

# 椭圆截面等离子体柱的扭曲不稳定性

顾永年 邱乃贤

(中国西南物理研究所)

1979年11月10日收到

## 提 要

本文处理了锐边界椭圆截面等离子体柱的扭曲不稳定性,给出了用椭圆特征函数表示的色散关系的一般形式,对单模和两模扰动,给出了精确到椭圆率 $\epsilon$ 二级的结果.在任意椭圆率下进行了数值计算.

结果表明,模数之间的耦合起解稳作用.当椭圆率增大时,稳定性所需的 $\bar{q}_x$ 值迅速增加,在无导体壳和 $a/b > 2$ 时,近似地有 $\bar{q}_x \sim 1 \propto (a/b)^2$ .

对于有限长度的系统,波长等于系统长度的扰动是最危险的.在小椭圆率情况下,对此种扰动而言,当系统的长度缩短(相应于环径比减小时),对应的系统稳定性 $\bar{q}_x$ 值仅稍为增大一点.导体壳有一定的稳定作用.但当变形足够大时,扰动的有限波长和导体壳的存在对系统稳定性 $\bar{q}_x$ 值几乎没有多少影响.

## 一、引 言

在受控核聚变研究中,目前托卡马克系统是比较成功的.它正在向聚变点火条件进展.但从聚变堆的角度看,它所能达到的 $\beta$ 值(等离子体压强与磁压强之比)是低的(2%左右).将圆截面沿主轴方向拉长,成非圆截面,有可能提高 $\beta$ 值.因此,对非圆截面托卡马克从实验和理论方面进行研究,是很有意义的.本文对椭圆截面等离子体的扭曲模不稳定性作了研究.

关于非圆截面扭曲模问题,最早,文献[1, 2]从直观的描述中给出稳定条件为

$$\bar{q}_x = B_\nu L_x / B_\perp L_z > 1 \quad (1.1)$$

$\bar{q}_x$ 为边界处的稳定性安全因子,  $B_\nu$ 和 $B_\perp$ 分别为柱外纵向磁场和等离子体电流所产生的极向磁场在边界处的值,  $L_x$ 为等离子体柱长度.因而非圆截面的周界 $L_x$ 拉得越长,带来的好处越大,但这个结论没有理论的证明.

Coppi等人<sup>[3]</sup>曾用简正模分析法,在趋肤电流假定下,处理过小变形椭圆的情况,给出了精确到边界椭圆率 $\epsilon$ 一级的结果,并猜测不同模式的耦合会起稳定的作用.Соловьев<sup>[4]</sup>曾用能量原理的方法,对椭圆截面情况作过分析,给出了单模扰动下模数 $n=1$ 的螺旋模不稳定性的稳定性充分条件.在此情况下,证实了文献[2]的直观论断.但是,它没有考虑不同模式间的耦合作用.

文献[5—7]独立地对趋肤电流的椭圆截面等离子体柱的扭曲不稳定性作了研究,结果表明,不同模式的耦合起强烈的解稳作用,这样,文献[2]的论断对椭圆截面等离子体柱就不再正确了.文献[5, 6]仅处理了长波近似,文献[7]的处理适用于各种扰动波

长. 本文在文献[7]的基础上, 对有限波长扰动, 直接利用马丢函数, 进行了数值计算, 为了连贯和完整起见, 也概述了文献[7]的部分内容.

我们处理了锐边界椭圆截面等离子体柱的扭曲不稳定性, 给出了用椭圆特征函数表示的色散关系的一般形式, 讨论了它的一般特性, 对单模和两模扰动, 给出了精确到椭圆率  $\varepsilon$  二级的结果. 在任意椭圆率情况下进行了数值计算.

结果表明, 模数之间的耦合起解稳作用. 当椭圆率增大时, 稳定性所需的  $\bar{q}_z$  值迅速增加, 在无导体壳和  $a/b > 2$  ( $a$  和  $b$  分别为边界椭圆的长、短半轴) 时, 近似地有  $\bar{q}_z - 1 \propto (a/b)^2$ .

对于有限长度的系统, 波长等于系统长度的扰动是最危险的. 在小椭圆率情况下, 对此种扰动而言, 当系统的长度缩短(相应于环径比减小)时, 对应的系统稳定性  $\bar{q}_z$  值仅稍为增大一点. 导体壳有一定的稳定作用, 当导体壳很靠近等离子体柱时, 上述结果更为明显. 但是, 当变形足够大时, 有限波长扰动和导体壳的存在对系统稳定性  $\bar{q}_z$  值几乎没有多少影响, 因为这时系统的不稳定性主要是由高模扰动引起的.

在分析和计算中, 还考察了等离子体  $\beta$  值的影响. 结果表明, 稳定高  $\beta$  系统的条件比稳定低  $\beta$  系统的条件要严格.

## 二、色散关系

我们考虑一个沿  $z$  轴无限长的椭圆截面等离子体柱, 柱外为真空, 在平衡态, 假定等离子体的速度  $\mathbf{v} = 0$ , 等离子体电流仅为趋肤层中的均匀电流, 柱内、外分别存在均匀纵向磁场  $B_p$  和  $B_v$ .

现在考虑自平衡态的一个小偏离. 设  $\xi$  为表示这种小偏离的等离子体定域位移. 将物理量的扰动都表示成如下形式:

$$\mathbf{A} \sim \mathbf{A}_e^{(ikz + \omega t)}, \quad (2.1)$$

其中  $k$  为纵向波矢,  $\omega$  为频率. 同时, 为计算方便起见, 假定等离子体是不可压缩的. 这个假定并不影响稳定性的判据.

于是从理想磁流体方程组出发, 不难得出线性化扰动方程为

$$\rho_0 \omega^2 \xi = -\nabla \left( \bar{P} + \frac{1}{4\pi} \mathbf{B}_p \cdot \mathbf{Q}_i \right) + \frac{1}{4\pi} ik B_p \mathbf{Q}_i, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{Q}_i = \nabla \times (\xi \times \mathbf{B}_p) = ik B_p \xi, \quad (2.3)$$

式中  $\rho_0$  为平衡态等离子体密度,  $\bar{P}$  和  $\mathbf{Q}_i$  分别为压强和磁场的扰动量. 令

$$P_T = \bar{P} + \frac{1}{4\pi} \mathbf{B}_p \cdot \mathbf{Q}_i, \quad (2.4)$$

则得到

$$\nabla^2 P_T = 0. \quad (2.5)$$

在等离子体外部真空区域中, 设真空磁场的扰动为  $\mathbf{Q}_e$ , 则  $\mathbf{Q}_e$  应满足  $\nabla \times \mathbf{Q}_e = 0$  和  $\nabla \cdot \mathbf{Q}_e = 0$ . 因此, 若令

$$\mathbf{Q}_e = \nabla \phi_e, \quad (2.6)$$

则  $\phi_e$  亦应满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \phi_e = 0. \quad (2.7)$$

在椭圆柱坐标系  $(\mu, \theta, z)$  中, 满足物理条件的拉普拉斯方程的内、外解分别为<sup>[8,9]</sup>

$$P_T = \sum_m [C_m C e_m(\mu, -q) c e_m(\theta, -q) + i S_m S e_m(\mu, -q) s e_m(\theta, -q)] e^{ikz}, \quad (2.8)$$

$$\phi_e = \sum_m [F_m i F e k_m(\mu, -q) c e_m(\theta, -q) + G_m G e k_m(\mu, -q) s e_m(\theta, -q)] e^{ikz}. \quad (2.9)$$

若在  $\mu = \mu_1$  处有一导体壳, 则 (2.9) 式中的  $F e k_m$  和  $G e k_m$  分别由下式来代替:

$$\widetilde{F e k_n} = F e k_n(\mu, -q) - \frac{F e k'_n(\mu_1, -q) C e_n(\mu, -q)}{C e'_n(\mu_1, -q)}, \quad (2.10)$$

$$\widetilde{G e k_n} = G e k_n(\mu, -q) - \frac{G e k'_n(\mu_1, -q) S e_n(\mu, -q)}{S e'_n(\mu_1, -q)}, \quad (2.11)$$

式中  $q = k^2 d^2/4$ ,  $d$  为椭圆的半焦距;  $c e_m(\theta, -q)$ ,  $s e_m(\theta, -q)$  为负  $q$  的马丢函数;  $C e_m(\mu, -q)$ ,  $S e_m(\mu, -q)$  和  $F e k_m(\mu, -q)$ ,  $G e k_m(\mu, -q)$  分别为负  $q$  的第一类和第三类变型马丢函数,  $m$  为正整数, 对奇函数  $m$  不取零;  $C_m, S_m, F_m$  和  $G_m$  为待定常数; “ $\sim$ ” 表示对  $\mu$  求导。

应当指出, 在 Coppi 等人所给出的通解中,  $C_m = S_m, F_m = G_m$ , 这仅在处理小  $|q|$  值时才是可以的。在一般情况下,  $C_m, S_m, F_m, G_m$  是不同的, 特别是在大  $|q|$  值情况下, 如取 Coppi 等人所用形式的解, 则要影响稳定性的判据。

现在来考察边界条件和导出色散关系。一个边界条件是: 界面上总压强连续,

$$4\pi P_T = i B_\nu k \phi_e + \frac{B_\perp}{H_0} \frac{\partial \phi_e}{\partial \theta} + \frac{B_\perp^2 a^2 \text{th } \mu_0}{\alpha H_0^2} \frac{\partial P_T}{\partial \mu}, \quad (2.12)$$

式中

$$\alpha = \rho_0 \omega^2 + k^2 B_p^2/4\pi, \quad H_0 = a(1 - k_1^2 \cos^2 \theta)^{\frac{1}{2}} = a h_0, \quad k_1^2 = 1/\text{ch}^2 \mu_0,$$

脚标 0 表示在平衡态界面  $\mu_0$  处取值。另一个边界条件是: 在扰动界面上, 磁场的法向分量为零, 或电场的切向分量连续,

$$\alpha \frac{\partial \phi_e}{\partial \mu} = - \left[ B_\perp \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{H_0} \frac{\partial P_T}{\partial \mu} \right) + i k B_\nu \frac{\partial P_T}{\partial \mu} \right]. \quad (2.13)$$

将  $P_T$  和  $\phi_e$  的解代入边界条件 (2.12) 和 (2.13) 式, 以  $c e_n$  和  $s e_n$  分别乘 (2.13) 式, 并对  $\theta$  从 0 到  $2\pi$  积分, 利用马丢函数的性质, 则由 (2.13) 式可得出 (以下有关  $\mu$  的函数都在  $\mu = \mu_0$  处取值)

$$F_n = \sum_m \left[ \frac{B_\perp}{\alpha a} S_m - \frac{S e'_m}{\widetilde{F e k'_n}} M C_{mn} - \frac{B_\nu k}{\alpha} C_m \frac{C e'_m}{\widetilde{F e k'_n}} \delta_{mn} \right], \quad (2.14)$$

$$G_n = \sum_m \left[ \frac{B_\perp}{\alpha a} C_m - \frac{C e'_m}{\widetilde{G e k'_n}} M S_{mn} + \frac{B_\nu k}{\alpha} S_m \frac{S e'_m}{\widetilde{G e k'_n}} \delta_{mn} \right], \quad (2.15)$$

式中

$$M C_{mn} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} S e_m(C e_n) \cdot / h_0 d\theta, \quad (2.16)$$

$$MS_{mn} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} ce_m(se_n) \cdot /h_0 d\theta. \quad (2.17)$$

“·”表示对  $\theta$  求导,  $n$  为正整数.

对 (2.12) 式采用同样的方法, 并应用 (2.14) 和 (2.15) 式消去其中的  $F_n, G_n$ , 则可求出关于  $C_m$  和  $S_m$  的如下两组联立方程:

$$\sum_m [Ce_m C_m F_{mn} + Se_m S_m G_{mn}] = 0 \quad (n \geq 0), \quad (2.18)$$

$$\sum_m [Ce_m C_m H_{mn} + Se_m S_m U_{mn}] = 0 \quad (n \geq 1). \quad (2.19)$$

这里

$$F_{mn} = \left[ w + \chi_p^2 - v^2 \chi_p^2 \frac{Ce'_m}{Ce_m} \frac{\widetilde{Fek'_m}}{\widetilde{Fek'_m}} \right] \delta_{mn} - \frac{Ce'_m}{Ce_m} \sum_i \frac{\widetilde{Gek'_i}}{\widetilde{Gek'_i}} MS_{mi} MS_{ni} - \text{th} \mu_0 \frac{Ce'_m}{Ce_m} NC_{mn}, \quad (2.20)$$

$$U_{mn} = \left[ w + \chi_p^2 - v^2 \chi_p^2 \frac{Se'_m}{Se_m} \frac{\widetilde{Gek'_m}}{\widetilde{Gek'_m}} \right] \delta_{mn} - \frac{Se'_m}{Se_m} \sum_i \frac{\widetilde{Fek'_i}}{\widetilde{Fek'_i}} MC_{mi} MC_{ni} - \text{th} \mu_0 \frac{Se'_m}{Se_m} NS_{mn}, \quad (2.21)$$

$$G_{mn} = v \chi_p \frac{Se'_m}{Se_m} \left[ \frac{\widetilde{Fek'_n}}{\widetilde{Fek'_n}} MC_{mn} - \frac{\widetilde{Gek'_m}}{\widetilde{Gek'_m}} MS_{nm} \right], \quad (2.22)$$

$$H_{mn} = v \chi_p \frac{Ce'_m}{Ce_m} \left[ \frac{\widetilde{Fek'_m}}{\widetilde{Fek'_m}} MC_{nm} - \frac{\widetilde{Gek'_n}}{\widetilde{Gek'_n}} MS_{mn} \right], \quad (2.23)$$

式中

$$w = 4\pi\rho_0 a^2 \omega^2 / B_\perp^2, \quad \chi_p = \alpha_p k a, \quad \alpha_p = B_p / B_\perp, \quad v = B_v / B_p;$$

$$NC_{mn} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} ce_m ce_n / h_0^4 d\theta, \quad (2.24)$$

$$NS_{mn} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} se_m se_n / h_0^4 d\theta. \quad (2.25)$$

假定  $vk \neq 0$ , 则  $G_{mn} \neq 0$  ( $m \geq 1, n \geq 0$ ), 可引进  $\bar{G}_{mn} \equiv G_{mn}$  ( $m, n \geq 1$ ) 的逆矩阵  $\bar{G}^{-1}$ , 则从 (2.18), (2.19) 式可得到

$$\sum_m Ce_m C_m D_{mn} = 0 \quad (n \geq 0), \quad (2.26)$$

其中

$$D_{m0} = F_{m0} - \sum_{s=1} \sum_{j=1} F_{mj} \bar{G}_{js}^{-1} G_{s0}, \quad (2.27)$$

$$D_{mn} = H_{mn} - \sum_{s=1} \sum_{j=1} F_{mj} \bar{G}_{js}^{-1} U_{sn} \quad (n \geq 1). \quad (2.28)$$

于是, 有非零解的条件, 即色散关系为

$$|D_{mn}| = 0. \quad (2.29)$$

由 (2.20)–(2.23) 式可以看出, 一般情况下  $D_{mn}$  不是对角矩阵, 因此, 对椭圆柱而言, 一般说来已不能象圆柱情况那样, 可以将色散关系简单地分解成对各独立模数的色散关系, 从而导出对各独立模数稳定性判据, 而应考虑到模数间的耦合。

根据马丢函数的性质, 我们发现, 在  $D_{mn}$  中所包含的积分  $MS_{mn}$ ,  $MC_{mn}$ ,  $NC_{mn}$  和  $NS_{mn}$ , 只有当脚标  $m, n$  都为偶数或奇数时才不为零。因此, 模数间的耦合也将是以偶数耦合和奇数耦合的形式出现, 所以色散关系 (2.29) 式可分解成偶数模的和奇数模的两个色散关系。这在数值计算时可节省时间。

(2.29) 式取不同阶的行列式为零所得出的稳定性判据, 在物理上即为存在相应个数的扰动模时系统稳定的条件<sup>[7]</sup>。

另外, 不难得出, 特征矩阵  $D_{mn}$  的非对角元  $D_{m(m \pm 2j)} \sim \varepsilon^j$ 。因此, 离特征矩阵对角线越远的元素, 相应地就越小。当  $\varepsilon \rightarrow 0$  时, 马丢函数退化为贝塞耳函数, 色散关系 (2.29) 式也就退化为圆柱情况下的色散关系。

### 三、几种不同情况的稳定性判据

为了分析的方便, 我们用  $\delta$  和  $\eta$  分别表示等离子体柱边界的椭圆变形大小和导体壳位置的参量, 它们与边界面和导体壳的长、短半轴的关系为

$$a \propto (1 + \delta), \quad b \propto (1 - \delta)$$

和

$$a' \propto \frac{1}{\eta} (1 + \eta^2 \delta), \quad b' \propto \frac{1}{\eta} (1 - \eta^2 \delta).$$

并且  $0 < \delta < 1$ ,  $0 < \eta < 1$ ,  $\eta \rightarrow 0$  时, 为无导体壳的情况。

#### 1. 小 $\varepsilon$ 近似下的一级结果

假定椭圆率是小的, 将色散关系式按  $\varepsilon$  展开, 并认为  $q \leq \varepsilon^2$ , 精确到  $\varepsilon$  一级, 相应的色散关系为

$$-\omega = \chi_p^2 + \left( \nu \chi_p \pm \frac{a}{a_l} n \right)^2 \left( \frac{1 + \eta^{2n}}{1 - \eta^{2n}} \right) - \frac{a^2}{a_l^2} n \quad (n \geq 1), \quad (3.1)$$

式中  $\bar{a}_l = a(1 - \varepsilon/2)$  为  $\varepsilon$  一级近似下与边界椭圆同面积的圆半径。因此, 稳定性的充要条件化为

$$\alpha_p^2 k^2 \geq \frac{n}{a_l^2} - \left( \nu \alpha_p k \pm \frac{n}{a_l} \right)^2 \left( \frac{1 + \eta^{2n}}{1 - \eta^{2n}} \right) \quad (n \geq 1). \quad (3.2)$$

上式表明, 精确到  $\varepsilon$  一级, 椭圆柱的稳定性判据与同面积圆柱的判据是一样的。

#### 2. 长波近似下的结果

考虑  $ka \ll 1$  的情况, 即长波近似, 这时  $q \ll 1$ , 马丢函数可以由双曲函数来代替。对

于  $n \geq 1$ ,

$$\frac{\widetilde{Fek_n}}{\widetilde{Fek'_n}} \approx \frac{\widetilde{ce_n}}{\widetilde{Gek'_n}} \approx -\frac{1}{n} \operatorname{cth} n(\mu_1 - \mu_0),$$

$$\operatorname{cth} n(\mu_1 - \mu_0) = (1 + \eta^{2n}) / (1 - \eta^{2n}).$$

色散关系可以得到很大的简化.

对内部仅存在单一扰动模的特殊情况,在  $\varepsilon$  的二级近似下,  $\nu^2 = 1$  时,稳定性条件可化为

$$\begin{aligned} n=1 \quad \bar{q}_z &\geq \left(1 + \frac{3}{32} \varepsilon^2\right); \\ n=2 \quad \bar{q}_z &\geq \left(1 + \frac{1}{8} \varepsilon^2\right) \left(1 + \frac{\sqrt{6\varepsilon^2}}{4}\right) \\ &\text{或 } \bar{q}_z \leq \left(1 + \frac{1}{8} \varepsilon^2\right) \left(1 - \frac{\sqrt{6\varepsilon^2}}{4}\right); \\ n \geq 3 \quad &\text{是稳定的.} \end{aligned} \quad (3.3)$$

在任意椭圆率下,我们对头几个扰动模和不同  $\beta$  值的稳定性条件和不稳定性的最大增长率  $w_m$  作了数值计算,结果示于图 1 和图 2 中.

由以上看出,对于单模长波扰动,在  $\nu^2 \geq 1$  时,模数  $n = 1, 2$  的扰动是可以导致不稳定的. 在椭圆率不太大和  $\beta$  值不太高的情况下,  $n \geq 3$  的扰动是稳定的. 随着椭圆率的增大,可以导致不稳定的扰动模数将逐渐增多,不稳定扰动的最大增长率也增高,而且高模的不稳定性增长率将逐渐变得比低模的更高.

现在考察内部存在两个扰动模的情况. 这时,色散关系取二阶行列式为零. 在  $\varepsilon$  二级近似下,对  $m = 1, n = 3$  的两模,  $\nu^2 = 1$  时稳定性的充要条件是

$$\bar{q}_z \geq \left(1 + \frac{9}{32} \varepsilon^2\right) \quad (3.4)$$

由此看出,两模扰动的稳定性条件,比单模扰动的稳定性条件 (3.3) 式要严格. 因此 1, 3 模的耦合起解稳作用. 系统稳定性分析必须考虑不同扰动模式的耦合作用.

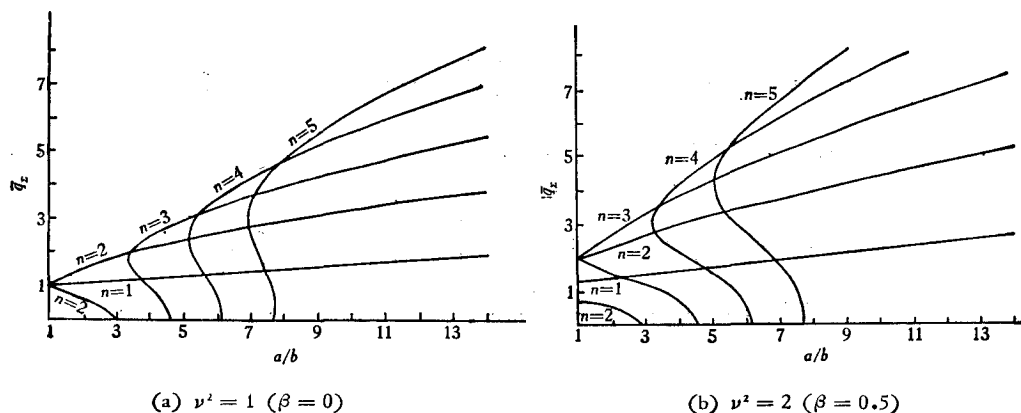


图 1 单模扰动下的稳定性边界

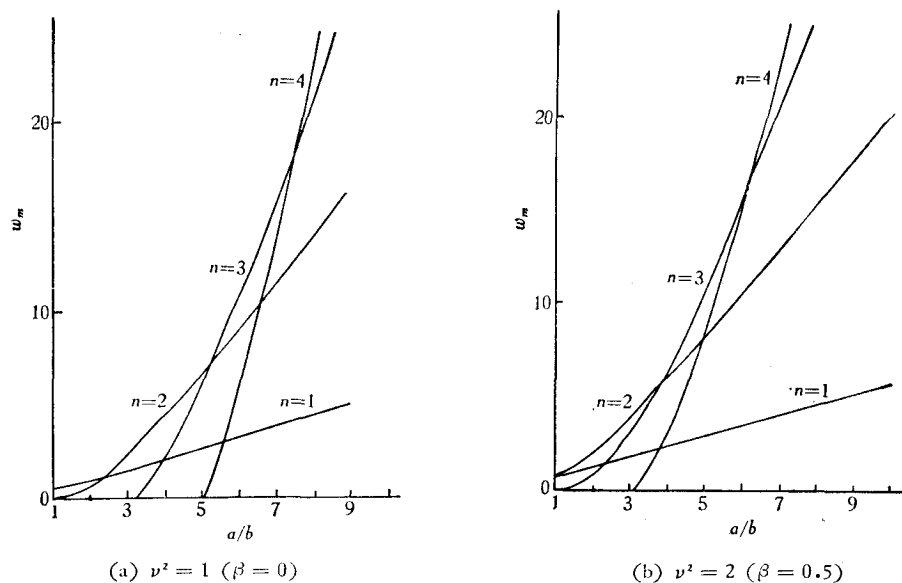


图2 单模扰动下不稳定扰动的最大增长率

对两模、五模、八模、十一模的耦合, 我们进行了数值计算, 结果示于图3中. 从图3可以看出, 当椭圆率增大时, 稳定性所需的  $\bar{q}_z$  值迅速增加, 同时需计及的耦合模数也增加. 对于给定的椭圆率, 耦合的模数增加到一定数目之后, 稳定性所需的  $\bar{q}_z$  值也趋于某

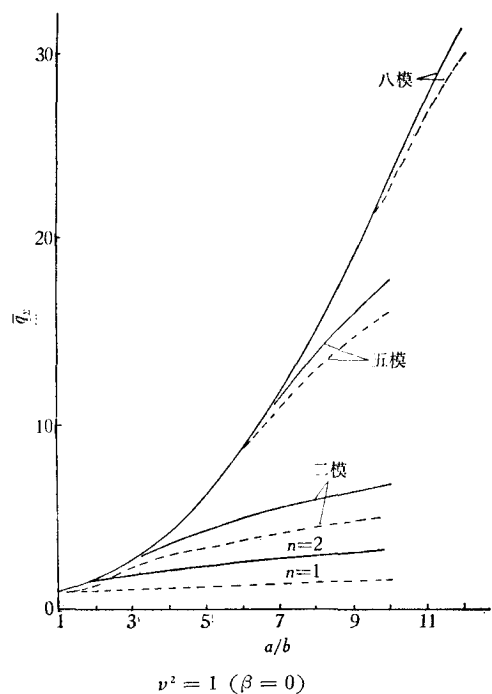


图3 二模、五模、八模耦合下的稳定性边界 曲线上面为稳定区域; 实线对应于偶数模 ( $n = 2, 4, \dots$ ); 虚线对应于奇数模 ( $n = 1, 3, \dots$ )

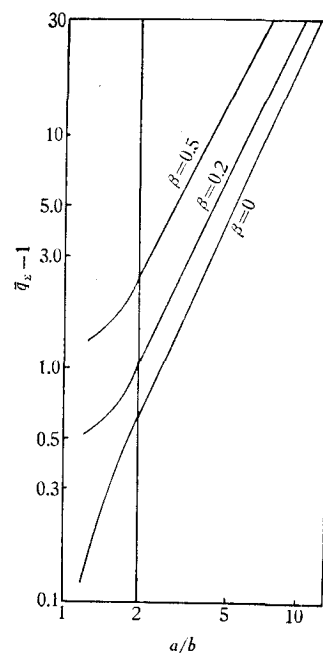


图4 不同  $\beta$  值下的稳定性边界(十一模) 曲线上面为稳定区域.

$a/b > 2$  时,  $\bar{q}_z - 1 \propto (a/b)^2$

个极限值,即为系统稳定的  $\bar{q}_z$  值. 系统稳定性的边界示于图 4 中. 在无导体壳和  $a/b > 2$  时,近似地有

$$\bar{q}_z - 1 \propto (a/b)^2. \quad (3.5)$$

### 3. 有限波长情况下的结果

这里考察扰动波长是有限的情况,例如说扰动波长相当于一般环形装置的周长. 在大椭圆率时,马丢函数的  $q$  值 [ $q = (kb)^2(a^2/b^2 - 1)/4$ ] 是相当大的,可达 5—7. 因此,我们直接用马丢函数来进行计算.

关于马丢函数的本征值和系数,我们利用连分式表示的公式<sup>[8]</sup>直接进行了计算. 计算结果与数学函数手册<sup>[10]</sup>上给出的几组数据完全一致.

关于振荡函数积分  $\int_0^{2\pi} \cos m\theta d\theta / h_0^p$  ( $p$  为 1 或 4),在  $m$  数很大时我们采用了文献[11]给出的方法,并用 Filon 积分作了校验,两者符合得很好.

根据本节 2 的计算,对给定的  $a/b$ ,把色散关系的行列式阶数增大,系统稳定性  $\bar{q}_z$  值就趋于一个极限值. 因此,在  $a/b < 6$  时,我们把色散关系取为 11 阶行列式,(2.20)和(2.21)式中的求和项比行列式阶数还增加 8 项.  $a/b$  在 6—12 时,取 15 阶行列式,求和项增加 10 项. 对  $a/b = 6$ ,我们用上述两种选取进行了计算,其结果的相对误差在  $\beta \leq 0.2$  时小于 0.01%,在  $\beta = 0.5$  时小于 0.2%. 对  $a/b = 9$ ,上述计算与取 25 阶行列式的计

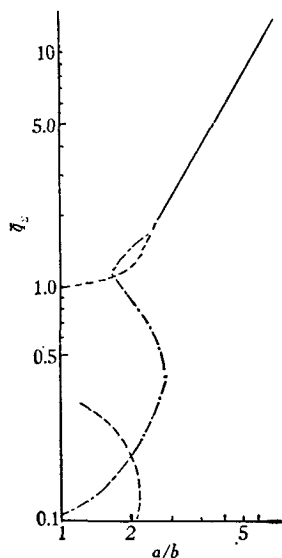


图 5  $kb = 1/4$ ,  $\eta = 0.6$ ,  $\beta = 0$

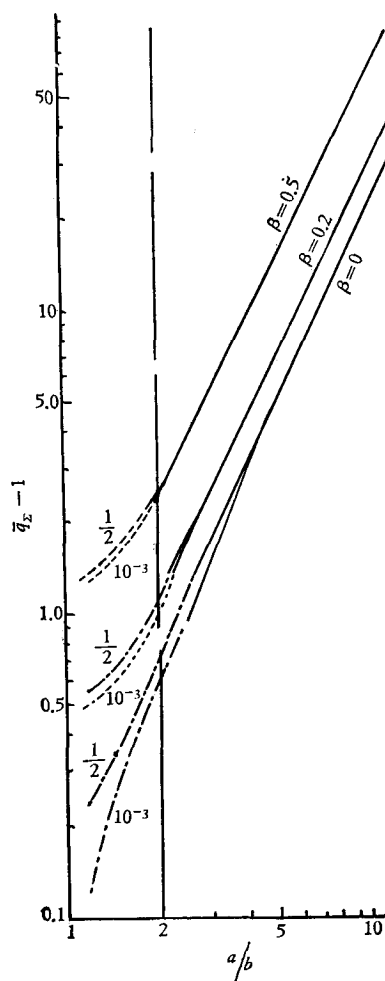


图 6  $\eta = 0$

算比较, 其相对误差小于 0.01%. 因此, 上述的选取对精度是足够的, 而且行列式的阶数并不太高.

系统稳定性的  $\bar{q}_z$  值为

$$\bar{q}_z = \frac{2B_V}{\pi B_\perp} \frac{a}{R_0} E(k_1^2) = \frac{2}{\pi m'} \nu \chi_p E(k_1^2),$$

$m'$  为纵向波数, 取自然数,  $R_0$  为等离子体环的大半径.  $m' = 1$  的扰动, 为系统中波长最长的扰动.  $E(k_1^2)$  为第二类完全椭圆积分.

计算结果由图 5—10 给出.

图 5 给出了有限波长和存在导体壳情况下系统稳定性边界的典型图. 虚线表示奇数模色散关系给出的  $\bar{q}_z$  值, 点划线表示偶数模色散关系给出的  $\bar{q}_z$  值, 实线表示两者重合时的  $\bar{q}_z$  值. 在  $a/b$  小时, 奇数模和偶数模的  $\bar{q}_z$  值不一样, 系统稳定性要求取大的一个值, 随着  $a/b$  的增大, 奇数模和偶数模的  $\bar{q}_z$  值趋于相等. 计算表明, 除无导体壳外, 稳定性边界曲线具有两支, 存在多值的特点. 上支曲线的左上方为稳定区, 下支曲线的左下方也是稳定区. 此种特点分别意味着以环向场和极向场为主的稳定区. 我们研究环向场稳定的系统, 故下支曲线在以后的图中不再画出.

图 6—10 给出了  $\eta = 0, 0.6, 0.9$  时不同波长下系统稳定的  $\bar{q}_z$  值. 在  $kb$  取  $10^{-3}$  时, 可看作长波近似, 它与本节 2 的结果一致.  $kb$  取  $1/2$  时, 可作为在实际环形装置中可能有的扰动波长. 对  $kb = 1/4$  的情况, 曲线位于上述两种情况所对应的曲线之间. 为了使

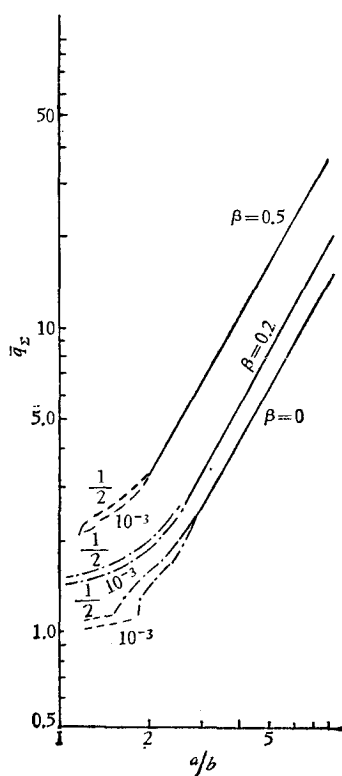


图 7  $\eta = 0.6$

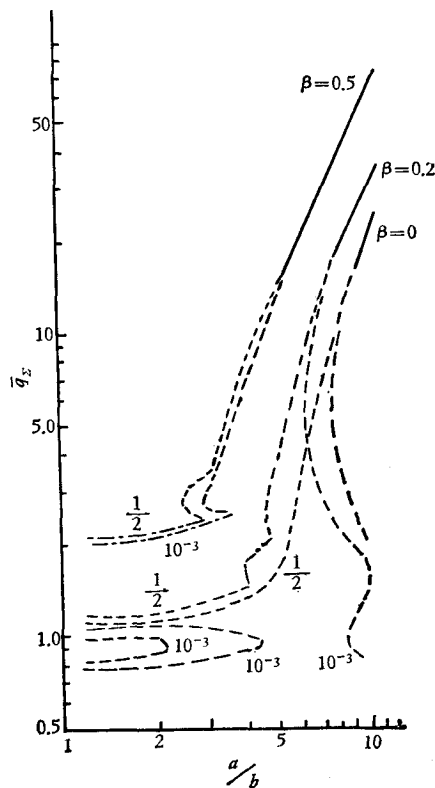
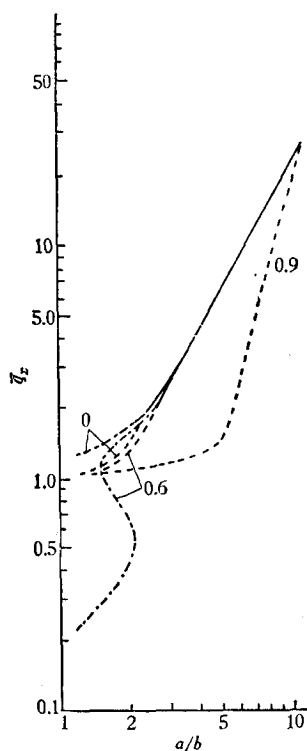
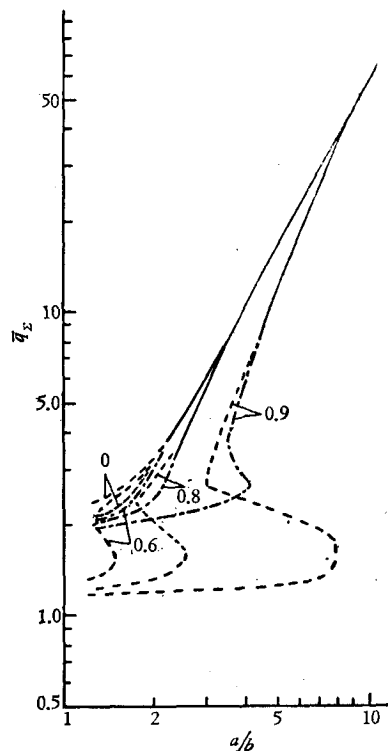


图 8  $\eta = 0.9$

图 9 不同  $\eta$  值下的稳定性边界  $k b = 1/2, \beta = 0$ 图 10 不同  $\eta$  值下的稳定性边界  $k b = 10^{-3}, \beta = 0.5$ 

图清晰, 这根曲线没有画出。

从图可以看出, 对波长等于系统长度的扰动 (即  $m' = 1$ ) 而言, 在无导体壳和小  $a/b$  情况下, 当系统的长度缩短时 (相应于环径比减小), 对应的系统稳定性  $\bar{q}_z$  值仅稍为增大一点。对于较低的  $\beta$  值, 当存在导体壳并且导体壳很靠近等离子体柱时, 上述情形将相对地更为明显。但当变形足够大时, 与不同长度系统相对应的  $\bar{q}_z$  值又趋于相等。因此, 跟圆截面情况一样, 椭圆截面的胖环系统比之细环系统, 其极向磁场与纵向磁场之比值可以增大。

从上述图中还可以看出, 在有导体壳时,  $\bar{q}_z$  作为  $a/b$  的函数出现了多值性。由于系统稳定时的  $\bar{q}_z$  应取其最大的值, 故系统稳定性  $\bar{q}_z$  值随  $a/b$  的变化在某些  $a/b$  值时出现了突变。

计算表明, 对于  $b/R_0$  为固定的系统, 当  $m' \geq 2$  时, 相应的  $\kappa_p$  并没有随  $m'$  成倍地增大, 因而此种扰动比  $m' = 1$  的扰动容易稳定。

图 9 和图 10 给出了导体壳处于不同位置时的系统稳定的  $\bar{q}_z$  值。可以看出, 对于小的  $a/b$ , 导体壳有稳定作用, 导体壳越靠近等离子体, 其稳定作用越明显。对于足够大的  $a/b$ , 导体壳的稳定作用就减小了。这是由于  $a/b$  足够大时, 系统主要是由高模扰动引起不稳定性, 而导体壳对高模扰动的作用很小。

结果表明, 对于不同的  $\beta$  值, 稳定较高  $\beta$  系统的条件更为苛刻。

本文的数值计算主要是由冯桂云、龙永兴同志完成的。

作者感谢李整武先生对本文的关心和讨论。

### 参 考 文 献

- [1] T. Ohkawa and T. H. Jensen, *Plasma Phys.*, **12**(1970), 789.
- [2] Л. А. Арцимович и В. Шаfranов, *Письма в ЖЭТФ*, **15** (1972), 72.
- [3] B. Coppi, R. Dagazian and R. Gajewski, *Phys. Fluids*, **15**(1972), 2405.
- [4] Л. С. Соловьев, *Атомная энергия*, **34**(1973), 207.
- [5] J. P. Freidberg and F. A. Haas, *Phys. Fluids*, **17**(1974), 440.
- [6] B. M. Marder, *Phys. Fluids*, **17**(1974), 447.
- [7] 顾永年、邱乃贤, 受控核聚变 (1974 年会议资料选编), 原子能出版社, 26页(1975).
- [8] 王竹溪、郭敦仁, 特殊函数概论, 科学出版社, 1965 年.
- [9] N. W. McLachlan, "Theory and Application of Mathieu Functions", Oxford (1947).
- [10] Milton Abramowitz and Irene A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series, 55, (1966).
- [11] A. I. Van de Vooren and H. J. Van Linde, *Math. Comput.*, **20**(1966), 232.

## KINK INSTABILITIES OF A PLASMA COLUMN WITH ELLIPTICAL CROSS-SECTION

GU YONG-NIAN     QIU NAI-XIAN

(Southwestern Institute of Physics, China)

### ABSTRACT

Kink instabilities of a sharp boundary plasma column with elliptical cross-section are studied. A general form of dispersion relation expressed in terms of elliptical eigenfunctions and analytical results for single-mode and double-mode perturbation (to second order in ellipticity  $\varepsilon$ ) are given. For an arbitrary ellipticity, numerical calculations are carried out.

Numerical results show that the coupling among modes has a destabilizing effect.  $\bar{q}_z$  required for stability increases rapidly with  $\varepsilon$ . Accordingly, the number of coupled modes to be taken into account will also increase. When the coupled modes for a given  $\varepsilon$  increases to a certain number,  $\bar{q}_z$  approaches a limit. With  $a/b > 2$  and in the absence of a conductive shell, we obtain approximately:

$$\bar{q}_z - 1 \propto (a/b)^2.$$

For a system of finite length, perturbations having wavelength equal to the system length are the most dangerous ones. In the case of small ellipticity, as the system length shortens (i.e. the aspect ratio decreases) the value of  $\bar{q}_z$  required for those perturbations increases only slightly. A conductive shell close to the plasma has a stabilizing effect to some extent. However, if  $a/b$  is large enough, either perturbation with finite wavelength or any conductive shell has hardly any effect on the value of  $\bar{q}_z$ . In addition, in the presence of a conductive shell,  $\bar{q}_z$  changes abruptly at certain values of  $a/b$ . The stability condition is more stringent in the high- $\beta$  system than in low- $\beta$  system.