

Planck 长度和统一引力-电磁的 五维 U_1 主丛理论*

吴 詠 时

(中国科学院理论物理研究所)

提 要

在统一引力和电磁的五维 U_1 主丛理论(它可视为 Kaluza-Klein 理论的一种新表述)中, 闭合的且类空的第五维的半径被定出为 Planck 长度的 $2\alpha^{-1/2}$ 倍 (α 为精细结构常数). 这解释了第五维为什么难以直接观测到.

所谓 Planck 长度 l_0 , 是由 Planck 常数 $\hbar$ 、光速 c 和 Newton 万有引力常数 G 造出的量纲为长度的常数. 由量纲分析, 可唯一地定出

$$l_0 = (\hbar G/c^3)^{1/2} \approx 1.6 \times 10^{-33} \text{cm}. \quad (1)$$

由于它是由基本物理常数造出来的, 经常有人猜测它可能在物理学中有重要作用. 一般认为这一长度在量子引力理论中有基本的意义, 即在 Planck 长度的尺度上引力的量子涨落效应将变得极其重要^[1]; Wheeler 甚至猜测在这样小的尺度上时空几何和拓扑也发生涨落^[2]. Landau 曾猜测量子电动力学中的发散积分可能由于引力的效应而截断, 截断的动量相应于 Planck 长度^[3]. 这些猜测都是把 l_0 与四维时空的小尺度性质相联系. 在这篇短文中, 我们想指出 Planck 长度有另一种物理意义. 具体地说, 我们将指出, Planck 长度以一种极其自然的方式出现于统一引力-电磁作用的五维 U_1 主纤维丛理论之中: 它与这理论中闭合的第五维的半径有密切联系.

早年, 关于引力-电磁作用的统一场论的各种方案中, Kaluza 的五维理论^[4]曾经是重要的方向之一. 根据近年来的研究^[5,6], 这一理论中的五维空间实际上就是以时空 M^4 为底、以电荷的位相规范群 U_1 为纤维的主丛空间 $P(M^4, U_1)$. 换言之, Kaluza 理论等价于主丛空间 $P(M^4, U_1)$ 上的一种 Riemann 几何. 近代的主丛表述和早年的 Kaluza 理论相比, 在物理观念上有两点进展:

1) 在 Kaluza 理论中第五维的物理意义不太清楚. 他当初引进第五维的目的, 主要是为了增加度规张量的分量的个数. 在主丛表述中, 按照近代关于电磁场是与位相规范群相联系的规范场观点, 第五维是与带电粒子的位相相联系的.

2) 在 Kaluza 理论中, 第五维究竟是开放的还是闭合的也不明确. 按照 Veblen^[7] 或者 Pauli^[8] 的射影表述, 第五维是开放的; 而后来 Einstein 和 Bergmann^[9] 又建议第五维是

* 1979年3月3日收到.

闭合的。可是在主丛表述中,肯定第五维是闭合的;这是因为,正如杨振宁所指出的^[10],根据电荷是量子化的事实,可以断定电荷的规范变换群是紧致的,因而是 U_1 群(其流形是个闭合的圆),而不是一维平移群(其流形是开放的直线)。

我们下面的讨论正是以这两点新的认识为基础的。无论在 Kaluza 理论中,或者在文献[5,6]的 U_1 主丛表述中,都假设五维空间具有如下度规:

$$dS^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + (d\theta + A_\mu dx^\mu)^2, \quad (2)$$

其中 $x^\mu (\mu = 0, 1, 2, 3)$ 代表四维时空坐标, θ 是第五维的坐标; $g_{\mu\nu}$ 是时空度规, 其号差为 -2 , 而 A_μ 是电磁势。在上式中已取第五维的度规为 1。我们注意到, 如上所述, 在主丛表述中 θ 应是电荷规范 U_1 群的参数, 它代表位相(或者闭合的第五维的角度变数), 因而 θ 是无量纲的。据此, 在(2)式中第五维的度规不能是无量纲的数, 而应该有一个长度量纲常数出现。于是我们把(2)式修改为

$$dS^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \pm r_0^2 \left(d\theta + \frac{e}{\hbar c} A_\mu dx^\mu \right)^2, \quad (3)$$

其中 r_0 就是所需要的长度量纲常数。为了使所有的基本物理常数明显地出现, 已取普通的厘米·克·秒单位制; 这时根据规范场的不可积位相因子表述^[11], 在 A_μ 之前应出现常数因子 $e/\hbar c$, 以保证 $(e/\hbar c) A_\mu dx^\mu$ 是无量纲的位相。在(3)式中有意暂时不选定第二项的符号, 以便考察第五维究竟是类时的还是类空的。

将(3)式简记为

$$dS^2 = G_{AB} dY^A dY^B, \quad (4)$$

其中 $Y^A = (x^\mu, \theta) [A = 0-3; 5]$ 是主丛 $P(M^4, U_1)$ 上的五维坐标。按照 Kaluza 的五维理论或者其近代的 U_1 主丛表述, 引力-电磁场方程应由变分原理

$$\delta \int d^5 Y \sqrt{|\det(G_{AB})|} \bar{R} = 0 \quad (5)$$

给出, 其中 $\bar{R}$ 是由五维度规(4)式所决定的五维标量曲率。由变分原理(5)式应该导出通常的 Einstein-Maxwell 方程作为引力-电磁场方程。下面我们就根据这个要求, 定出第五维的半径 r_0 以及第五维度规的符号。

计算五维标量曲率 $\bar{R}$ 的最方便的办法, 是在正交的活动标架中进行计算。用纤维丛理论的语言^[12], 取五维丛空间 $P(M^4, U_1)$ 在点 (x^μ, θ) 处的切空间的基(即活动标架)为

$$Z_A = (Z_\mu, Z_5), \quad (6)$$

其中

$$\begin{aligned} Z_\mu &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{e}{\hbar c} A_\mu \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ Z_5 &= \frac{\partial}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (7)$$

不难算出这组基的对易子为

$$\begin{aligned} [Z_\mu, Z_\nu] &= -\frac{e}{\hbar c} F_{\mu\nu}, \\ [Z_\mu, Z_5] &= 0, [Z_5, Z_5] = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

其中 $F_{\mu\nu}$ 是电磁场强张量: $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ 。(8)式又可写成

$$[Z_A, Z_B] = C_{AB}^C Z_C, \quad (9)$$

式中 C_{AB}^C 的表达式可由(8)式立即读出. 与基(6)或(7)式对偶的一次微分形式为

$$\omega^A = (\omega^\mu, \omega^5), \quad (10)$$

其中

$$\omega^\mu = dx^\mu, \omega^5 = d\theta + \frac{e}{\hbar c} A_\mu dx^\mu. \quad (11)$$

这组对偶基的优点是,它在规范变换下

$$\begin{aligned} \theta &\rightarrow \theta' = \theta + \alpha(x), \\ A_\mu &\rightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{\hbar c}{e} \partial_\mu \alpha \end{aligned} \quad (12)$$

保持不变,即

$$\omega^A \rightarrow \omega'^A = \omega^A. \quad (13)$$

此外,在这组基下五维度规(3)式是准对角的:

$$dS^2 = \gamma_{AB} \omega^A \omega^B = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \pm \gamma_0^2 \omega^5 \omega^5, \quad (14)$$

即 $\gamma_{\mu 5} = 0$ [因而这组基是准正交的活动标架].

按照微分几何^[3]活动标架下 Christoffel 联络 $\bar{\Gamma}_{BC}^A$ 和 Riemann 曲率张量 $\bar{R}_{BCD}^A$ 与标架度规 γ_{AB} 的关系为

$$\bar{\Gamma}_{BC}^A = \frac{1}{2} \gamma^{AD} (Z_B \gamma_{CD} + Z_C \gamma_{BD} - Z_D \gamma_{BC} - C_{BCD} - C_{CBD} - C_{DBC}), \quad (15)$$

$$\bar{R}_{BCD}^A = Z_C \bar{\Gamma}_{BD}^A - Z_D \bar{\Gamma}_{BC}^A + \bar{\Gamma}_{EC}^A \bar{\Gamma}_{BD}^E - \bar{\Gamma}_{ED}^A \bar{\Gamma}_{BC}^E - C_{CD}^E \bar{\Gamma}_{BE}^A, \quad (16)$$

其中

$$\gamma^{AD} \gamma_{DB} = \delta_B^A, C_{ABC} = \gamma_{AD} C_{BC}^D. \quad (17)$$

不难算出五维丛空间上的 Christoffel 联络为

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda &= \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}, \quad \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^5 = \frac{1}{2} \frac{e}{\hbar c} F_{\mu\nu}, \\ \bar{\Gamma}_{5\mu}^\lambda &= \bar{\Gamma}_{\mu 5}^\lambda = \pm \frac{1}{2} \gamma_0^2 \frac{e}{\hbar c} g^{\lambda\rho} F_{\mu\rho}, \\ \bar{\Gamma}_{5\mu}^5 &= \bar{\Gamma}_{55}^\lambda = \bar{\Gamma}_{55}^5 = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

[这里 $\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}$ 是时空的 Christoffel 联络], 而五维丛空间上的标量曲率为

$$\begin{aligned} \bar{R} &= \gamma^{AB} \bar{R}_{ACB}^C = \gamma^{\mu\nu} \bar{R}_{\mu C \nu}^C + \gamma^{55} \bar{R}_{5C5}^C \\ &= R \mp \frac{1}{4} \gamma_0^2 \left(\frac{e}{\hbar c} \right)^2 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (19)$$

其中 R 是时空的标量曲率. 注意 $\bar{R}$ 与第五维坐标 θ 无关, $\det(G_{AB}) = \pm \gamma_0^2 \det(g_{\mu\nu})$, 故(5)式化为

$$\delta \int d^4x \sqrt{-\det(g_{\mu\nu})} \bar{R} = 0. \quad (20)$$

广义相对论中,导致通常的 Einstein-Maxwell 方程的变分原理为^[4]

$$\delta \int d^4x \sqrt{-\det(g_{\mu\nu})} \left\{ \frac{-c^3}{16\pi G} R - \frac{1}{16\pi c} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right\} = 0. \quad (21)$$

将(19),(20)两式与(21)式比较,可知:在从上的五维度规(3)式中,第二项应取负号,即第五维度规的符号与空间维的符号一致,而且

$$\gamma_0^2 = \frac{4\hbar^2 G}{c^2 c^2} = 4l_0^2 \cdot \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^{-1}, \quad \gamma_0 = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} l_0. \quad (22)$$

这里 $\alpha = e^2/\hbar c$ 是精细结构常数。因此,闭合的第五维是类空的,且其半径为 Planck 长度 l_0 的 $2/\sqrt{\alpha} \approx 2\sqrt{137}$ 倍。[注意,若第五维是类时的,则电磁场的重力效应就将是排斥的,而非吸引的。]

这个结论,不仅对于电磁场和 Einstein 引力场(广义相对论)的五维主从统一理论成立,对于其它的引力规范理论(例如 Einstein-Cartan 理论)与电磁场的主从统一理论也成立。在 EC 理论的情形下,可以取从空间 $P(M^4, U_1)$ 上如下的线性联络^[5]:

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{BC}^A &= \bar{\Gamma}_{BC}^A \text{ (当 } A, B, C \text{ 之一取 } 5 \text{ 时)}, \\ \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda &= \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \text{时空的线性联络}. \end{aligned} \quad (23)$$

这时从上的五维 Riemann-Cartan 标量曲率 $\bar{R}$ 仍由(19)式给出,不过其中的 R 现在代表时空的四维 Riemann-Cartan 标量曲率。因此,当且仅当(22)式成立时,才能由变分原理(5)式导出通常 EC 引力理论中的引力-电磁场方程。

此外,当电磁场推广为紧致群的非 Abel 规范场时,可以预期类似的结论也保持成立[(22)式中的电荷 e 换为相应的规范场的耦合常数 g]。这时与规范群相应的附加维也是类空且闭合的。

Einstein 在评述高维统一场论时,曾经指出:“在这种情形下必须解释连续统何以外观上限于四维”^[6]。长期以来,这是人们看不上高维统一场论的一个重要原因;从而人们往往也把规范场的主纤维丛表述看做仅仅是一种数学结构。现在我们可以根据上面的分析,对这个问题回答如下:在统一引力-电磁的五维 U_1 主丛理论中,代表内部空间的第五维是类空而且闭合的,其半径非常之小,约为 Planck 长度的量级,所以目前还不能直接发现它。[但是根据电荷的存在以及电磁场的位相规范不变性,我们可间接地判断第五维的存在。]在扫除了这个障碍之后,高维的统一场论应该重新受到注意;特别是,用主纤维丛空间作为时空与内部空间相统一的物理空间^[7],用从空间上的度规或联络来统一引力和各种规范场相互作用,这样的途径值得进一步研究。

作者感谢彭桓武先生热情的、有教益的讨论。

参 考 文 献

- [1] 例如,见 C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, “Gravitation”, Freeman, San Francisco (1973).
- [2] J. A. Wheeler, “Geometrodynamics”, Academic Press, New York (1962).
- [3] L. D. Landau, in “Niels Bohr and the Development of Physics”, Ed. W. Pauli, L. Rosenfeld & V. Weisskopf, Pergamon Press Ltd., London (1955).
- [4] Th. Kaluza, Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wiss. (1921), 966.
- [5] Y. M. Cho, *J. Math. Phys.*, **16**(1975), 2029.
- [6] L. N. Chang, K. Macrae & F. Mansuri, *Phys. Rev.*, **D13**(1976), 235.
- [7] O. Veblen, “Projective Relativity”, Springer, Berlin (1933).
- [8] W. Pauli, *Ann. d. Physik*, **18**(1933), 305; 337.
- [9] A. Einstein and P. G. Bergmann, *Ann. of Math.*, **39**(1938), 683.

- [10] C. N. Yang, *Phys. Rev.*, **D1**(1970), 2360.
- [11] T. T. Wu and C. N. Yang, *Phys. Rev.*, **D12**(1975), 3845.
- [12] 陆启铿, 规范场与纤维丛(讲义, 1973); 物理学报, **23**(1974), 249.
- [13] 陆启铿, 旋量分析与引力辐射(讲义, 1972).
- [14] V. Fock, "The Theory of Space Time and Gravitation", Pergamon Press, London (1959).
- [15] 郭汉英, 科学通报, 1978 年第 7 期, 407 页.
- [16] A. Einstein, "The Meaning of Relativity", Fifth Edition, Princeton Univ. Press., (1955), Appendix II.
- [17] 陆启铿、吴咏时(待发表).

PLANCK LENGTH AND THE FIVE-DIMENSIONAL PRINCIPAL U_1 -BUNDLE THEORY UNIFYING GRAVITATION AND ELECTROMAGNETISM

WU YONG-SHI

(Institute of Theoretical Physics, Academia, Sinica)

ABSTRACT

In the 5-dimensional principal U_1 -bundle theory unifying gravitation and electromagnetism, which is a new version of the old Kaluza theory, the radius of the closed, space-like fifth dimension is determined to be Planck length times $2\alpha^{-1/2}$ (α -the fine-structure constant). This explains why the fifth dimension has not been apparently observed yet.