

缓变波导开放谐振腔的理论分析¹⁾

李 强 法

(北京大学无线电电子学系)

1980年1月30日收到

提 要

本文给出了确定任意纵剖面形状的缓变波导开放谐振腔内各模式谐振频率的普遍关系式。探讨了腔内各谐振模式场的纵向分布函数的求解方法。具体地分析了鼓形腔和双圆锥腔,分别推导了这两种开放腔各模式的固有谐振频率公式以及场的纵向分布函数。理论分析与实验结果甚为一致。

近年来,作为一种新型高功率微波源,自由电子回旋脉塞器件受到了很大重视。这类器件采用一个或几个开放谐振腔或波导段作为电子束与高频电磁场相互作用的高频结构,因而研究开放谐振腔也就成为一个重要课题。缓变波导理论横截面法导出了缓变波导中电磁场纵向分布函数所近似遵从的微分方程^[1]。本文从该方程出发,对自由电子回旋脉塞器件实际采用的开放谐振腔进行了分析。

一、理 论 概 述

被约束在一个局部区域内的波具有分立模式谱,这是物理学中波的一种普遍属性。在力学、声学 and 量子力学中都可以遇到这种情形。普通微波谐振腔是利用封闭金属界面把高频电磁波约束在其中的,也具有分立的谐振模式谱。本文所讨论的缓变波导开放谐振腔,是利用空心金属波导的传输和截止特性而把某种波型的电磁波约束在一段波导内的。如果在一段缓变波导中对某一波型可以形成两个截止截面(即在这两个截面上该波型的波数 $k = 0$),在这两个截面之间 $k > 0$,而在此两截面之外是过截止的($k < 0$),则这段波导就可以把该波型的波约束在一个局部区域内而形成一些分立的谐振模式。本文假定波导内壁为理想导体壁。对于旋转对称结构的这类开放腔,其纵剖面一般具有图1的形状,中部比两侧略有膨胀。

如取波导轴向为 z 轴方向,按横截面法,对于缓变波导中的 H 型波或 E 型波,在某一横截面内高频电磁场结构与相应比较波导(即其横截面与缓变波导中该截面相同的规则波导)同一波型电磁场的横向结构相同。描写电磁场对 z 轴依赖关系的函数 $f_z(\omega, z)$ 满足下面的微分方程:

1) 实验验证由中国科学院电子学研究所陈增圭同志完成。

$$\frac{d^2 f_s}{dz^2} + k^2(\omega, z) f_s = 0, \quad (1)$$

式中

$$k^2(\omega, z) = \frac{\omega^2}{c^2} - k_c^2(z)$$

为某一波型波数的平方, $k_c^2(z)$ 为与缓变波导中某一横截面相对应的比较波导中同一波型横向波数的平方, 其具体函数形式取决于波型和纵剖面形状. $k_c^2(z)$ 的一般函数形式示于图 2, 其中 $z = a$ 及 $z = b$ 即为某一波型的两个截止截面. ω 为场的角频率, c 为光速. 假定场对时间的依赖关系为 $e^{i\omega t}$.

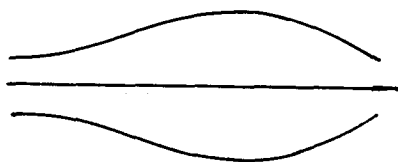


图 1 缓变波导开放谐振腔纵剖面的一般形状

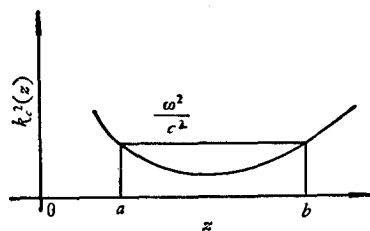


图 2 $k_c^2(z)$ 的一般函数形式

规则波导中场的纵向分布函数 f_s 也满足方程 (1), 只不过其中 k^2 不是 z 的函数.

对于旋转对称结构的这类开放腔, 如采用柱坐标系, 其中 H 型波 (或 E 型波) 高频电磁场分布函数为

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_s(r, \theta) f_s(z) e^{i\omega t}, \quad (2)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_s(r, \theta) f_s(z) e^{i\omega t}. \quad (3)$$

$\mathbf{E}$ 与 $\mathbf{H}$ 各分量之间的关系由 Maxwell 方程组以及波导壁边界条件确定. $\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s$ 分别为缓变波导中电场和磁场在横截面内的分布, 由波型及横截面形状确定. 按横截面法, $\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s$ 与相应比较波导中的相同, 因而可由规则波导理论解决. 不过应注意的是, 这里的波导横截面是 z 的缓变函数, 因而 $\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s$ 也是 z 的缓变函数. 而且我们假定, 对于 H 型波, (2) 式中电场 z 向分量为零; 对于 E 型波, (3) 式中磁场 z 向分量为零. (2) 及 (3) 式中 $f_s(z)$ 为方程 (1) 在给定条件下的解.

于是, 对于给定的缓变波导开放谐振腔, 研究其中所存在的固有谐振模式谱的问题就归结为方程 (1) 的求解问题.

由于我们需要的是把某种波型的波约束在波导中一个局部区域的解, 而方程 (1) 中 $f_s(z)$ 表示开放腔中场的纵向分布, 因而要求方程 (1) 的解必须是单值、连续、有限, 且满足 $z \rightarrow \pm\infty$ 时 $f_s \rightarrow 0$ 的条件.

$k_c^2(z)$ 仅在少数几种情形下具有极为简单的函数形式, 使方程 (1) 可以准确求解. 第二节所讨论的鼓形腔是一个可以求得准确解的例子. 一般情形下, 求解方程 (1) 是一个非常复杂的问题. 对于很多不能求得准确解的情形, 我们必须寻求某种近似方法来求解. 由于缓变波导开放腔中 $k_c^2(z)$ 是 z 的缓变函数, 因而方程 (1) 大多可以满足 WKB 法^[2,3] 的适用条件. 以下讨论如何应用 WKB 法分析缓变波导开放谐振腔. 令

$$k(\omega, z) = \left[\frac{\omega^2}{c^2} - k_c^2(z) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (a < z < b), \quad (4)$$

$$\kappa(\omega, z) = \left[k_c^2(z) - \frac{\omega^2}{c^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (z < a, z > b). \quad (5)$$

按 WKB 法, 满足对 $f_s(z)$ 要求的方程 (1) 的解在三个区域内分别具有以下形式:

$$f_{s1} \propto \frac{1}{\sqrt{\kappa(\omega, z)}} \exp \left[- \int_z^a \kappa(\omega, z) dz \right] \quad (z < a), \quad (6)$$

$$f_{s2} \propto \frac{1}{\sqrt{k(\omega, z)}} \exp \left[\pm i \int_a^z k(\omega, z) dz \right] = \frac{2}{\sqrt{k(\omega, z)}} \sin \left(\int_a^z k(\omega, z) dz + \alpha \right) \quad (a < z < b), \quad (7)$$

$$f_{s3} \propto \frac{1}{\sqrt{\kappa(\omega, z)}} \exp \left[- \int_b^z \kappa(\omega, z) dz \right] \quad (z > b). \quad (8)$$

按照对 $k(\omega, z)$ 的假定, 开放腔中某一谐振模式两个截止截面 $z = a$ 及 $z = b$ 是方程 (1) 的两个转折点. 由于方程 (1) 在转折点及其邻域内是解析的, 因而存在着解析解且解的渐近形式在三个区域内应分别与 (6)–(8) 式相同. 现在讨论在两个转折点及其邻域内方程 (1) 解的形式, 说明按 WKB 法得出的三个区域内的解在两个转折点附近如何平滑连接的问题.

在 $z = a$ 邻域内, 设 $k^2(\omega, z)$ 可以写成

$$k^2(\omega, z) = \mu(z - a). \quad (9)$$

此处

$$\mu = \frac{\partial}{\partial z} k^2(\omega, z) |_{z=a}.$$

令

$$t_1 = \mu^{\frac{1}{3}}(z - a), \quad (10)$$

则方程 (1) 变形为 Airy 方程

$$\frac{d^2}{dt_1^2} f_s + t_1 f_s = 0, \quad (11)$$

其解为

$$f_s = \begin{cases} \sqrt{\frac{|t_1|}{3\pi}} K_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} |t_1|^{\frac{3}{2}} \right) & (t_1 < 0), \end{cases} \quad (12)$$

$$f_s = \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi t_1}{3}} \left[J_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} t_1^{\frac{3}{2}} \right) + J_{-\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} t_1^{\frac{3}{2}} \right) \right] & (t_1 > 0), \end{cases} \quad (13)$$

其中 $K_{\frac{1}{3}}(x)$ 和 $J_{\frac{1}{3}}(x)$ 分别为 1/3 阶第二类虚宗量 Bessel 函数和 1/3 阶第一类 Bessel 函数.

同样, 在 $z = b$ 邻域内, 设

$$k^2(\omega, z) = \nu(b - z). \quad (14)$$

这里

$$\nu = \frac{\partial}{\partial z} k^2(\omega, z) |_{z=b}.$$

令

$$t_2 = \nu^{\frac{1}{3}}(b - z), \quad (15)$$

于是方程 (1) 在 $z = b$ 邻域内也变形为 Airy 方程

$$\frac{d^2}{dt_2^2} f_s + t_2 f_s = 0, \quad (16)$$

其解为

$$f_s = \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi t_2}{3}} \left[J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3} t_2^{3/2}\right) + J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3} t_2^{3/2}\right) \right] & (t_2 > 0), \\ \sqrt{\frac{|t_2|}{3\pi}} K_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3} |t_2|^{3/2}\right) & (t_2 < 0). \end{cases} \quad (17)$$

对 (12) 式利用 $t_1 \rightarrow -\infty$ 时 $K_\nu(t_1)$ 的渐近表示式及 (10) 式,

$$\begin{aligned} f_s &\simeq \lim_{t_1 \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{|t_1|}{3\pi}} K_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3} |t_1|^{3/2}\right) \simeq \frac{1}{|t_1|^{\frac{1}{4}}} e^{-\frac{2}{3}|t_1|^{3/2}} \\ &\simeq \frac{1}{\sqrt{\kappa(\omega, z)}} \exp\left[-\int_a^z \kappa(\omega, z) dz\right]. \end{aligned}$$

上式与 (6) 式具有相同的函数形式.

对 (13) 式利用 $t_1 \rightarrow \infty$ 时 $J_\nu(t_1)$ 的渐近表示式及 (10) 式,

$$f_s \simeq \frac{2}{t_1^{1/4}} \sin\left(\frac{2}{3} t_1^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) \simeq \frac{2}{\sqrt{k(\omega, z)}} \sin\left(\int_a^z k(\omega, z) dz + \frac{\pi}{4}\right). \quad (19)$$

(19) 式与 (7) 式形式相同. 由于这两式都是方程 (1) 在 $z > a$ 区域内的解, 应当一致,

因此得出 (7) 式中 $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

$z = b$ 邻域内. 对 (17) 式利用 $J_\nu(t_2)$ 当 $t_2 \rightarrow \infty$ 时的渐近表示式及 (15) 式, 有

$$\begin{aligned} f_s &\simeq \frac{2}{t_2^{1/4}} \sin\left(\frac{2}{3} t_2^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) \simeq \frac{2}{\sqrt{k(\omega, z)}} \\ &\cdot \sin\left(\int_z^b k(\omega, z) dz + \frac{\pi}{4}\right) \quad (z < b). \end{aligned} \quad (20)$$

$t_2 \rightarrow -\infty$ 时, (18) 式的渐近表示式为

$$f_s \simeq \frac{1}{|t_2|^{\frac{1}{4}}} e^{-\frac{2}{3}|t_2|^{3/2}} \simeq \frac{1}{\sqrt{\kappa(\omega, z)}} \exp\left[-\int_b^z \kappa(\omega, z) dz\right] \quad (z > b). \quad (21)$$

(21) 式与 (8) 式具有相同的函数形式.

从讨论 $z = a$ 及 $z = b$ 邻域内方程 (1) 解的过程可以看出, 在这两个转折点邻域内方程 (1) 变形为 Airy 方程, 可以用其解 Airy 函数与 WKB 法将三个区域内的解相连接. 于是, 我们求得了开放腔内满足前面所述条件的解. 这种解在 $a < z < b$ 时, 为驻波形式; 而在 $z < a, z > b$ 时, 呈指数衰减形式.

前面说过, 被约束在一个局部区域内的波具有分立模式谱. 现在我们从方程 (1) 在各个区域内的解互相平滑连接来说明这个问题.

(19) 式可改写成

$$\begin{aligned}
 f_s &\sim \frac{2}{\sqrt{k(\omega, z)}} \sin\left(\int_a^z k(\omega, z) dz + \frac{\pi}{4}\right) \\
 &= \frac{2}{\sqrt{k(\omega, z)}} \sin\left(\int_a^b k(\omega, z) dz - \int_z^b k(\omega, z) dz + \frac{\pi}{4}\right) \\
 &= \frac{2}{\sqrt{k(\omega, z)}} \sin\left[\left(\int_a^b k(\omega, z) dz + \frac{\pi}{2}\right) - \left(\int_z^b k(\omega, z) dz + \frac{\pi}{4}\right)\right] \\
 &= \frac{2}{\sqrt{k(\omega, z)}} \sin\left(\int_a^b k(\omega, z) dz + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\int_z^b k(\omega, z) dz + \frac{\pi}{4}\right) \\
 &\quad - \frac{2}{\sqrt{k(\omega, z)}} \cos\left(\int_a^b k(\omega, z) dz + \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\int_z^b k(\omega, z) dz + \frac{\pi}{4}\right) \\
 &\quad (a < z < b). \quad (22)
 \end{aligned}$$

由于(19)和(20)式同为 $a < z < b$ 区域内方程(1)的解, 而 $f_s(z)$ 必须是单值的, 因而(22)与(20)式应取相同的函数形式. 比较(20)与(22)式, (22)式中第一项必须为零. 从而得出

$$\int_a^b k(\omega, z) dz = \left(l + \frac{1}{2}\right) \pi \quad (l = 0, 1, 2, 3, \dots). \quad (23)$$

(23)式是一个很重要的关系式, 它确定了开放腔中固有谐振模式的谐振频率. 值得注意的是, 在得出(23)式的过程中, 我们仅假定在 $z = a$ 及 $z = b$ 邻域内 $k^2(\omega, z)$ 为 z 的线性函数(这对于缓变截面波导来说是一个很好的近似), 而对于 $k^2(\omega, z)$ 在整个区域内具体的函数形式并未作任何规定, 它可以是 z 的任意缓变函数. 因而(23)式应当是任意纵剖面缓变波导开放谐振腔内各个固有谐振模式必须满足的普遍关系式. 由(22)及(23)两式可以看出, l 即为某一谐振模式两个截止面之间的驻波节点数. 从而, 说明了谐振模式谱是分立的. 于是, 在 $a < z < b$ 区域内方程(1)的解为

$$\begin{aligned}
 f_s &\sim (-1)^l \frac{2}{\sqrt{k(\omega, z)}} \sin\left(\int_z^b k(\omega, z) dz + \frac{\pi}{4}\right) \\
 &\sim \frac{2}{\sqrt{k(\omega, z)}} \sin\left(\int_a^z k(\omega, z) dz + \frac{\pi}{4}\right) \quad (a < z < b). \quad (24)
 \end{aligned}$$

由于在某一谐振模式的两个截止截面之外方程(1)的解呈指数衰减形式, 如果该模式的两个截止截面与开放腔的端口相距较远, 则该模式的电磁场就几乎完全被约束在腔内. 如果腔体内表面接近于理想导体壁, 则该谐振模式的 Q 值可以是很高的. 但在实际应用中, 我们总是需要从开放腔耦合出一定功率. 腔与外界耦合的强弱与所设计谐振模式截止截面和开放腔端口距离的大小以及外接部分的剖面形状直接有关. 而且, 由于谐振腔与外界的耦合, 与所有形式的谐振腔一样, 外界对于腔内该模式的谐振频率及场分布具有一定的影响. 对于高 Q 值谐振模式, 这种影响是很小的. 关于外接部分的影响、 Q 值的计算以及其它方面的一些问题, 我们拟另文讨论.

二、鼓形开放腔的固有谐振模式谱

本节讨论由一段半径按以下规律

$$R(z) = \frac{R_0}{\sqrt{1 + \alpha^2 z^2}} \quad (25)$$

变化的缓变截面圆波导构成的开放谐振腔。其中 R_0 为圆波导半径极大值, 令该截面 $z = 0$; α 为小正实数。这种开放腔的纵剖面形状如图 3 所示, 其内表面形状像腰鼓一样。其 $k^2(z)$ 的函数形式有如图 4 所示的形状。

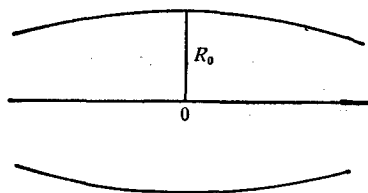
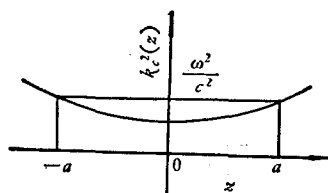


图 3 鼓形腔纵剖面形状

图 4 鼓形腔 $k^2(z)$ 的形式

对于鼓形腔的 H_{mnl} 谐振模式, 方程 (1) 的具体形式为

$$\frac{d^2}{dz^2} f_s + \left[\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{p_{mn}'^2}{R^2(z)} \right] f_s = 0, \quad (26)$$

此处 p_{mn}' 为 Bessel 函数导数 $\frac{d}{dx} J_m(x) = 0$ 的第 n 个根, ($m = 0, 1, 2, 3, \dots, n = 1, 2, 3, \dots$).

而波数 $k^2(\omega, z)$ 的具体形式为

$$k^2(\omega, z) = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{p_{mn}'^2}{R_0^2} (1 + \alpha^2 z^2) = k_0^2 - \frac{p_{mn}'^2}{R_0^2} \alpha^2 z^2, \quad (27)$$

其中

$$k_0^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{p_{mn}'^2}{R_0^2} \quad (28)$$

为 $R = R_0$ 规则圆波导中 H_{mn} 型波的波数平方。

方程 (26) 变成

$$\frac{d^2 f_s}{dz^2} + \left(k_0^2 - \frac{p_{mn}'^2}{R_0^2} \alpha^2 z^2 \right) f_s = 0. \quad (29)$$

令

$$\left(\frac{p_{mn}' \alpha}{R_0} \right)^{\frac{1}{2}} z = \xi,$$

则方程 (29) 化成 Weber 方程

$$\frac{d^2 f_s}{d\xi^2} + (\lambda - \xi^2) f_s = 0, \quad (30)$$

其中

$$\lambda = \frac{R_0}{p_{mn}' \alpha} k_0^2. \quad (31)$$

已经证明^[4], 方程 (30) 仅当

$$\lambda = (2l + 1) \quad (l = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (32)$$

时, 才有连续、有限且满足 $z \rightarrow \pm \infty, f_s \rightarrow 0$ 的解, 其解为

$$f_s = e^{-\frac{\xi^2}{2}} H_l(\xi) = e^{-\frac{p'_{mn}\alpha}{2R_0} z^2} H_l\left(\sqrt{\frac{p'_{mn}\alpha}{R_0}} z\right), \quad (33)$$

其中

$$H_l(\xi) = (-1)^l e^{\xi^2} \frac{d^l}{d\xi^l} e^{-\xi^2} \quad (34)$$

为 l 阶 Hermite 多项式 ($l = 0, 1, 2, 3, \dots$).

(33) 式即为鼓形开放腔内 H_{mnl} 模式场的纵向分布函数.

前四个 Hermite 多项式的值分别是

$$H_0(\xi) = 1, \quad H_1(\xi) = 2\xi, \quad H_2(\xi) = -2 + 4\xi^2, \quad H_3(\xi) = -12\xi + 8\xi^3.$$

按 (33) 式画出的鼓形开放腔中 H_{mnl} 谐振模式当 $l = 0, 1, 2, 3$ 时场的纵向分布函数图形如图 5 所示. 当 $l = 0$ 即基模时, 是严格的正态分布.

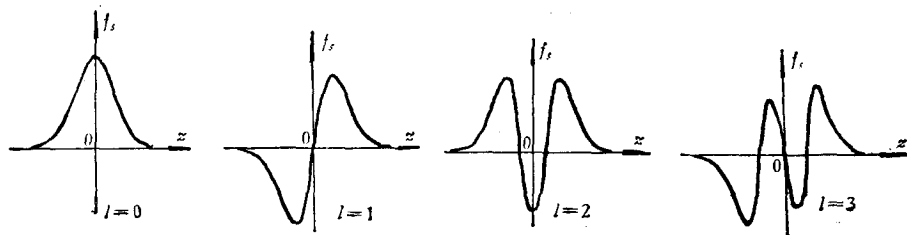


图 5 鼓形腔 H_{mn0} , H_{mn1} , H_{mn2} 及 H_{mn3} 谐振模式的纵向场分布函数图形(曲线引自文献 [3] 71 页)

由 (31), (32) 式, 有

$$\frac{R_0}{p'_{mn}\alpha} k_0^2 = 2l + 1,$$

即有

$$\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{p'^2_{mn}}{R_0^2} = (2l + 1) \frac{p'_{mn}\alpha}{R_0}.$$

由此得出鼓形开放腔 H_{mnl} 模式的谐振频率为

$$f_{mnl} = \frac{c}{2\pi} \left[(2l + 1) \frac{p'_{mn}\alpha}{R_0} + \frac{p'^2_{mn}}{R_0^2} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (35)$$

需要指出的是, (35) 式是由方程 (30) 在 $z \rightarrow \pm \infty$ 时有 $f_s \rightarrow 0$ 的解而得出的. 可以验证, 不由 (31), (32) 式而直接由普遍关系式 (23) 同样可以得出 (35) 式.

对于鼓形腔的 E_{mnl} 谐振模式, 上述公式也是适用的, 只须将其中 p'_{mn} 改作 p_{mn} 即可. 此处 p_{mn} 为 m 阶 Bessel 函数 $J_m(x) = 0$ 的第 n 个根.

我们之所以要比较详细地讨论鼓形腔, 是由于这种腔的固有谐振模式可以严格求解. 而且, 对于具有光滑缓变 $k^2(z)$ 的开放腔, 如果我们在 $k^2(z)$ 极小值 $z = z_0$ 处作 Taylor 展开, 由于该处一阶导数为零因而一次项不存在. 如果只取常数项和二次项, 就可以把剖面形状与鼓形腔相近的开放谐振腔各固有谐振模式的谐振频率和场的纵向分布函数的近似值求出来. 因而, 鼓形腔可以作为一些开放腔近似分析模型.

三、双圆锥开放腔的计算

自由电子回旋脉塞器件中高频结构所普遍采用的一种缓变波导开放谐振腔，其内表面由两个圆锥面对接而成，故称之为双圆锥腔。这种腔的纵剖面形状及其 $k_z^2(z)$ 的函数形式分别示于图 6 和图 7。图 6 中 θ_1 及 θ_2 分别为两个圆锥面的锥角， θ_1 与 θ_2 很小。这种双圆锥腔的最大优点是加工方便，而且在具体设计时可由适当选取 θ_1 及 θ_2 的值、工作模式的两个截止截面与腔体端口的距离来获得所需的特性。

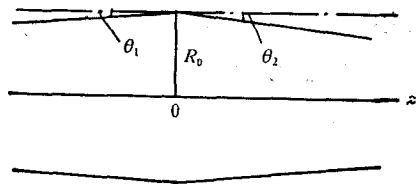
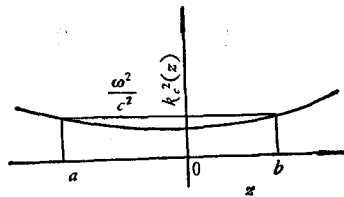


图 6 双圆锥腔纵剖面形状

图 7 双圆锥腔 $k_z^2(z)$ 形式

下面我们来讨论双圆锥开放腔的 H_{mni} 谐振模式。取腔的中心轴为 z 轴，且令腔最大横向半径处的截面为 $z = 0$ 。

对于 $z < 0$,

$$R_1(z) = R_0 + z \operatorname{tg} \theta_1 \quad (z < 0), \quad (36)$$

$$k_1^2(\omega, z) = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{p_{mn}'^2}{(R_0 + z \operatorname{tg} \theta_1)^2}. \quad (37)$$

令 $k_1^2 = 0$ ，得出一个截止截面的位置并设其为 $z = a$ ，

则

$$a = -\frac{1}{\operatorname{tg} \theta_1} \left(R_0 - \frac{p_{mn}' c}{\omega} \right); \quad (38)$$

对于 $z > 0$,

$$R_2(z) = R_0 - z \operatorname{tg} \theta_2 \quad (z > 0), \quad (39)$$

$$k_2^2(\omega, z) = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{p_{mn}'^2}{(R_0 - z \operatorname{tg} \theta_2)^2}. \quad (40)$$

令 $k_2^2 = 0$ ，得出另一截止截面的位置并设其 $z = b$ ，则

$$b = \frac{1}{\operatorname{tg} \theta_2} \left(R_0 - \frac{p_{mn}' c}{\omega} \right), \quad (41)$$

其中 p_{mn}' 的意义与前同。

由 (23) 式及 (37), (38), (40), (41) 式, 有

$$\begin{aligned} \int_a^b k(\omega, z) dz &= \int_a^0 k_1(\omega, z) dz + \int_0^b k_2(\omega, z) dz \\ &= \int_a^0 \left[\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{p_{mn}'^2}{(R_0 + z \operatorname{tg} \theta_1)^2} \right]^{\frac{1}{2}} dz + \int_0^b \left[\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{p_{mn}'^2}{(R_0 - z \operatorname{tg} \theta_2)^2} \right]^{\frac{1}{2}} dz \\ &= \left[\left(\frac{R_0^2 \omega^2}{p_{mn}'^2 c^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} - \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{R_0^2 \omega^2}{p_{mn}'^2 c^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \frac{\operatorname{tg} \theta_1 + \operatorname{tg} \theta_2}{\operatorname{tg} \theta_1 \operatorname{tg} \theta_2} p_{mn}' \end{aligned}$$

$$= \left(l + \frac{1}{2} \right) \pi.$$

如令

$$\left(\frac{R_0^2 \omega^2}{p_{mn}'^2 c^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} = E, \quad \left(l + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{p_{mn}'} \frac{\operatorname{tg} \theta_1 \operatorname{tg} \theta_2}{\operatorname{tg} \theta_1 + \operatorname{tg} \theta_2} = A,$$

则可以得出确定双圆锥腔 H_{mnl} 模式谐振频率关系式如下:

$$E - \operatorname{tg}^{-1} E = A. \quad (42)$$

利用 $\operatorname{tg}^{-1} E$ 的幂级数表示式

$$\operatorname{tg}^{-1} E = E - \frac{1}{3} E^3 + \frac{1}{5} E^5 - \frac{1}{7} E^7 + \dots, \quad (43)$$

且在 (43) 式中只取前两项, 代入 (42) 式中得出

$$\frac{1}{3} E^3 = A. \quad (44)$$

由此得出谐振频率的一级近似公式如下:

$$f_{mnl} \simeq \frac{c}{\pi D_0} \left\{ \left[3 \left(l + \frac{1}{2} \right) \frac{\operatorname{tg} \theta_1 \operatorname{tg} \theta_2}{\operatorname{tg} \theta_1 + \operatorname{tg} \theta_2} p_{mn}'^2 \right]^{2/3} + p_{mn}'^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ (m = 0, 1, 2, 3, \dots; n = 1, 2, 3, \dots; l = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (45)$$

这里 $D_0 = 2R_0$, 为双圆锥腔横向直径最大值.

(45) 式对于计算基模 ($l = 0$) 以及 l 值较小的低次模式具有足够良好的精确度, 但在计算 l 值较大的高次模式时会引入一些误差. 计算高次模式时, 可以在 (43) 式中取前三项而得出确定双圆锥腔 H_{mnl} 模式谐振频率的二级近似公式

$$E^3 \simeq 3A + \frac{3}{5} E^5. \quad (46)$$

如果以 (44), (45) 式算出的 E 值作为一级近似值, 用迭代法由 (46) 式可求出具有更高精确度的谐振频率值. (46) 式中右侧第二项为第一项的二阶小量. (45) 式可以具有与文献 [5] 由电子计算机进行数值计算所得结果相同的精确度. 而且, 我们可以得出比之精确度更高的谐振频率值而免去查曲线和数表的麻烦.

同样, 如将上述公式中 p_{mn}' 换作 p_{mn} , 则对于 E_{mnl} 谐振模式也是适用的.

在一级近似之下, 对于 H_{mnl} 模式, 其两个截止截面的位置分别为

$$a \simeq - \left[3 \left(l + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{\operatorname{tg} \theta_1 \operatorname{tg} \theta_2}{\operatorname{tg} \theta_1 + \operatorname{tg} \theta_2} \right) p_{mn}'^2 \pi \right]^{2/3} \frac{R_0^2}{2 p_{mn}'^2 \operatorname{tg} \theta_1}, \quad (47)$$

$$b \simeq \left[3 \left(l + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{\operatorname{tg} \theta_1 \operatorname{tg} \theta_2}{\operatorname{tg} \theta_1 + \operatorname{tg} \theta_2} \right) p_{mn}'^2 \pi \right]^{2/3} \frac{R_0^2}{2 p_{mn}'^2 \operatorname{tg} \theta_2}. \quad (48)$$

对于实际设计的双圆锥腔, 如果某一模式按上面两式算出的截止截面位置中的一个大于腔体相应一端的长度 (从 $z = 0$ 截面至相应一端波导直径为最小的截面的距离), 则可以认为该模式不能在腔体中存在; 反之, 则可以存在. 由此, 我们可以计算出所设计腔体中某一波型谐振模式的数目. 而且, 由 (45) 式可以很方便地计算出各个模式之间的频率间隔.

至于双圆锥腔中 H_{mnl} 模式场的纵向分布, 我们可以由第一节 WKB 法所给出的一些

近似公式代入具体的 k_1 及 k_2 值计算出来, 这里不具体进行计算. 需要指出的是, 这种双圆锥腔的 H_{mnl} 模式场的纵向分布与第二节所讨论的鼓形腔相应模式场的纵向分布相似, 但又有所不同. 可以这样来简单说明: 比较图 4 与图 7, 两者 $k_z^2(z)$ 的函数形式很相似, 而又有所差别. 在 θ_1 与 θ_2 不相等的情形, $k_z^2(z)$ 对 $z=0$ 截面是不对称的, 因而场的纵向分布对 $z=0$ 面也不是对称的. 在 θ 值较小一侧场的纵向分布比 θ 值较大的另一侧沿波导轴向变化要缓慢些, 驻波节点间的距离也略大些.

由 (45) 式可以看出, l 与 $l \pm 1$ 相邻模式之间的频率间隔度随 l 的加大而减小. 在保持 θ_1 及 θ_2 值很小的前提下, 适当加大 θ_1 或 θ_2 可以加大相邻模式的频率间隔. 但在波导段横向半径变化较大时, 对于半径固定的环形电子束, 不能使之在较大的作用距离上处于和高频场相互作用最佳的径向位置^[6], 这是不希望的.

四、实验结果

我们对 8 毫米波段具有不同形状参数和不同模式的双圆锥腔的设计数据进行了计算, 并与实验测得的谐振频率值进行了比较. 结果表明, 用一级近似公式 (45) 计算时, 对 $l \leq 3$ 的低次模式, 包括加工精度误差和测试误差在内, 计算值与实测值之间的相对误差在 0.3% 以下. 测得的场的纵向分布与理论分析是接近的. 限于加工条件, 未能对鼓形腔进行实验.

五、结 语

我们从方程 (1) 出发, 对于缓变波导开放谐振腔进行了理论分析. 由腔体内高频场纵向分布函数所必须满足的条件, 得出了具有任意纵剖面形状的开放腔各模式谐振频率满足的普遍关系式. 探讨了求解纵向分布函数的方法. 具体分析了鼓形腔和双圆锥腔并进行了简单讨论. 实验结果证实了本文的理论分析是正确的.

需要说明的是, 由于本文是从方程 (1) 出发而进行讨论的, 但方程 (1) 仅只是近似地描述了缓变截面波导内的电磁场分布. 实际上, 除了可以存在的分立谐振模式之外, 由于模式转换, 还不可避免地能够以行波模式传输. 由于这个原因以及波导壁的欧姆损耗, 即使对于无限长的这类开放谐振腔, 其固有 Q 值也是有限的.

对于徐承和副教授的关怀和指导, 四机部吴鸿适副总工程师、中国科学院电子学研究所郭和忠副研究员以及北京大学无线电系吴德明等老师所提宝贵意见, 作者在此一并致谢.

参 考 文 献

- [1] Б. З. Каценеленбаум, Теория нерегулярных волноводов. с медленно меняющимися параметрами изд. АН СССР. М. 1961.
- [2] Eugen Merzbacher, Quantum Mechanics, chap. 3, second edition, John Wiley & Sons, Inc., (1970).
- [3] Leonard I. Schiff, Quantum Mechanics, chap. 8, third edition, McGraw-Hill Book Company, (1968).
- [4] 王竹溪、郭敦仁, 特殊函数概论, 科学出版社, 第六章(1979).
- [5] С. Н. Власов и др., Изв. Радиофизика, XII(8) (1969), 1236.

[6] K. R. Chu, *Phys. Fluids*, pp. 2354—2364, Dec. 1978.

THEORETICAL ANALYSIS OF OPEN RESONATORS IN THE FORM OF WAVEGUIDE WITH SLOW-VARIED CROSS SECTION

LI QIANG-FA

(*Department of Radio-Electronics, Peking University*)

ABSTRACT

In this paper, we obtain a general equation for determining the resonant frequencies of all the modes in an open resonator in the form of waveguide with slow-varied cross section, which has any shape of longitudinal profile. The method to solve the field longitudinal distribution function in the resonators is investigated. As examples, we derived formulas for determining the resonant frequencies of all the modes for two kinds of resonators that have drum shape and dual-cone shape intersurfaces.

A good agreement between the theoretical analysis and the experimental results has been demonstrated.