

低频漂移波与赝经典扩散*

张 承 福

(北京大学物理系)

提 要

本文讨论了低频漂移波与托卡马克中反常输运的经验规律——赝经典扩散间的关系。文中指出,主要是无碰撞漂移波而不是耗散漂移波导致了赝经典扩散。当线性不稳定的无碰撞漂移波主要地由准线性弛豫过程所饱和时,可以导致赝经典形式的反常扩散,它正比于碰撞频率而与波幅关系不大。估计的反常扩散系数在量级上与实验一致。讨论了上述机制有效的参数范围。

一、引 言

横越磁场的反常输运(扩散、热导等)是磁约束等离子体中普遍而重要的问题。在托卡马克(环电流器)实验中,即使宏观上相当平稳的放电,电子热导和粒子扩散仍是反常的,要比新经典理论值大一至两个量级。除了磁面扰动、各种宏观不稳定性可能导致反常输运外,现时认为,各种低频漂移波可能是导致反常输运的重要原因。低频漂移波使粒子作横向漂移运动,主要引起横越磁场的反常输运,而对纵向电阻影响很小,这与实验是一致的。

近年来,对各种低频漂移波的线性理论已有了广泛而深入的研究^[1,2],然而,关于漂移波的反常输运问题,涉及漂移波的饱和机制,研究尚少。通常,漂移波的反常输运都是以 $\gamma/k_{\perp}^2$ 来估计的,其中 γ 是线性增长率, $k_{\perp}$ 是横向波矢。虽然有若干理论解释似能得到此式^[2],但是,理论根据并不充分。更重要的是,它虽然可作出各种“预言”,却难以解释已有的实验结果。

在很多托卡马克装置和一定实验参数范围内,发现反常输运是正比于碰撞频率的,即符合所谓“赝经典”规律³⁾。对于多数漂移波,由通常的 $\gamma/k_{\perp}^2$ 估计并不能得到此规律。Yoshikawa^[3]曾从流体方程出发,得到了类似赝经典的反常扩散。该文所考虑的实际上就是耗散漂移波(γ 正比于 e^{-i} 碰撞频率 ν_{ei})的反常扩散。然而,符合赝经典规律的大多数实验条件处于所谓“平台区”(即既非流体区,也非约束粒子区),并不符合耗散漂移波存在的条件(流体区)。通常激发的主要是各种无碰撞漂移波(包括电流驱动模、有限拉摩半径效应及温度梯度效应驱动的模等)。而且,由于不适当的假定,文献[3]的计算结果偏大。

* 1978年11月13日收到。

1) 其主要表现为 $\beta_{\perp} \approx \text{常数} \approx 0.4$ 。但高密度实验并不符合此规律,说明“赝经典”扩散只是在一定参数范围内适用的近似规律。

本文指出, 由无碰撞漂移波可能导致费经典形式的反常扩散: 由于漂移波对平衡分布函数的准线性弛豫, 新的平衡分布与碰撞频率有关, 相应的反常扩散系数正比于碰撞频率, 其数值在量级上可与实验一致.

二、基本方程

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \left(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega} + \frac{e\mathbf{E}}{m} \right) \cdot \nabla_v f = c(f), \quad (1)$$

其中 $\boldsymbol{\Omega} = \frac{e\mathbf{B}}{mc}$ (e 是电荷的代数值),

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1, \quad (2)$$

$\mathbf{E}_0$ 是维持纵向电流的电场, $\mathbf{E}_1$ 是波动电场. 其余量与通常规定相同. 由于不考虑约束粒子效应, 可取直角坐标, 令 $\mathbf{B}$ 在 z 方向, 梯度在 x 方向.

以下令 f_M 表示麦氏分布; f_{00} 表示线性理论 ($E_1 = 0$) 中的平衡分布; f_0 表示考虑准线性效应后的平衡分布; f_1 是波动部分.

若以“ $\langle \rangle$ ”代表物理量对波动位相(或时间)的平均, 则有

$$\begin{aligned} \langle f_1 \rangle &= \langle E_1 \rangle = 0, \\ \langle f \rangle &= \langle f_0 + f_1 \rangle = f_0. \end{aligned} \quad (3)$$

对碰撞项作线性近似

$$c(f) = c(f_1) + c(f_0) = c(f_1) + c(f_0 - f_{00}) + c(f_{00}). \quad (4)$$

由(1)式可得 $E_1 = 0$ 时的平衡分布 f_{00} 满足

$$\mathbf{v} \cdot \nabla f_{00} + \left(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega} + \frac{e\mathbf{E}_0}{m} \right) \cdot \nabla_v f_{00} = c(f_{00}). \quad (5)$$

取无碰撞情形的解为其近似解:

$$\begin{aligned} f_{00} &= \left(1 + \frac{v_y}{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \right) n_0 \left(\frac{m}{2\pi T} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{mv_{\perp}^2}{2T} + \frac{m(v_x - u)^2}{2T} \right), \\ \frac{eE_{0x}}{m} &= v_x u. \end{aligned} \quad (6)$$

f_{00} 满足方程

$$\mathbf{v} \cdot \nabla f_{00} + (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}) \cdot \nabla_v f_{00} = 0. \quad (7)$$

(6)式的近似解相当于忽略经典扩散、热导以及分布函数对平移麦氏分布的小偏离, 这在本问题中是不重要的.

$E_1 \neq 0$ 时, 对(1)式作位相平均, 可得 f_0 的方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_0 + (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}) \cdot \nabla_v f_0 &= -\frac{e}{m} \langle \mathbf{E}_1 \cdot \nabla_v f_1 \rangle - v_x u \frac{\partial}{\partial v_x} (f_0 - f_{00}) \\ &+ c(f_0 - f_{00}). \end{aligned} \quad (8)$$

由(1)式和(8)式, 忽略非线性项, 可得 f_1 的方程

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_1 + (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}) \cdot \nabla_v f_1 = -\frac{e}{m} \mathbf{E}_1 \cdot \nabla_v f_0 - v_x u \frac{\partial}{\partial v_x} f_1 + c(f_1). \quad (9)$$

(8),(9)式是下面计算的出发点.

在具体计算前,先给出反常扩散流的表式. 在漂移波的作用下,粒子的电漂移和密度涨落可导致反常扩散.

$$\begin{aligned} \text{令 } \mathbf{E}_1 &= \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{E}_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t) = -i \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \varphi_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t), \\ f_1 &= \sum_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t) \end{aligned}$$

(为书写简单起见,下标中的 $\mathbf{k}$ 一律简写为 k). 设不同 $\mathbf{k}$ 的波是位相无关的,即非相干的,则反常扩散流的平均值为

$$\begin{aligned} \langle \Gamma_x \rangle &= \left\langle \frac{c}{B} E_{1y} n_1 \right\rangle = \sum_{\mathbf{k}} \frac{c}{2B} k_y \varphi_{\mathbf{k}}^* \text{Im} n_{\mathbf{k}} \\ &= - \sum_{\mathbf{k}} \frac{e^2 |\varphi_{\mathbf{k}}|^2}{2T_e^2} r_n^2 \gamma_{ek} \frac{dn_0}{dx}, \end{aligned} \quad (10)$$

即反常扩散系数为

$$D = \sum_{\mathbf{k}} \frac{e^2 |\varphi_{\mathbf{k}}|^2}{2T_e^2} r_n^2 \gamma_{ek}, \quad (11)$$

在(10)式计算中已用到下述关系:

1. 若 A, B 均正比于 $e^{-i\omega t}$, $\omega = \omega_0 + i\gamma$, $\left| \frac{\gamma}{\omega_0} \right| \ll 1$, 则^[4]

$$\langle AB \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(A^* B); \quad (12)$$

2. 由漂移波的线性理论,有

$$\frac{\gamma_{ek}}{\omega_{*e}} = - \frac{T_e}{|e| \varphi_{\mathbf{k}}} \text{Im} n_{\mathbf{k}}, \quad \omega_{*e} = \frac{c T_e}{|e| B} \frac{k_y}{r_n}; \quad (13)$$

3. $\langle E_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}'} \rangle = \langle E_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}} \rangle \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}$.

这里, γ_{ek} 既代表 $n_{\mathbf{k}}$ 与 $\varphi_{\mathbf{k}}$ 间的位相差,也代表增长率的电子贡献部分(一般不等于总增长率).

由于漂移波满足准中性条件,扩散流自动双极. 计算反常扩散的关键是计算 $\text{Im} n_{\mathbf{k}}$ 或 γ_{ek} .

三、碰撞项对漂移波的影响——线性理论

此问题一般解法是用轨道积分法求解(9)式. 但对于低频漂移波,满足条件

$$\omega \ll \Omega_e, \quad \Omega_e, k_{\perp} \rho_e \rightarrow 0, \quad (14)$$

其中 ρ_e 是电子拉摩半径. 对于电子分量,可用漂移近似的动力学方程代替(9)式,使计算大为简化,

$$\frac{\partial f_{\mathbf{k}}}{\partial t} + v_z \frac{\partial f_{\mathbf{k}}}{\partial z} = - \frac{e E_{0z}}{m_e} \frac{\partial f_{\mathbf{k}}}{\partial v_z} + i \frac{e}{m_e} \varphi_{\mathbf{k}} \delta f_0 + c(f_{\mathbf{k}}), \quad (15)$$

其中

$$\hat{S} = k_z \frac{\partial}{\partial v_z} + \frac{k_y}{\Omega_e} \frac{\partial}{\partial x}. \quad (16)$$

在线性理论中 $f_0 = f_{00}$ (若考虑准线性弛豫效应, 则 $f_0 \neq f_{00}$), 这里 f_{00} 是平移 u 的麦氏分布, 可由(6)式对 $v_\perp$ 的方位角平均而得.

进一步计算需对碰撞项作简化. 在线性理论中, $\text{Im} n_k$ 对碰撞项的细节不敏感, 我们采用了如下形式的模型碰撞项:

$$c(f_k) = -\nu_e \left(f_k - \frac{n_k}{n_0} f_{00} \right) + \frac{eE_{0x}}{m_e} \frac{\partial f_k}{\partial v_z}. \quad (17)$$

采用上述模型的基本考虑如下: 1) 对于求解色散关系, 粒子数守恒是重要的; 2) 分析表明, 在本问题中, ν_{ei} 是比 ν_{ee} 更重要的碰撞项, 对于 $e-i$ 碰撞, 有一维洛伦兹模型

$$c_{ei}(f_k) = \nu_{ei} \frac{\partial}{\partial v_z} \left(v_z + \frac{T_e}{m_e} \frac{\partial}{\partial v_z} \right) f_k,$$

即

$$c_{ei}(f_k) - \frac{eE_{0x}}{m_e} \frac{\partial}{\partial v_z} f_k = \nu_{ei} \frac{\partial}{\partial v_z} \left(v_z - u + \frac{T_e}{m_e} \frac{\partial}{\partial v_z} \right) f_k,$$

等式右端相当于使 f_k 趋于平移 u 的麦氏分布 (即 f_{00}) 的弛豫过程, 故进一步简化得 (17) 式.

由(15)至(17)式可解得

$$f_k = -\frac{e\varphi_k}{m_e} \frac{\hat{S}f_{00}}{\omega - k_z v_z + i\nu_e} + i\nu_e \frac{n_k f_{00}/n_0}{\omega - k_z v_z + i\nu_e}. \quad (18)$$

对(18)式求速度空间积分, 可反解出

$$\begin{aligned} \text{Re } n_k &= \frac{AC - BD}{A^2 + B^2}, \\ \text{Im } n_k &= \frac{AD + BC}{A^2 + B^2}. \end{aligned} \quad (19)$$

其中

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^2 + \bar{v}_e^2} e^{-(x-\alpha_1)^2} dx, \\ B &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\bar{v}_e}{x^2 + \bar{v}_e^2} e^{-(x-\alpha_1)^2} dx, \\ C &= \frac{e\varphi_k}{m_e |k_z| v_{Te}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \hat{S}f_{00}}{x^2 + \bar{v}_e^2} dx, \\ D &= \frac{e\varphi_k}{m_e |k_z| v_{Te}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{v}_e \hat{S}f_{00}}{x^2 + \bar{v}_e^2} dx. \end{aligned} \quad (20)$$

这里

$$\begin{aligned} x &= (k_z v_z - \omega) / |k_z| v_{Te}, \\ \alpha_1 &= (k_z u - \omega) / |k_z| v_{Te}, \\ \bar{v}_e &= v_{e0} / |k_z| v_{Te}. \end{aligned} \quad (21)$$

$\bar{v}_e$ 具有明确的物理意义, 它代表纵向波长 ($\sim 1/k_z$) 与电子平均自由程 (v_{Te}/v_e) 的比值.

显然, $\bar{v}_e \gg 1$ 代表流体极限, $\bar{v}_e \ll 1$ 代表无碰撞极限.

由(6),(16)式可得

$$\hat{S}_{f00} = -\frac{m_e}{T_e} |k_x| v_{Te} [x - \alpha_1 - \alpha_2 - \eta_e \alpha_2 (1 - \alpha_1)^2 / (1 - \eta_e/2)] f_{00}, \quad (22)$$

其中

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \omega_{*e} (1 - \eta_e/2) / |k_x| v_{Te}, \\ \omega_{*e} &= -\frac{k_y c T_e}{|e| B n_0} \frac{dn_0}{dx}, \\ \eta_e &= d \ln T_e / d \ln n_0. \end{aligned} \quad (23)$$

将(22),(23)式代入(20),(19)式,并注意到,对于低频漂移波, $\omega / |k_x| v_{Te} \ll 1$, 通常又有 $u/v_{Te} \ll 1$, 所以 $|\alpha_1|, |\alpha_2|$ 都是小量, 计算时可作渐近展开. 在 $\bar{v}_e^2 \alpha_1^2 \ll 1$ 时 (由于 $\alpha_1^2 \ll 1$, 此时 $\bar{v}_e^2$ 仍可大于 1) 可得如下表式:

$$\begin{aligned} \text{Re } n_k &= \frac{|e| n_0 \varphi_k}{T_e} \left\{ 1 - 2\alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2) \frac{\bar{v}_e^2 \phi(\bar{v}_e)}{1 - \bar{v}_e^2 \phi(\bar{v}_e)} - \frac{2\alpha_1 \alpha_2 \bar{v}_e^2 \eta_e}{1 - \eta_e/2} \right\}, \\ \text{Im } n_k &= -\frac{|e| n_0 \varphi_k}{T_e} \left\{ (\alpha_1 + \alpha_2) \bar{v}_e \left[\frac{\phi(\bar{v}_e)}{1 - \bar{v}_e^2 \phi(\bar{v}_e)} + \frac{\eta_e \alpha_2}{(1 - \eta_e/2)(\alpha_1 + \alpha_2)} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (24)$$

其中

$$\begin{aligned} \phi(\bar{v}_e) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{x^2 + \bar{v}_e^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\bar{v}_e} e^{\bar{v}_e^2} [1 - \Phi(\bar{v}_e)], \\ \Phi(\bar{v}_e) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\bar{v}_e} e^{-t^2} dt \text{ —— 误差函数.} \end{aligned} \quad (25)$$

对于两种极限情形的 $\bar{v}_e$, 可得 n_k 的简单渐近表示.

1. $\bar{v}_e \ll 1$ 时, 即低碰撞极限

$$\begin{aligned} \text{Re } n_k &\simeq \frac{|e| n_0 \varphi_k}{T_e}, \\ \frac{\gamma_{ek}}{\omega_{*e}} &= -\text{Im } n_k \times \frac{T_e}{|e| n_0 \varphi_k} \simeq \sqrt{\pi} \left(\frac{k_y u + \omega_{*e} - \omega}{|k_x| v_{Te}} \right) \\ &\quad \cdot \left[1 + \sqrt{\pi} \bar{v}_e \left(1 - \frac{2}{\pi} \right) \right] - \sqrt{\pi} \frac{\eta_e \omega_{*e}}{2 |k_x| v_{Te}} \left[1 - \sqrt{\pi} \left(\frac{4}{\pi} - 1 \right) \bar{v}_e \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

$\bar{v}_e = 0$ 时, (26)式即给出无碰撞漂移波的 γ_{ek}/ω_{*e} 表式. 由于此时 $\bar{v}_e \ll 1$, 可见碰撞项仅引起 γ_{ek} 的小修正. 对于电流项及拉摩半径效应等项 (即正比于 $(\omega_{*e} - \omega)$ 的项), 碰撞增强了不稳定; 而对电子温度梯度效应, 即 η_e 项, 碰撞则起相反的作用, 例如 $\eta_e > 0$ 原为稳定因素, 碰撞项则减弱此稳定效应.

2. 流体极限, 即 $\bar{v}_e^2 \gg 1$ [但仍有 $(k_x v_{Te}/\omega)^2 \gg \bar{v}_e^2$, 不满足此条件时, 即更高碰撞频率时, 碰撞还将改变漂移波的实频率]

$$\text{Re } n_k \simeq \frac{|e| n_0 \varphi_k}{T_e},$$

$$\gamma_{ek}/\omega_{*e} = -\text{Im} n_k \frac{T_e}{|e| n_0 \varphi_k} \simeq 2 \frac{\nu_e \omega_{*e}}{(k_z v_{Te})^2} \left[\frac{k_z u}{\omega_{*e}} + 1 - \frac{\omega}{\omega_{*e}} \right]. \quad (27)$$

(27)式即耗散漂移波的 γ_{ek}/ω_{*e} 表式,由流体方程也可得到此式. 其特点是 $\gamma_{ek} \propto \nu_e$, 共振粒子不重要, η_e 项对稳定性不再起作用.

对于一般 $\bar{\nu}_e$ 值时 $\gamma_{ek}(\bar{\nu}_e)$ 与 $\bar{\nu}_e$ 的关系,可由(24)式作数值计算. 图 1 给出 $\eta_e = 0$ 时, $\gamma_{ek}(\bar{\nu}_e)/\gamma_{ek}(0)$ 随 $\bar{\nu}_e$ 变化的曲线,它表明了由无碰撞漂移波向耗散漂移波过渡时 γ_{ek} 的变化过程.

四、耗散漂移波的反常扩散

由(27)和(11)式可求出耗散漂移波的反常扩散系数为

$$\begin{aligned} D &= \sum_k \frac{e^2 |\varphi_k|^2}{2T_e^2} \gamma_n^2 \frac{\omega_{*e}^2}{k_z^2 v_{Te}^2} \nu_e \\ &\quad \times \left[\frac{k_z u}{\omega_{*e}} + 1 - \frac{\omega}{\omega_{*e}} \right] \\ &= \sum_k \frac{e^2 |\varphi_k|^2}{2T_e^2} \frac{k_y^2}{k_z^2} \rho_e^2 \nu_e \left[\frac{k_z u}{\omega_{*e}} + 1 - \frac{\omega}{\omega_{*e}} \right]. \end{aligned} \quad (28)$$

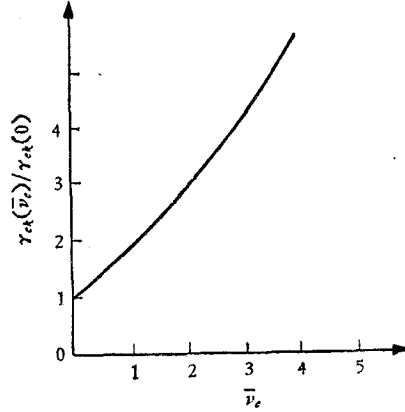


图 1

而文献[3]计算给出

$$D_r = \sum_k \frac{e^2 |\varphi_k|^2}{2T_e^2} \frac{k_y^2}{k_z^2} \rho_e^2 \nu_e.$$

该计算中未考虑纵向电流,即 $u = 0$, 所以与我们的计算结果(28)式相差 $(1 - \omega/\omega_{*e})$ 因子. 通常, 不稳定的漂移波 $\omega \lesssim \omega_{*e}$, 这是一个小量, 因此, 文献[3]的计算结果偏大. 其原因在于该文中不适当地假定了 $\Gamma_{iz} = 0$. 实际上, 由于准中性条件, 在漂移近似下可证 $\Gamma_{iz} = \Gamma_{ez}$, 仅是由离子迁移项(即离子拉摩半径效应)才导致 Γ_{iz} 与 Γ_{ez} 的小差别, 相应的 γ_{ek} 值也是较小的.

此外, 在符合赝经典规律的大多数托卡马克参数下, 有 $\nu_e/|k_z|v_{Te} \sim \omega_{*e}/|k_z|v_{Te} \ll 1$, 即不满足耗散漂移波条件, 激发的主要是无碰撞漂移波. 所以, 我们认为以耗散漂移波来解释赝经典扩散是不妥当的.

五、准线性弛豫对无碰撞漂移波的影响

(26)式说明,在线性理论中, $\bar{\nu}_e \ll 1$ 时,碰撞项对 γ_{ek} 只是小修正,主要是无碰撞漂移波. 然而,无碰撞漂移波对于平衡分布函数在共振区的斜率是敏感的,也即考虑准线性弛豫效应(即波对平衡分布函数的反作用)是重要的. 若完全无碰撞,准线性弛豫效应使共振区分布函数逐渐拉平,最终必有 $\gamma_{ek} = 0$, 即无反常扩散. 若 $\nu_e \neq 0$, 碰撞将阻止“平台”的形成, 在两个相反因素——碰撞和波的准线性弛豫——的作用下, 达到新的平衡分布 $f_0 \neq f_{00}$, 相应地就有新的 γ_{ek} 值和 D 值, 它们是正比于碰撞频率的. 这就是由无碰撞漂移

波得到赝经典扩散的基本图象.

f_0 满足的方程可由(8)式令 $\partial f_0 / \partial t = 0$ 得到. 假定在准线性弛豫过程中, 空间梯度维持不变,

$$\nabla(f_0 - f_{00}) = 0. \quad (29)$$

则由(8)和(7)式可得

$$\nabla_v \cdot \left\{ [\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega} + \nu_e \mathbf{u}](f_0 - f_{00}) + \mathbf{J}(f_0 - f_{00}) - i \frac{e}{m} \sum_k \mathbf{k} \langle \varphi_k f_k \rangle \right\} = 0. \quad (30)$$

采用线性化的朗道形式碰撞项, 有

$$\begin{aligned} c(f_0 - f_{00}) &= -\nabla_v \cdot \mathbf{J}(f_0 - f_{00}), \\ \mathbf{J}(f_0 - f_{00}) &= \sum_{\alpha=i,e} \frac{2\pi e^4 \Lambda}{m_e} \left\{ \left[\frac{f_0 - f_{00}}{m_\alpha} \nabla_v f'_{\alpha M} \right. \right. \\ &\quad + \frac{1}{m_\alpha} f_{\alpha M} \nabla_v (f'_0 - f'_{00}) - \frac{f'_0 - f'_{00}}{m_e} \nabla_v f_{\alpha M} \\ &\quad \left. \left. - \frac{f'_{\alpha M}}{m_e} \nabla_v (f_0 - f_{00}) \right] \cdot \mathbf{U} d\mathbf{v}' \right\} \\ &= \sum_{\alpha=i,e} \frac{2\pi e^4 \Lambda}{m_e^2} \left\{ \left[\frac{m_e \mathbf{v}}{2T_\alpha} (f_0 - f_{00}) + \nabla_v (f_0 - f_{00}) \right] \cdot \mathbf{A}_\alpha \right. \\ &\quad \left. + \frac{m_e}{m_\alpha} f_{\alpha M} \left[\frac{m_\alpha \mathbf{v}}{2T_e} \cdot \mathbf{U} - \frac{4(\mathbf{v} - \mathbf{v}')}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^3} \right] (f'_0 - f'_{00}) d\mathbf{v}' \right\}. \end{aligned} \quad (31)$$

其中

$$\mathbf{U} = \nabla_v \nabla_v |\mathbf{v} - \mathbf{v}'|, \quad (32)$$

$$\mathbf{A}_\alpha = -\nabla_v \nabla_v \int |\mathbf{v} - \mathbf{v}'| f'_{\alpha M} d\mathbf{v}' = -\nabla_v \nabla_v \phi_{\alpha M}(\nu), \quad (33)$$

$$\phi_{\alpha M}(\nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \nu_{T_\alpha} e^{-\nu^2/\nu_{T_\alpha}^2} + \frac{\nu_{T_\alpha}^2 + \nu^2}{\nu} \Phi\left(\frac{\nu}{\nu_{T_\alpha}}\right), \quad (34)$$

其中

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad \text{误差函数.}$$

这里, f 的下标 M 表示麦氏分布, $f' \equiv f(\mathbf{v}')$, $\alpha = e, i$.

考虑到边界条件 $f_0|_{v=\infty} = f_{00}|_{v=\infty} = 0$, 由(30)式可得

$$[\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega} + \nu_e \mathbf{u}](f_0 - f_{00}) + \mathbf{J}(f_0 - f_{00}) - i \frac{e}{m} \sum_k \mathbf{k} \langle \varphi_k f_k \rangle = 0, \quad (35)$$

取其 z 分量

$$\nu_e u(f_0 - f_{00}) + J_z(f_0 - f_{00}) - i \frac{e}{m} \sum_k k_z \langle \varphi_k f_k \rangle = 0. \quad (36)$$

进一步的计算还需对碰撞项作简化.

1. 漂移波满足 $\frac{\omega}{|k_z| \nu_{T_e}} \ll 1$, 即共振区宽度 $\Delta \nu_z \ll \nu_{T_e}$, 共振粒子是少数, 而且有

$$f_0 - f_{00} = \begin{cases} 0 & \nu_z \text{ 在共振区外,} \\ \text{小量} & \nu_z \text{ 在共振区内,} \end{cases}$$

$$\frac{\partial(f_0 - f_{00})}{\partial v_{\perp}} \sim \frac{f_0 - f_{00}}{v_{Te}} \ll \frac{\partial(f_0 - f_{00})}{\partial v_z} \sim \frac{(f_0 - f_{00})}{\Delta v_z}.$$

这里 $\frac{\partial(f_0 - f_{00})}{\partial v_z}$ 不是小量. 即碰撞项中的主要项是包含 $\frac{\partial(f_0 - f_{00})}{\partial v_z}$ 的项, 其余均为小量, 可略去. $v_e u(f_0 - f_{00})$ 项也是小量 (因 $u \Delta v_z / v_{Te}^2 \ll 1$), 也可略去.

2. 少数共振粒子不影响 ω 的实部, 将线性理论中的 f_{00} 改成 f_0 即可得

$$\text{Im } f_k = -\pi \frac{|e| \varphi_k}{m_e} \hat{S} f_0 \delta(\omega - k_z v_z), \quad (37)$$

$$\begin{aligned} -i \frac{e}{m} \sum_k k \langle \varphi_k f_k \rangle &= -\pi \sum_k \frac{e^2 |\varphi_k|^2}{2m_e^2} k_z \hat{S} f_0 \delta(\omega - k_z v_z) \\ &= -\pi \frac{e^2 |\varphi_k|^2}{2m_e^2 \omega} k_z \hat{S} f_0 |_{v_z = \omega/k_z}. \end{aligned} \quad (38)$$

3. 由于 $\frac{\partial}{\partial x} (f_0 - f_{00}) = 0$, 可有

$$\frac{\partial}{\partial v_z} (f_0 - f_{00}) = \frac{1}{k_z} \hat{S} (f_0 - f_{00}).$$

考虑到上述三点后, (36) 式可简化为

$$\pi \frac{e^2 |\varphi_k|^2}{2m_e^2 \omega} k_z \hat{S} f_0 = \sum_{a=i,e} \frac{2\pi e^4 \Lambda}{m_e^2} \hat{S} (f_0 - f_{00}) A_{a,zz}. \quad (39)$$

上式应取 $v_z = \omega/k_z$, 其中

$$A_{a,zz} = -\frac{\partial^2}{\partial^2 v_z} \phi_{aM}(v), \quad (40)$$

$\phi_{aM}(v)$ 由 (34) 式给出. 一般说来, $A_{a,zz}$ 是 v 与 $v_{\perp}$ 的函数, 现 $v_z = \omega/k_z$ 已取定, 则 $A_{a,zz}$ 仅是 $v_{\perp}$ 的函数.

对 $v_{\perp}$ 求积分, 并以 “ $\langle \rangle_{\perp}$ ” 表示之, 则由 (39) 式可得

$$\gamma_{ek} = \frac{-4e^2 \Lambda \sum_{a=i,e} \langle A_{a,zz} \rangle_{\perp}}{|\varphi_k|^2 k_z^2 / \omega - 4e^2 \Lambda \sum_{a=i,e} \langle A_{a,zz} \rangle_{\perp}} \gamma_{ek,0}. \quad (41)$$

计算中已用到如下关系:

$$\gamma_{ek} = \pi \frac{T_e}{\omega_{*e}} \frac{\langle \hat{S} f_0 \rangle_{\perp}}{m_e k_z} \Big|_{v_z = \frac{\omega}{k_z}}.$$

此式可从 (37) 式对速度积分, 以及 $\gamma_{ek}/\omega_{*e} = -\text{Im } n_k T_e / |e| n_0 \varphi$ 关系求得.

(41) 式中 $\gamma_{ek,0}$ 是线性理论值, γ_{ek} 是考虑准线性弛豫及碰撞效应后的值, 两者是不同的.

一般情形下, $\langle A_{a,zz} \rangle_{\perp}$ 需数值计算. 而在低频漂移波情形, 满足 $v_{Te} \gg v_z \left(= \frac{\omega}{k_z} \right) \gg v_{Ti}$, 由 (34) 和 (39) 式可解析地算出 $\langle A_{a,zz} \rangle_{\perp}$ 的渐近式

$$\begin{aligned} \langle A_{i,zz} \rangle_{\perp} + \langle A_{e,zz} \rangle_{\perp} &= \left(-\frac{\sqrt{4\pi} n_0}{v_{Te}} \right) + \left[\left(4 - \frac{3}{2} \pi \right) \frac{n_0}{\sqrt{\pi} v_{Te}} \right] \\ &= -\left(\frac{7}{2} - \frac{4}{\pi} \right) \frac{\sqrt{\pi} n_0}{v_{Te}}. \end{aligned} \quad (42)$$

将(42)式代入(41)式,并注意到电子碰撞频率

$$\nu_e = \frac{8\pi n_0 e^4 \Lambda}{3\sqrt{3} m_e T_e^{3/2}}, \quad (43)$$

可得

$$\gamma_{ek} = \frac{\delta \omega \nu_e / k_z^2 v_{Te}^2}{\delta \omega \nu_e / k_z^2 v_{Te}^2 + e^2 |\varphi_k|^2 / 2 T_e^2} \gamma_{ek,0}, \quad (44)$$

其中 δ 是量级为 1 的数值系数

$$\delta = \frac{3\sqrt{3}(7\pi - 8)}{4\pi\sqrt{2\pi}} \approx 2.30. \quad (45)$$

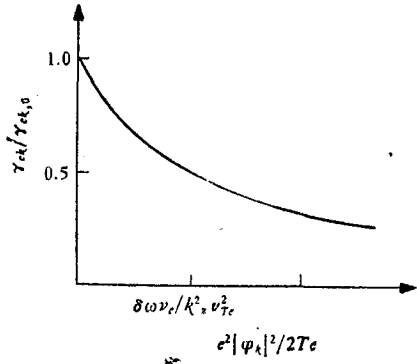


图 2

图 2 给出 $\gamma_{ek}/\gamma_{ek,0}$ 随波幅的变化关系。线性不稳定的漂移波,在波幅增长过程中, γ_{ek} 逐渐下降。由于 γ_{ek} 是主要的不稳定因素,如果 γ_{ek} 明显下降,使之与阻尼因素(离子阻尼,剪切引起的对流阻尼等)相平衡,则就达到准线性饱和状态,波幅维持不变。显然, $\delta \omega \nu_e / k_z^2 v_{Te}^2$ 可作为判别准线性饱和是否起作用的特征量:若 $e^2 |\varphi_k|^2 / 2 T_e^2 \ll \delta \omega \nu_e / k_z^2 v_{Te}^2$, 则 $\gamma_{ek} \approx \gamma_{ek,0}$, 准线性效应不起作用;若 $e^2 |\varphi_k|^2 / 2 T_e^2 > \delta \omega \nu_e / k_z^2 v_{Te}^2$, 则 $\gamma_{ek}/\gamma_{ek,0} < 1/2$, 可达准线性饱和状态。

六、相应的反常扩散

由(11)式及(44)式可得相应的反常扩散系数

$$\begin{aligned} D &= \sum_k \frac{e^2 |\varphi_k|^2}{2 T_e^2} \frac{\delta \omega \nu_e / k_z^2 v_{Te}^2}{\delta \omega \nu_e / k_z^2 v_{Te}^2 + e^2 |\varphi_k|^2 / 2 T_e^2} r_n^2 \gamma_{ek,0} \\ &= \sum_k K \delta \frac{\omega \nu_e}{k_z^2 v_{Te}^2} r_n^2 \gamma_{ek,0}, \end{aligned} \quad (46)$$

其中

$$K = \frac{e^2 |\varphi_k|^2}{2 T_e^2} \times \left[\delta \frac{\omega \nu_e}{k_z^2 v_{Te}^2} + \frac{e^2 |\varphi_k|^2}{2 T_e^2} \right]^{-1}. \quad (47)$$

在准线性弛豫是主要饱和机制的情形下,就有 $K \lesssim 1$, 它与波幅的关系不灵敏,可视为量级为 1 的数值系数。

考虑到 $\omega \simeq \omega_{*e} = k_y v_{Te} \rho_e / 2 r_n$, (46)式可表示为

$$D = \sum_k \frac{K \delta}{2} \frac{\gamma_{ek,0}}{\omega_{*e}} \frac{k_y^2}{k_z^2} \rho_e^2 v_{Te}. \quad (48)$$

此反常扩散系数既正比于 $\gamma_{ek,0}$, 也正比于 v_{Te} , 而与波幅的关系不大,无需对波幅的大小引入假定。

用通常中、小型托卡马克装置的参数估计(48)式给出的反常扩散的量级: $K \delta / 2 \sim 1$;

$\gamma_{ek,0}/\omega_{*e} \sim 0.1$ (例如, 电流驱动漂移波, $\gamma_{ek,0}/\omega_{*e} = \sqrt{\pi} \frac{u}{v_{Te}} \approx 0.1$); 由漂移波成立的条件 $v_{Te} > \frac{\omega}{k_x} > v_{Ti}$, 可得

$$\left(\frac{2r_n}{\rho_e}\right)^2 > \frac{k_y^2}{k_x^2} > \left(\frac{2r_n}{\rho_i}\right)^2,$$

而通常参数下, $\left(\frac{2r_n}{\rho_i}\right)^2 \sim 10^4$, 所以有

$$D \lesssim 10^3 \rho_e^2 \nu_e \simeq (10^1 - 10^2) D_{NC},$$

其中 D_{NC} 是新经典扩散系数值. 此量级估计值与实验是一致的.

(48) 式给出的赝经典扩散是有一定适用条件的. 图 3 给出扩散系数随碰撞频率的变化关系 [示意图]. 实线是 (48) 式适用的区域; 即其适用范围是 $\nu_{e1} < \nu_e < \nu_{e2}$. 当

$$\nu_e < \nu_{e1} \left(\equiv \varepsilon^{3/2} \frac{v_{Te}}{qk} \right)$$

时, 尚需考虑约束粒子不稳定性; $\nu_e > \nu_{e2}$ 时, 波幅较大, 非线性饱和机制也可能起作用, 实际的反常扩散值将小于 (48) 式所给出的值. 由于非线性饱和机制尚不甚清楚, ν_{e2} 的确切值难以给出. 若按通常观点认为 $e^2 |\varphi_k|^2 / 2T_e^2 \sim 1/k_{\perp}^2 r_n^2$ 时非线性饱和将起作用^[2], 则有

$$\nu_{e2} \sim \frac{k_{\perp}^2 v_{Te}^2}{\delta \omega k_{\perp}^2 r_n^2}.$$

此时有 $D \sim \sum_k \frac{\gamma_{ek,0}}{k_{\perp}^2}$, 它与 ν_e 无关.

ATC 和 Pulsator 高密度实验^[5]表明, 密度提高后, 反常输运低于赝经典值, 而且不再正比于碰撞频率. 这与上述分析是不矛盾的, 至少在趋势上是一致的.

以上分析对于反常热导也适用.

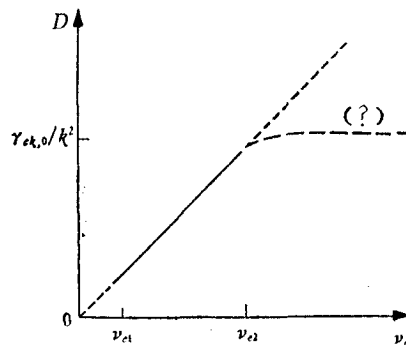


图 3

参 考 文 献

- [1] B. B. Kadomtsev et al., *Nucl. Fusion*, 11(1) (1971), 67.
- [2] W. M. Tang, *Nucl. Fusion*, 18(8) (1978), 1089.
- [3] S. Yoshikawa, *Phys. Rev. Lett.*, 25(6) (1970), 353.
- [4] В. Д. Шафранов, "Вопросы теории плазмы", том 3.
- [5] O. Klüber et al., *Nucl. Fusion*, 15(6) (1975), 1194.

ON THE LOW FREQUENCY DRIFT WAVE AND THE PSEUDOCCLASSICAL DIFFUSION

ZHANG CHENG-FU

(Department of Physics, Peking University)

ABSTRACT

In this paper, the relationship between the low frequency drift wave and the empirical law of anomalous transport in Tokamak the pseudo-classical diffusion is discussed. We show that, it is the collisionless drift wave, rather than the dissipative one, which corresponds to the pseudoclassical diffusion. If the linear unstable collisionless drift wave is saturated mainly by the quasi-linear relaxation process, it can lead to a diffusion of the pseudo-classical type. The estimated diffusion coefficient agrees with experiment within an order of magnitude. The range of the parameters in which the above mentioned mechanism may be effective is discussed.