

晶体转动时非常光的轨迹

张 之 翔

(北京大学物理系)

1979 年 12 月 27 日收到

提 要

本文就光入射到单轴晶体的情况, 求得了非常光线方向的普遍公式, 并按冰洲石的相应数据画出了三视图, 使得晶体转动时, 非常光的轨迹明显可见. 所得结果为测定晶片光学常数的新方法提供了可能性.

一、非常光的进行方向

1. 子波的波面方程

设一束平行的自然光斜入射到单轴晶体的表面(平面)上, 取其中一条光线与晶体表面的交点为原点 $o(0, 0, 0)$, 以这条光线的入射面为 xy 平面, 以晶体表面为 xz 平面, 取坐标如图 1, y 轴与晶体表面的外法线 N 平行. 入射光里的每条光线射到晶体上以后, 都在晶体内产生子波, 非常光(e 光)的子波是以入射点为中心, 以光轴为旋转轴的旋转椭球面. 根据惠更斯原理, 这些子波的包络面就是 e 光的波面. 设入射到原点 o 的那条光线所产生的子波与包络面相切于 $T(x_1, y_1, z_1)$ 点, 则直线 oT 便是我们所要求的 e 光光线.

设光轴与晶体表面(xz 平面)的夹角为 φ , 经过原点 o 的那根光轴与晶体表面的法线 N (y 轴) 构成一个平面, 这平面与入射面(xy 平面)的夹角为 θ , 如图 2 所示. 以光轴为 x'' 轴, 以 o 为原点, 取一个固定在晶体上的坐标系 $x''y''z''$. 设 $t = 0$ 时刻, 入射光到达原点 o , 并从 o 向晶体内发出 e 光的子波, 则在 t 时刻, 这子波波面的方程便为

$$\frac{x''^2}{(v_o t)^2} + \frac{y''^2}{(v_e t)^2} + \frac{z''^2}{(v_e t)^2} = 1,$$

式中 v_o 是寻常光(o 光)的速度, v_e 是 e 光在垂直于光轴方向上的速度. 由于我们关心的只是 e 光进行的方向, 而这方向与时间 t 无关, 因此, 为简单起见, 我们取 $t = 1/c$ 时刻来讨论(c 是真空中光速), 这时上式就化为

$$n_o^2 x''^2 + n_e^2 y''^2 + n_e^2 z''^2 = 1, \quad (1)$$

式中 $n_o = c/v_o$ 是 o 光的折射率, $n_e = c/v_e$ 是 e 光的折射率; $n_o > n_e$ 为负晶体, $n_o <$

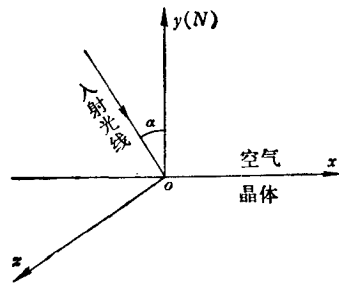


图 1 自然光斜入射到晶体表面上

n_e 为正晶体. 我们需要用 xyz 坐标系来表示 (1) 式. 为此, 先要求出 $x''y''z''$ 到 xyz 的变换关系. 求这个变换关系的方法如下: 如图 2, 先把 xyz 坐标系统绕 y 轴转 θ 角, 得出 $x'y'z'$ 坐标系; 再把 $x'y'z'$ 坐标系统绕 z' 轴转 φ 角, 得出 $x''y''z''$ 坐标系. 由此求得 $x''y''z''$ 到 xyz 的变换关系如下:

$$\begin{aligned} x'' &= x \cos \theta \cos \varphi - y \sin \varphi + z \sin \theta \cos \varphi; \\ y'' &= x \cos \theta \sin \varphi + y \cos \varphi + z \sin \theta \sin \varphi; \\ z'' &= -x \sin \theta + z \cos \theta. \end{aligned} \quad (2)$$

把 (2) 式代入 (1) 式, 便得出: 在 $t = 1/c$ 时刻, o 点发出的 e 光子波波面在 xyz 坐标系中的方程为

$$\begin{aligned} &[(n_o^2 \cos^2 \varphi + n_e^2 \sin^2 \varphi) \cos^2 \theta + n_e^2 \sin^2 \theta] x^2 + [n_o^2 \sin^2 \varphi + n_e^2 \cos^2 \varphi] y^2 \\ &+ [(n_o^2 \cos^2 \varphi + n_e^2 \sin^2 \varphi) \sin^2 \theta + n_e^2 \cos^2 \theta] z^2 + 2(n_e^2 - n_o^2) \sin \varphi \cos \varphi \cos \theta xy \\ &+ 2(n_e^2 - n_o^2) \sin \varphi \cos \varphi \sin \theta yz + 2(n_o^2 - n_e^2) \cos^2 \varphi \sin \theta \cos \theta zx - 1 = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

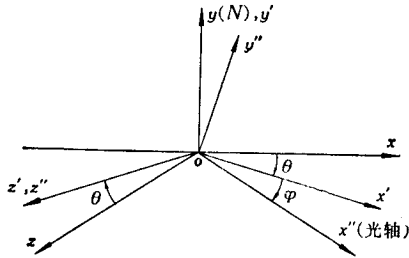


图 2 光轴 (x'' 轴) 与入射面 (xy 平面) 和晶体表面 (xz 平面) 的关系

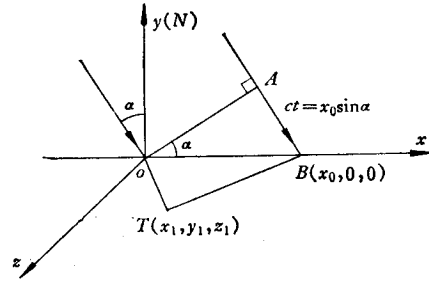


图 3 t 时刻切面经过 T, B 两点

2. 包络面与切点

根据解析几何, 与 e 光子波波面 (3) 式在 $T(x_1, y_1, z_1)$ 点相切的切面方程为

$$\begin{aligned} &[(n_o^2 \cos^2 \varphi + n_e^2 \sin^2 \varphi) \cos^2 \theta + n_e^2 \sin^2 \theta] x_1 x + [n_o^2 \sin^2 \varphi + n_e^2 \cos^2 \varphi] y_1 y \\ &+ [(n_o^2 \cos^2 \varphi + n_e^2 \sin^2 \varphi) \sin^2 \theta + n_e^2 \cos^2 \theta] z_1 z + (n_e^2 - n_o^2) \sin \varphi \cos \varphi \cos \theta \\ &\cdot (x_1 y + y_1 x) + (n_e^2 - n_o^2) \sin \varphi \cos \varphi \sin \theta (y_1 z + z_1 y) \\ &+ (n_o^2 - n_e^2) \cos^2 \varphi \sin \theta \cos \theta (z_1 x + x_1 z) - 1 = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

这个切面 (包络面) 就是我们所要求的 e 光波面. 在我们的问题中, e 光波面是平行于 z 轴的平面, 因此, 它不应含变量 z , 所以 (4) 式中 z 的系数应为零, 即

$$\begin{aligned} &(n_o^2 - n_e^2) \cos^2 \varphi \sin \theta \cos \theta x_1 + (n_e^2 - n_o^2) \sin \varphi \cos \varphi \sin \theta y_1 \\ &+ [(n_o^2 \cos^2 \varphi + n_e^2 \sin^2 \varphi) \sin^2 \theta + n_e^2 \cos^2 \theta] z_1 = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

这是切点 $T(x_1, y_1, z_1)$ 满足的第一个方程. 其次, 因为切点 T 在子波波面上, 故有

$$\begin{aligned} &[(n_o^2 \cos^2 \varphi + n_e^2 \sin^2 \varphi) \cos^2 \theta + n_e^2 \sin^2 \theta] x_1^2 + [n_o^2 \sin^2 \varphi + n_e^2 \cos^2 \varphi] y_1^2 \\ &+ [(n_o^2 \cos^2 \varphi + n_e^2 \sin^2 \varphi) \sin^2 \theta + n_e^2 \cos^2 \theta] z_1^2 + 2(n_e^2 - n_o^2) \sin \varphi \cos \varphi \cos \theta x_1 y_1 \\ &+ 2(n_e^2 - n_o^2) \sin \varphi \cos \varphi \sin \theta y_1 z_1 + 2(n_o^2 - n_e^2) \cos^2 \varphi \sin \theta \cos \theta x_1 z_1 - 1 = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

这是切点 $T(x_1, y_1, z_1)$ 满足的第二个方程. 第三个方程可由下面的考虑得出: 设入射角为 α , 在 t 时刻, 切面 (包络面) 与 x 轴相交于 $B(x_0, 0, 0)$ 点, 由图 3 可见, $x_0 = ct / \sin \alpha$.

因我们讨论的是 $t = 1/c$ 时刻, 故 $x_0 = 1/\sin \alpha$. 由于切面经过 $B(x_0, 0, 0)$ 点, 故由上式和 (4) 式得

$$[(n_o^2 \cos^2 \varphi + n_e^2 \sin^2 \varphi) \cos^2 \theta + n_e^2 \sin^2 \theta] x_1 + (n_e^2 - n_o^2) \sin \varphi \cos \varphi \cos \theta y_1 + (n_o^2 - n_e^2) \cos^2 \varphi \sin \theta \cos \theta z_1 - \sin \alpha = 0. \quad (7)$$

这就是切点 $T(x_1, y_1, z_1)$ 满足的第三个方程. 解上述三个方程, 得出 $t = 1/c$ 时刻, 切点 T 的坐标为

$$x_1 = \frac{\sin \alpha}{n_e^2} \left[1 - \frac{(n_o^2 - n_e^2) \cos \varphi \cos \theta}{n_o^2 \cos^2 \varphi + n_e^2 \sin^2 \varphi} (\cos \varphi \cos \theta + R \sin \varphi) \right], \quad (8)$$

$$y_1 = -\frac{\sin \alpha}{n_e^2} R, \quad (9)$$

$$z_1 = -\frac{\sin \alpha}{n_e^2} \frac{(n_o^2 - n_e^2) \cos \varphi \sin \theta}{n_o^2 \cos^2 \varphi + n_e^2 \sin^2 \varphi} (\cos \varphi \cos \theta + R \sin \varphi), \quad (10)$$

式中

$$R = \frac{1}{n_o} \sqrt{\left(\frac{n_e^2}{\sin^2 \alpha} - 1 \right) (n_o^2 \cos^2 \varphi + n_e^2 \sin^2 \varphi) + (n_o^2 - n_e^2) \cos^2 \varphi \cos^2 \theta}. \quad (11)$$

(8), (9), (10) 三式就是我们所要求的 e 光进行方向的普遍公式.

二、晶体转动时非常光的轨迹

上述公式表明, 非常光的进行方向与晶体的折射率 n_o 和 n_e 、光轴和晶体表面的夹角 φ 、光轴偏离入射面的角度 θ , 以及入射角 α 等都有关, 且关系复杂, 其几何形象不是一眼就能看得出来的; 尤其是在晶体转动 (即 θ 变化) 时, 非常光线如何动, 更无法得到直观图象. 为了得出这个图象, 我们以冰洲石 ($n_o = 1.658$, $n_e = 1.486$) 为例, 取入射角 $\alpha = 30^\circ$, 按 (8)–(10) 三式, 分别算出光轴与晶体表面的夹角为 $\varphi = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45.39^\circ$ (这

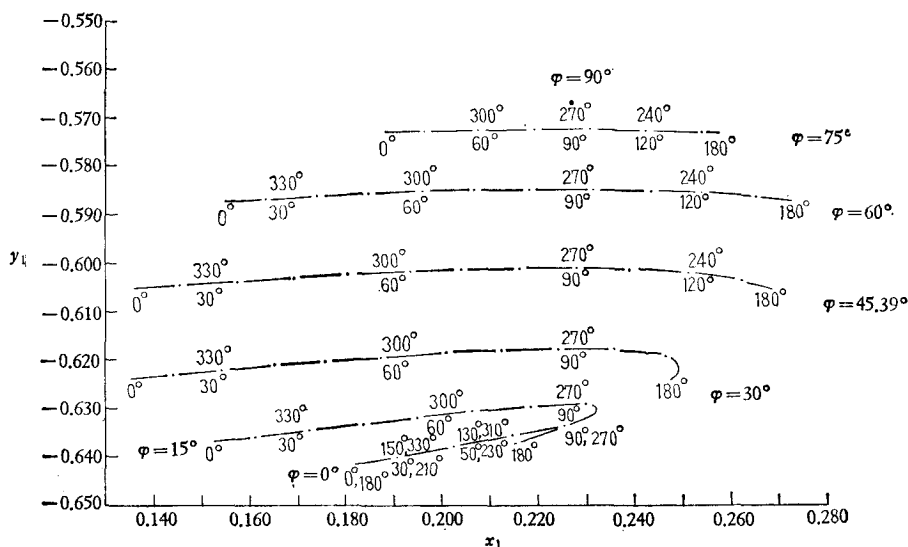
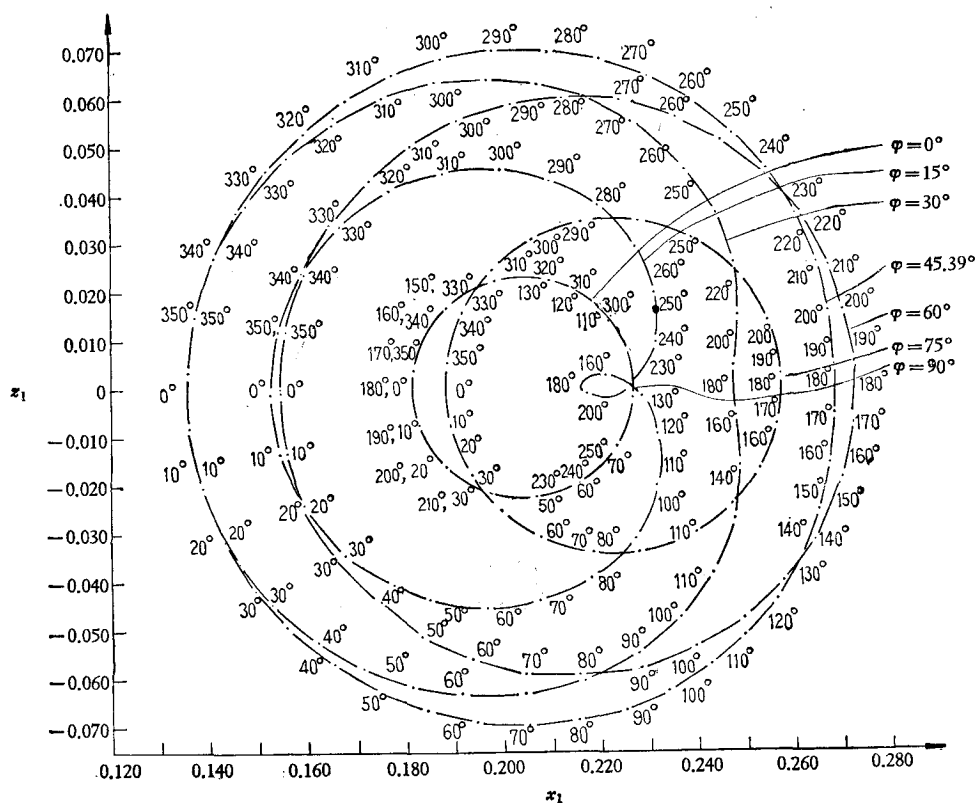
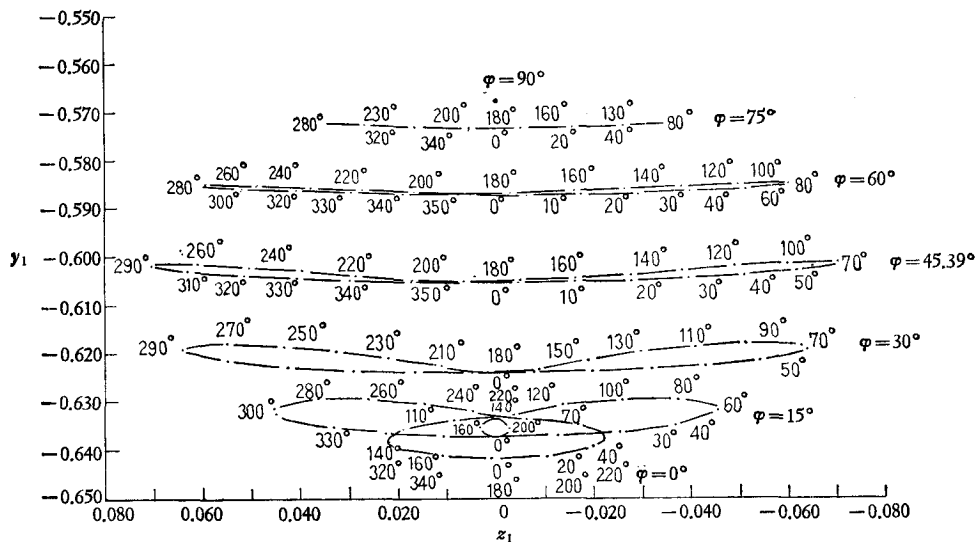


图4 晶体转动时, 非常光线的轨迹在 xy 平面上的投影 (图1的主视图)

图 5 晶体转动时,非常光线的轨迹在 xz 平面上的投影(图 1 的俯视图)图 6 晶体转动时,非常光线的轨迹在 yz 平面上的投影(图 1 的左视图)

是天然冰洲石的情况), 60° , 75° 和 90° 时,晶体转动到 θ 为各种值(从 0° 到 360°) 处 e 光的 x_1 , y_1 , z_1 的值. 按这些值画出的相应的三视图, 分别如图 4—6 所示. 图中的曲线就表示出晶体转动时 e 光光线末端(切点 T) 的轨迹. 其中图 5 就是这轨迹在晶体表面

(xz 平面)上的投影. 它表明,在光轴与晶体表面平行($\varphi = 0^\circ$)时, e 光轨迹的投影曲线是圆,当晶体转一圈时, e 光在这个圆上走两圈. 在 φ 的值由 0° 增大时,曲线有点像心脏线,里面有一个迴线,其尖端在 $\theta = 180^\circ$ 处. φ 的值渐大,曲线也向外扩大,同时迴线却缩小,终于消失; φ 再大,曲线继续向外扩大,同时 $\theta = 180^\circ$ 的凹处便向外鼓出,并逐渐拉平. φ 再大,曲线转而缩小,到 $\varphi = 90^\circ$ 时缩成一点. (注意:上面讲的是 $t = 1/c$ 时刻 e 光末端轨迹的投影,而不是用平行晶片观察时所看到的 e 光的轨迹;用平行晶片观察时, e 光从晶片上射出点的轨迹与图5中的曲线有些差别.)

三、一些应用

晶体的光学常数通常是用偏光显微镜和费氏台来测定的. 我们在前面得出的结果为测定晶片(单轴晶体切出的两面平行的晶片)的光学常数提供了新的可能性. 现在说明如下: 在正入射(即 $\alpha = 0$)时, (8)–(10)式分别化为

$$x_1 = -\frac{(n_o^2 - n_e^2) \sin \varphi \cos \varphi \cos \theta}{n_o n_e \sqrt{n_o^2 \cos^2 \varphi + n_e^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (12)$$

$$y_1 = -\frac{1}{n_o n_e} \sqrt{n_o^2 \cos^2 \varphi + n_e^2 \sin^2 \varphi}, \quad (13)$$

$$z_1 = -\frac{(n_o^2 - n_e^2) \sin \varphi \cos \varphi \sin \theta}{n_o n_e \sqrt{n_o^2 \cos^2 \varphi + n_e^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (14)$$

下面介绍这些式子的几种可能的应用.

1. 确定晶片光轴所在的平面

在前面的公式中, θ 是光轴与晶体表面法线所构成的平面同入射面之间的夹角(见图2). 当 $\theta = 0$ 或 π 时,光轴便在入射面内. 由(14)式可见,这时 $z_1 = 0$,所以 e 光和 o 光构成的平面便是光轴所在的平面. 因此,把一条自然光线正入射到待测晶片上,定出 e 光和 o 光与晶片表面法线所构成的平面,便是光轴所在的平面.

2. 测定光轴与晶片表面的夹角 φ

自然光正入射到晶片上,设 e 光与 o 光的夹角为 δ (图7). 因 $\theta = 0$ 或 π ,故由(12)和(13)两式得

$$\tan \delta = \frac{|x_1|}{|y_1|} = \frac{|n_o^2 - n_e^2| \sin \varphi \cos \varphi}{n_o^2 \cos^2 \varphi + n_e^2 \sin^2 \varphi}. \quad (15)$$

δ 与晶片厚度 h 和出晶片时 e 光与 o 光之间的距离 r 的关系为

$$\tan \delta = \frac{r}{h}. \quad (16)$$

由以上两式得

$$\tan \varphi = \frac{h}{2r} \left| \frac{n_o^2}{n_e^2} - 1 \right| \pm \sqrt{\left(\frac{h}{2r} \right)^2 \left(\frac{n_o^2}{n_e^2} - 1 \right)^2 - \frac{n_o^2}{n_e^2}}. \quad (17)$$

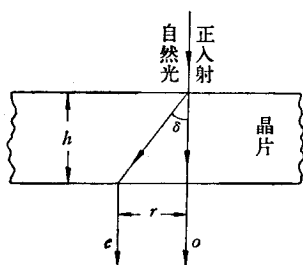
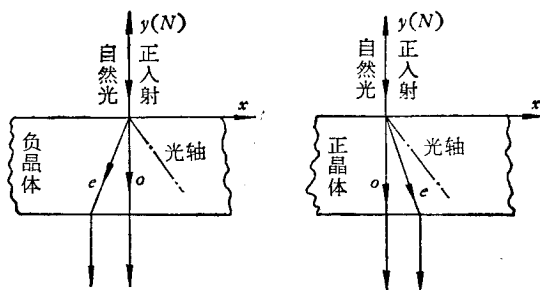


图7 自然光正入射到晶片上，光轴在 e 光和 o 光构成的平面内

因此,在 n_o/n_e 已知的情况下,测出 h/r 的值,就可以算出 φ 的值来。但是,对于 h/r 的一个值,由 (17) 式算出的 φ 值有两个: φ_+ 和 φ_- 。例如,对天然冰洲石,根据 n_o/n_e 值和测出的 h/r 值,由 (17) 式算出的 φ 值为 $\varphi_+ = 50^\circ 44'$ 和 $\varphi_- = 45^\circ 23'$, 其中 φ_- 是天然冰洲石正确的 φ 值,而 φ_+ 则否。(φ_+ 是这样来的: 把冰洲石切成 $\varphi = 50^\circ 44'$ 时,测出的 h/r 值与天然冰洲石的 h/r 值相同。) 因此,在由 (17) 式算出结果时,要判断哪个值是正确的,需要用别的方法。

3. 判别晶体的正负性

如图 8, 自然光正入射到晶片上,对于负晶体来说, e 光和光轴分别处在 o 光的异侧; 对于正晶体来说, e 光和光轴处在 o 光的同一侧。因此,以 z 轴为轴,转动晶片或入射光,如果入射光往 e 光那边偏转(即入射光转到图 8(a) 的第三象限并逐渐增大入射角), e 光与 o 光的距离越来越小,以至终于重合,便是负晶体;如果入射光往 o 光那边偏转(即入射光转到图 8(b) 的第三象限并逐渐增大入射角), e 光与 o 光的距离越来越小,以至终于重合,便是正晶体。(如果 φ 太小,则达不到重合。)



(a) 负晶体

(b) 正晶体

图8 z 轴通过入射点并与纸面垂直

4. 测定晶体的折射率

由 (15) 和 (16) 两式得出

$$\frac{n_e}{n_o} = \sqrt{\frac{\frac{h}{r} - \cot \varphi}{\frac{h}{r} + \tan \varphi}} \quad (\text{负晶体}), \quad (18)$$

$$\frac{n_e}{n_o} = \sqrt{\frac{\frac{h}{r} + \cot \varphi}{\frac{h}{r} - \tan \varphi}} \quad (\text{正晶体}). \quad (19)$$

因此, 如果知道晶片是正晶体还是负晶体和光轴与晶片表面的夹角 φ , 则测出正入射时 h/r 的值, 便可算出晶片的 n_e/n_o 来; 如再测出 n_o , 便可算出 n_e 的值来.

THE TRAJECTORY OF THE EXTRAORDINARY RAY AS THE CRYSTAL ROTATES

ZHANG ZHI-XIANG

(*Department of Physics, Peking University*)

ABSTRACT

In this article, general formulae for the direction of the extraordinary ray are obtained in the case of light incident on uniaxial crystal, the corresponding data are plotted in three-view diagrams for Iceland spar, these make the trajectory of the extraordinary ray clear as the crystal rotates. The obtained results offer a possibility of developing new methods for determination of optical constants of crystals.