAVE

ZHANG CHENG-FU

(Department of Physics, Peking University)

ABSTRACT

In this paper, the effect of stochastic magnetic field (s. m. f.) on the eigen-modes of low frequency drift wave is analysed. We show that the existence of s. m. f. can affect the response of electrons to the wave, so that the electron dispersion function varies. In the vicinity of the rational magnetic surface (where $k_y \simeq 0$), the variation is particularly significant. The s. m. f. can make the electron dispersion function considerably smoother, and the change in electron dispersion function may greatly affect the stability of the eigen-modes of drift wave. It is shown that if the s. m. f. is strong enough (but still within the region achievable experimentally), the so-called universal modes of drift wave may become absolutely unstable.