

A 型超导体的近似临界温度公式 (I)*

$\mu^* = 0$ 情 形

吴杭生 周子舫 王钟炎 张锡祥

提 要

本文用数值解方法从 Eliashberg 方程计算出超导临界温度 T_c , 并考察 T_c 对有效声子谱的依赖关系. 在这个研究中, $\alpha^2 F(\omega)$ 被取为双 δ 函数谱, 并允许其中的谱参数可以在很宽范围内改变. 作者发现在 $\lambda < \Lambda$ 区域 (即在 T_c 级数解的收敛圆外), T_c 除了依赖 λ 和矩比外, 还依赖 T_c 级数解的收敛半径倒数 Λ ; 它们之间的关系是有规律的. 在这些结果的启示下, 本文在 $\mu^* = 0$ 情形, 用弥合数值解的方法得到一个适用于 $\lambda < \Lambda$ 区域的 T_c 近似公式.

接着, 本文作者对吉光达和吴杭生的一篇文章^[1]进行了研究, 指出: 该文提出的超导体分类建议及其工作的主要结论是对的. 但其中对决定 A 型超导体临界温度主要参量问题进行的分析, 只适用于这样一些 A 型超导体, 它们的收敛半径倒数 Λ 或者比 λ_0 小, 或者虽比 λ_0 大, 但 λ 小于 λ_0 , 其中 λ_0 是个依赖谱形状的参量, 它的定义在正文中给出. 对另一些 A 型超导体 ($\lambda_0 < \lambda < \Lambda$), 决定 T_c 的主要参量不再是 λ , 而是 $\delta = \frac{1}{\Lambda^{0.5}} \left(\frac{\bar{\omega}_{1/2}}{\omega_{\log}} \right)^{2.5} \lambda^{1.55}$.

一、引 言

在前几篇文章^[1,2]中, 吴杭生和其合作者由 Eliashberg 方程严格地导出了如下 T_c 公式:

$$(2\pi T_c)^{-2} = c_0 \frac{1}{\lambda \langle \omega^2 \rangle} \left\{ 1 + \frac{c_1}{\lambda} \frac{\langle \omega^4 \rangle}{\langle \omega^2 \rangle^2} + \frac{1}{\lambda^2} \left(c_{21} \frac{\langle \omega^6 \rangle}{\langle \omega^2 \rangle^3} + c_{22} \frac{\langle \omega^4 \rangle^2}{\langle \omega^2 \rangle^4} \right) + \dots \right\}, \quad (1a)$$

即

$$T_c = \alpha_0 \sqrt{\lambda \langle \omega^2 \rangle} \left\{ 1 + \frac{\alpha_1}{\lambda} \frac{\langle \omega^4 \rangle}{\langle \omega^2 \rangle^2} + \frac{1}{\lambda^2} \left(\alpha_{21} \frac{\langle \omega^6 \rangle}{\langle \omega^2 \rangle^3} + \alpha_{22} \frac{\langle \omega^4 \rangle^2}{\langle \omega^2 \rangle^4} \right) + \dots \right\}, \quad (1b)$$

式中各系数在文献 [3] 中给出. 这是个级数解. 它适用于 $\lambda > \Lambda$ 区域, 其中 $1/\Lambda$ 是级数 (1a) 式的收敛半径. Λ 是个依赖于有效声子谱 $\alpha^2 F(\omega)$ 形状的参量. 在文献 [3] 中, 给出了估算它的方法. 以双 δ 函数谱

$$\alpha^2 F(\omega) = \frac{\lambda \omega}{2} g(\omega), \quad (2a)$$

$$g(\omega) = c \delta(\omega - r \omega_0) + (1 - c) \delta(\omega - \omega_0). \quad (2b)$$

* 1979年3月10日收到.

为例, 当 $\mu^* = 0$ 时, Λ 由下列公式给出:

$$\Lambda = \begin{cases} 0.65 & \text{当 } \Lambda_1 < 1 \text{ 时;} \\ 0.65\Lambda_1 & \text{当 } \Lambda_1 > 1 \text{ 时;} \end{cases} \quad (3a)$$

$$(3b)$$

而

$$\Lambda_1 = \frac{1 - r^2}{1 - c + cr^2} \quad (4)$$

在 (2b) 式中, ω_0 是个特征频率; r 和 c 是介于零和 1 之间的正数.

在级数解收敛圆外, 即 $\lambda < \Lambda$ 区域, 临界温度表示式仍是一个没有完全解决的问题. 吴杭生和吉光达在前一个工作^[4]中, 提出如下猜测: 在此区域中, T_c 表示式和著名的 McMillan T_c 公式^[5,6]

$$T_c^M = \frac{1}{1.20} \omega_{\log} \exp\left(-1.04 \frac{1 + \lambda}{\lambda - \mu^* - 0.62\lambda\mu^*}\right) \quad (5)$$

具有相同的函数形式, 但其中系数一般可依赖谱形.

在级数解和上述猜测的基础上, 吴杭生和吉光达分析了有效声子谱对 T_c 的影响. 他们建议: 把超导体分为 A 型和 B 型两类. 前者, $\lambda < \Lambda$; 后者, $\lambda > \Lambda$. 他们分析表明了, 有效声子谱对这两类超导体 T_c 的影响是不同的, 因而决定它们临界温度的主要参量以及提高它们 T_c 的方法也是不一样的. 决定 A 型超导体 T_c 的主要参量是 λ ; 决定 B 型的是 $\lambda\langle\omega^2\rangle$.

但是, 上述猜测是否正确呢? 即使这个猜测是对的, 适用于级数解收敛圆外的 T_c 公式和常系数 McMillan T_c 公式还是有区别的. 这个差别是否会影响文献 [4] 对 A 型超导体进行的分析和结论呢? 这些是仍待澄清、也是本文企图研究的问题.

显然, 直接回答这些问题的途径是把 $\lambda < \Lambda$ 区域的 T_c 公式推导出来. 为此, 我们用弥合 Eliashberg 方程数值解方法, 得到一个适用于 $\lambda < \Lambda$ 区域的 T_c 表示式. 应指出, 本文采用的方法是 McMillan 以及其他一些作者多次采用过的. 不同之处仅在以下两点: 一是, 我们没有把 $\alpha^2F(\omega)$ 选为某一种材料或少数几种材料的有效声子谱, 而是选取假想的双 δ 函数谱, 但允许其中参数 r 和 c 在很宽的范围内改变. 另一是, 本文只限于弥合 $\lambda < \Lambda$ 区域的 Eliashberg 方程数值解. 在此区域中, 数值解呈现出简单的规律, 因而允许我们得到一个较为满意的 T_c 近似公式. 正如吴杭生和吉光达猜测的那样, 此 T_c 公式在函数形式上和 McMillan T_c 公式相同, 因而也就肯定了他们提出的超导体分类建议是正确的.

接着, 我们分析了决定 A 型超导体 T_c 的主要参量. 得到的结论是: 只有对这样一些 A 型超导体, λ 才是决定 T_c 的主要参量. 它们的收敛半径倒数 Λ 或者比 λ_0 小, 或者虽比 λ_0 大, 但 λ 小于 λ_0 , 其中 λ_0 是个依赖谱形状的参量, 它的定义在正文中给出. 对另一些 A 型超导体 ($\lambda_0 < \lambda < \Lambda$), 决定 T_c 的主要参量不再是 λ , 而是 $\delta = \frac{1}{\Lambda^{0.5}} \left(\frac{\bar{\omega}_{1/2}}{\omega_{\log}} \right)^{5.5} \lambda^{1.55}$.

本文限于讨论 $\mu^* = 0$ 情形. 显然, 这个限制对本文企图澄清和研究的问题不会带来影响. 在下一篇文章中, 我们将把本文得到的 T_c 公式推广到 $\mu^* \neq 0$ 情形, 并把它和实验数据以及前人得到的 T_c 公式进行比较.

二、数值计算方法

在 Matsubara 表象中, Eliashberg 方程经线性化后可以写成以下形式^[6,9]:

$$\sum_{n=0}^N K_{mn} \bar{\Delta}_n = \rho \bar{\Delta}_n, \quad n \geq 0. \quad (6)$$

临界温度 T_c 就是使此方程的最大本征值 $\rho_{\max}$ 等于零的温度, 即

$$\rho_{\max}(T_c) = 0. \quad (7)$$

在 (6) 式中,

$$K_{mn} = \lambda(m-n) + \lambda(m+n-1) - \delta_{mn} \left(2m+1 + \lambda(0) - 2 \sum_{l=1}^m \lambda(l) \right), \quad (7a)$$

$$\lambda(n) = \lambda \int_0^{\infty} d\omega g(\omega) \frac{\omega^2}{\omega^2 + (2\pi n T)^2}, \quad (7b)$$

$\bar{\Delta}_n$ 是在 Matsubara 表象中适当定义的能隙函数. N 是整数. 在下面计算中, 取 $N = 64$.

$g(\omega)$ 是规一的有效声子谱. 在我们的计算中, 把它取为双 δ 函数谱 [(2b) 式]. 注意到, 在 T_c 公式中出现的不是有效声子谱; 而是由它决定的参量 λ 和各级矩 $\langle \omega^n \rangle$. 所以, 尽管双 δ 函数谱和实际谱有距离, 但不会因为采用了这种谱而使计算结果失去普遍性. 为了更广泛地研究 T_c 和 λ 以及各级矩 $\langle \omega^n \rangle$ 的依赖关系, 让 $g(\omega)$ 的参数 r 和 c 在很大的范围内改变. 在我们计算中, c 的取值介于 0.1 至 0.95 之间; r 介于 0.05 至 0.9 之间; ω_0 取为 100K; λ 从 0.3 变至 10. 个别情况, λ 小至 0.21, 大至 15.

在 $g(\omega)$ 和 λ 给定后, 相应的 T_c 是用下述方法计算得到的^[7]: 先用 Householder 方法把矩阵 $|K_{mn}|$ 三对角化. 再根据 Ström 序列的性质求出在不同温度下, 三对角化矩阵的最大本征值 $\rho_{\max}(T)$. 最后, 用两分法求出使 $\rho_{\max}$ 等于零的温度 T_c .

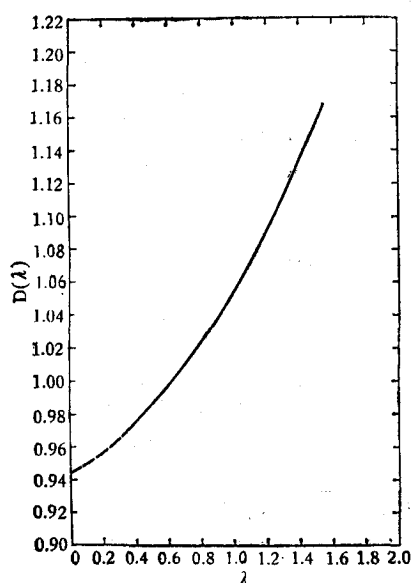
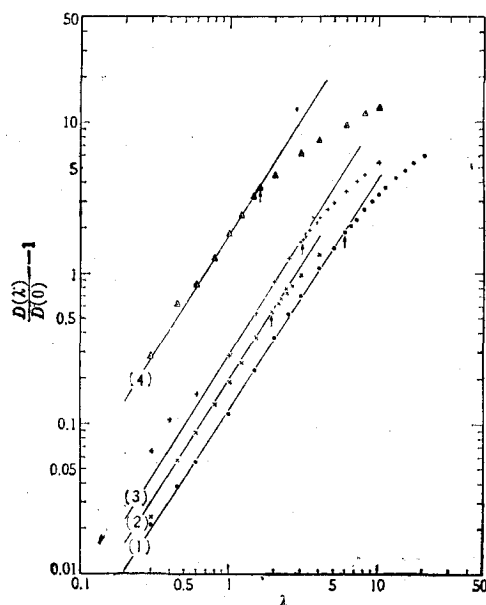
三、近似 T_c 公式

如 (5) 式所示的常系数 McMillan T_c 公式一般只能在 λ 小的区域 ($\lambda \lesssim 0.5$) 近似地吻合 Eliashberg 方程数值解. 引入

$$D(\lambda) = \frac{T_c}{T_c^M}. \quad (8)$$

用它表示出 McMillan T_c 公式 (5) 偏离严格解的程度. 显然, $D(\lambda)$ 是 λ 的函数. 图 1 是个例子. 它是根据双 δ 函数谱 ($r = 0.1, c = 0.9$) 的 Eliashberg 方程数值解 T_c 和 (5) 式计算出的.

把 $D(\lambda)$ - λ 曲线向 $\lambda = 0$ 外延, 得出 $D(0)$. 在图 2 中画出 $\log \left(\frac{D(\lambda)}{D(0)} - 1 \right) - \log \lambda$ 曲线. 谱参数和收敛半径 Λ^{-1} 的数值在图 2 下方给出. 各曲线旁的箭头标出了 $\lambda = \Lambda$ 的位置. 从图 2 可见, 在 $\lambda < \Lambda$ 区域, $\log \left(\frac{D(\lambda)}{D(0)} - 1 \right)$ 近似地线性依赖 $\log \lambda$, 斜率约为 1.55.

图1 $D(\lambda)$ 随 λ 变化曲线图2 $\log \left(\frac{D(\lambda)}{D(0)} - 1 \right)$ 随 $\log \lambda$ 变化曲线曲线 (1) — $r = 0.1$, $c = 0.9$, $\Lambda = 5.903$;曲线 (2) — $r = 0.2$, $c = 0.7$, $\Lambda = 1.902$;曲线 (3) — $r = 0.1$, $c = 0.8$, $\Lambda = 3.093$;曲线 (4) — $r = 0.05$, $c = 0.6$, $\Lambda = 1.614$

因此, $D(\lambda)$ 可近似地表示为

$$D(\lambda) = \alpha(1 + \beta\lambda^{1.55}), \quad (9)$$

其中 α 和 β 不依赖 λ , 但依赖有效声子谱 $\alpha^2 F(\omega)$ 的形状. 把 (9) 式代入 (8) 式, 得到

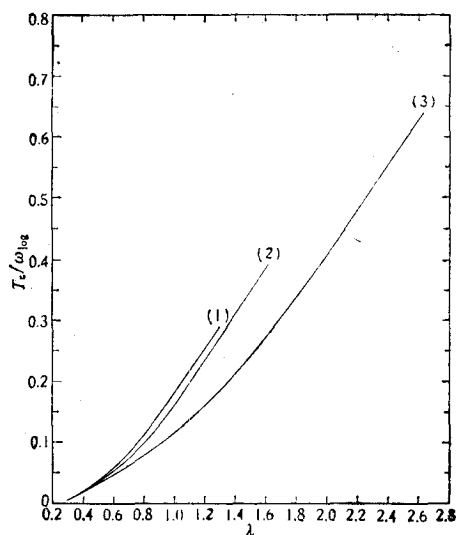
$$T_c = \alpha(1 + \beta\lambda^{1.55})T_c^M. \quad (10)$$

图 3 和图 4 是两张有代表性的图. 两图中各曲线对应的谱参数 r 和 c , 收敛半径 Λ^{-1} 以及各种矩比的数值在图下方列出, 其中 $\bar{\omega}_* = (\langle \omega^n \rangle)^{\frac{1}{n}}$. 图 3 画出了三条曲线. 它们对应的 $\omega_{\log}/\bar{\omega}_{1/2}$ 差不多是相等的, 约为 0.6; 但 Λ 不同, 分别为 1.293, 1.614 和 2.636. 图 4 中的曲线则相反. 它们的 Λ 近似相等, 约为 1.3; 但 $\omega_{\log}/\bar{\omega}_{1/2}$ 不同, 分别为 0.5974, 0.7264 和 0.8520. 从这两张图我们看到: 只要 λ 不是很小, 和给定的 λ 对应的 $T_c/\omega_{\log}$ 值随 Λ 增大而减小, 但随 $\omega_{\log}/\bar{\omega}_{1/2}$ 减小而增大; 而在 λ 很小的区域, 情况正好相反(见图 4 左上角的放大图).

在这些规律启示下, 用 Λ 和 $\omega_{\log}/\bar{\omega}_{1/2}$ 适当地组合出 α 和 β , 使得由 (10) 式算出的 T_c 能够和 Eliashberg 方程数值解在 $\lambda < \Lambda$ 区域相吻合. 经过一定尝试后, 得到

$$\alpha = \sqrt{\frac{1 + \Lambda^{0.15}}{2}} \exp \left\{ \left(\frac{\bar{\omega}_1 + \omega_{\log}}{2\omega_{\log}} - 0.675 \right)^{3/2} \ln \left(\frac{\omega_{\log}}{\bar{\omega}_{1/2}} \right) \right\}; \quad (11)$$

$$\beta = 0.11 \left(\frac{\bar{\omega}_{1/2}}{\omega_{\log}} \right)^{5.5} \frac{1}{\Lambda^{1/2}}. \quad (12)$$

图3 $\frac{T_c}{\omega_{\log}}$ 随 λ 变化曲线

曲线 (1)—— $r = 0.05$, $c = 0.5$, $A = 1.293$,

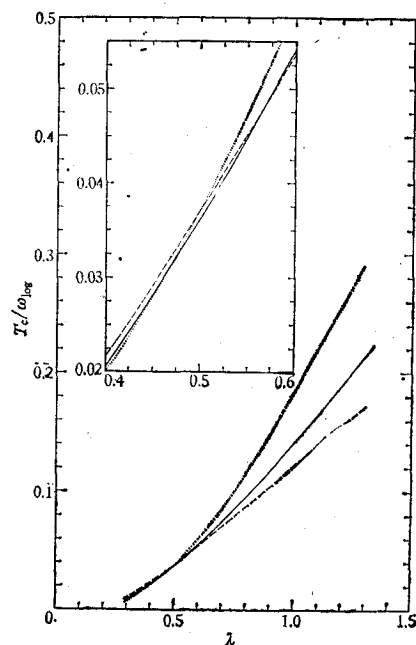
$$\frac{\omega_{\log}}{\bar{\omega}_{1/2}} = 0.5974, \quad \frac{\bar{\omega}_2}{\omega_{\log}} = 3.166;$$

曲线 (2)—— $r = 0.05$, $c = 0.6$, $A = 1.614$,

$$\frac{\omega_{\log}}{\bar{\omega}_{1/2}} = 0.5808, \quad \frac{\bar{\omega}_2}{\omega_{\log}} = 3.488;$$

曲线 (3)—— $r = 0.05$, $c = 0.756$, $A = 2.636$,

$$\frac{\omega_{\log}}{\bar{\omega}_{1/2}} = 0.6090, \quad \frac{\bar{\omega}_2}{\omega_{\log}} = 4.774$$

图4 $T_c/\omega_{\log}$ 随 λ 变化曲线

—— $r = 0.20$, $c = 0.5450$, $A = 1.308$,

$$\frac{\omega_{\log}}{\bar{\omega}_{1/2}} = 0.8520, \quad \frac{\bar{\omega}_2}{\omega_{\log}} = 1.659;$$

—— $r = 0.1$, $c = 0.5250$, $A = 1.339$,

$$\frac{\omega_{\log}}{\bar{\omega}_{1/2}} = 0.7264, \quad \frac{\bar{\omega}_2}{\omega_{\log}} = 2.321;$$

.... $r = 0.05$, $c = 0.5$, $A = 1.293$,

$$\frac{\omega_{\log}}{\bar{\omega}_{1/2}} = 0.5974, \quad \frac{\bar{\omega}_2}{\omega_{\log}} = 3.166$$

注意到, 在 α 表达式中, 除了出现 $\omega_{\log}/\bar{\omega}_{1/2}$ 外, 还出现了 $\frac{1}{2\omega_{\log}}(\bar{\omega}_1 + \omega_{\log})$. 初看起来, 似乎和上面的分析不符. 其实不然. 因为 $\bar{\omega}_{1/2}$ 和 $\frac{1}{2}(\bar{\omega}_1 + \omega_{\log})$ 是近似相等的, 即

$$\frac{\bar{\omega}_1 + \omega_{\log}}{2\omega_{\log}} \approx \frac{\bar{\omega}_{1/2}}{\omega_{\log}}. \quad (13)$$

在级数解收敛圆外, Eliashberg 方程数值解呈现出简单的规律, 特别是收敛半径 A^{-1} 直接进入 T_c 公式中, 无疑不是偶然的, 是有其内在原因的. 它们直接或间接地都表明了吴杭生和吉光达提出的超导体分类建议, 是合理的.

在表 1 中, 列出了 Hg 谱、Pb 谱、In 谱^[8]和三个双峰谱的 $T_c/\omega_{\log}$ 值. 表中标有 A-D 那几行是由 Allen-Dynes T_c 公式

$$T_c^{A-D} = f_1 f_2 T_c^M, \quad (14)$$

$$f_1 = \left[1 + \left(\frac{\lambda}{2.46} \right)^{3/2} \right]^{1/3}, \quad (15a)$$

表 1

Hg				Pb				In			
$A = 3.50, \frac{\bar{\omega}_1}{\omega_{\log}} = 1.32, \frac{\omega_{\log}}{\bar{\omega}_{1/2}} = 0.870$				$A = 0.785, \frac{\bar{\omega}_1}{\omega_{\log}} = 1.08, \frac{\omega_{\log}}{\bar{\omega}_{1/2}} = 0.961$				$A = 0.900, \frac{\bar{\omega}_1}{\omega_{\log}} = 1.19, \frac{\omega_{\log}}{\bar{\omega}_{1/2}} = 0.910$			
λ	严格解	A-D	本文	λ	严格解	A-D	本文	λ	严格解	A-D	本文
0.220	0.00203	0.00264	0.00271	0.277	0.00716	0.00695	0.00687	0.288	0.00806	0.00810	0.00789
0.548	0.0463	0.0465	0.0489	0.333	0.0136	0.0132	0.0131	0.356	0.0163	0.0163	0.0159
0.875	0.0999	0.101	0.102	0.390	0.0214	0.0209	0.0208	0.424	0.0262	0.0262	0.0257
1.20	0.150	0.149	0.149	0.446	0.0301	0.0295	0.0294	0.492	0.0373	0.0371	0.0365
1.53	0.197	0.194	0.191	0.503	0.0393	0.0386	0.0385	0.560	0.0488	0.0484	0.0478
1.86	0.239	0.236	0.229	0.559	0.0487	0.0479	0.0478	0.628	0.0605	0.0598	0.0593
2.19	0.279	0.276	0.268	0.616	0.0582	0.0572	0.0573	0.696	0.0721	0.0711	0.0708
2.51	0.317	0.315	0.306	0.672	0.0674	0.0664	0.0667	0.764	0.0836	0.0821	0.0821
3.17	0.385	0.389	0.383	0.729	0.0765	0.0755	0.0760	0.832	0.0947	0.0928	0.0932
3.50	0.417	0.424	0.422	0.785	0.0854	0.0843	0.0851	0.900	0.106	0.103	0.104
双 δ 函数谱 ($r = 0.3, c = 0.5$)				双 δ 函数谱 ($r = 0.25, c = 0.1$)				双 δ 函数谱 ($r = 0.48, c = 0.71$)			
$A = 1.09, \frac{\bar{\omega}_1}{\omega_{\log}} = 1.19, \frac{\omega_{\log}}{\bar{\omega}_{1/2}} = 0.915$				$A = 0.672, \frac{\bar{\omega}_1}{\omega_{\log}} = 1.06, \frac{\omega_{\log}}{\bar{\omega}_{1/2}} = 0.965$				$A = 1.10, \frac{\bar{\omega}_1}{\omega_{\log}} = 1.06, \frac{\omega_{\log}}{\bar{\omega}_{1/2}} = 0.971$			
λ	严格解	A-D	本文	λ	严格解	A-D	本文	λ	严格解	A-D	本文
0.385	0.0201	0.0203	0.0201	0.300	0.00971	0.00934	0.00923	0.300	0.00968	0.00935	0.00935
0.560	0.0481	0.0484	0.0482	0.450	0.0310	0.0301	0.0299	0.600	0.0553	0.0546	0.0548
0.735	0.0769	0.0775	0.0775	0.600	0.0562	0.0545	0.0547	1.00	0.115	0.115	0.117
1.09	0.131	0.130	0.132	0.672	0.0685	0.0662	0.0668	1.10	0.128	0.129	0.131

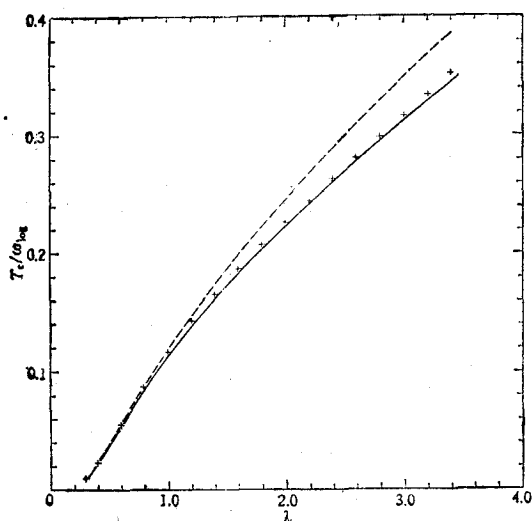


图5 $\frac{T_c}{\omega_{\log}}-\lambda$ 曲线

$$r = 0.24, \quad c = 0.8720, \quad A = 3.436,$$

$$\frac{\omega_{\log}}{\bar{\omega}_1} = 0.9348, \quad \frac{\bar{\omega}_1}{\omega_{\log}} = 1.171;$$

—— 严格解; --- Allen-Dynes T_c 公式; +—— 本文 T_c 公式

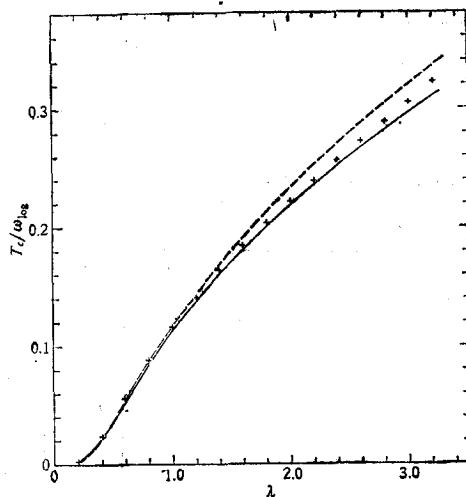


图6 $\frac{T_c}{\omega_{\log}}-\lambda$ 曲线

$$r = 0.3, \quad c = 0.9, \quad A = 3.267,$$

$$\frac{\omega_{\log}}{\bar{\omega}_1} = 0.9625, \quad \frac{\bar{\omega}_1}{\omega_{\log}} = 1.094;$$

曲线符号同图5

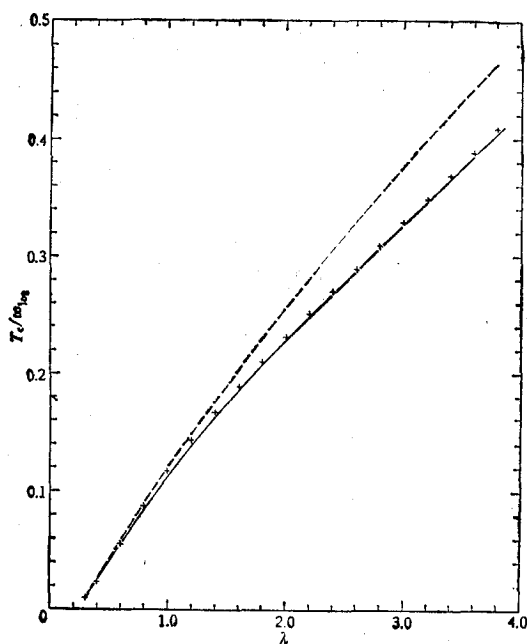


图7 $\frac{T_c}{\omega_{\log}}-\lambda$ 曲线

$$r = 0.18, \quad c = 0.865, \quad A = 3.857,$$

$$\frac{\omega_{\log}}{\bar{\omega}_1} = 0.9004, \quad \frac{\bar{\omega}_1}{\omega_{\log}} = 1.281;$$

曲线符号同图5

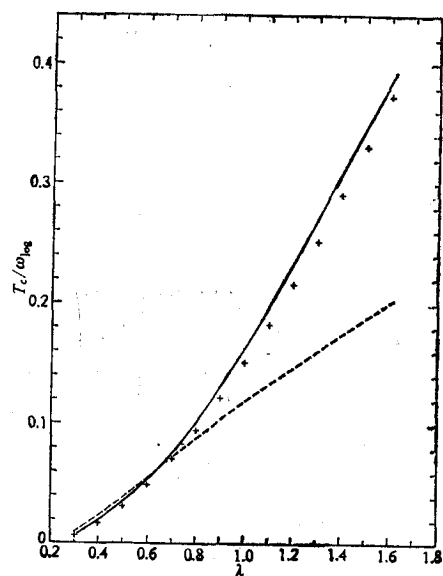


图8 $\frac{T_c}{\omega_{\log}}-\lambda$ 曲线

$$r = 0.05, \quad c = 0.6, \quad A = 1.614,$$

$$\frac{\omega_{\log}}{\bar{\omega}_1} = 0.5808, \quad \frac{\bar{\omega}_1}{\omega_{\log}} = 2.595;$$

曲线符号同图5

$$f_2 = 1 + \frac{\left(\frac{\bar{\omega}_2}{\omega_{\log}} - 1\right)\lambda^2}{\lambda^2 + (1.82\bar{\omega}_2/\omega_{\log})^2} \quad (15b)$$

算出的数值。就表 1 中所列的几种谱而言, 本文的 T_c 近似公式和 Allen-Dynes T_c 公式都可以在整个 $\lambda < \Lambda$ 区间内同严格解相当好地吻合。

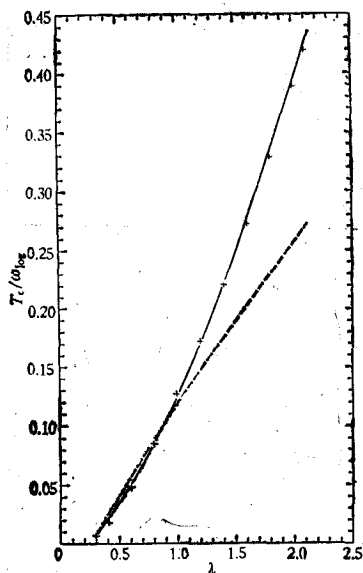


图 9 $\frac{T_c}{\omega_{\log}} - \lambda$ 曲线
 $r = 0.07$, $c = 0.7$, $\Lambda = 2.131$,
 $\frac{\omega_{\log}}{\bar{\omega}_{1/2}} = 0.6602$, $\frac{\bar{\omega}_1}{\omega_{\log}} = 2.246$;
 曲线符号同图 5

但是这种满意的吻合, Allen-Dynes T_c 公式一般是不能实现的。在图 5 至图 9 中, 我们画出了由 Eliashberg 方程算出的双 δ 函数谱的 $T_c/\omega_{\log} - \lambda$ 曲线, 有关的谱参数、收敛半径 Λ^{-1} 和各种矩比的数据在图下方注出。在同图中还画出本文 T_c 公式和 Allen-Dynes T_c 公式给出的结果。它们表明了, 在 $\lambda < \Lambda$ 区域, 本文的 T_c 公式和数值解符合是相当好的, 而 Allen-Dynes T_c 公式的吻合情况显然是不能令人满意的。

注意到, 在 Allen-Dynes T_c 公式中, 出现依赖谱形状的参量是 $\bar{\omega}_2/\omega_{\log}$, 而不是 $\bar{\omega}_{1/2}/\omega_{\log}$ 和 Λ 。比较图 3 和图 4 中的曲线以及图下方注明的 $\bar{\omega}_2/\omega_{\log}$ 数据, 就可看出, $\bar{\omega}_2/\omega_{\log}$ 不是一个恰当的参量。由此便不难理解, 为什么 Allen-Dynes T_c 公式和 $\lambda < \Lambda$ 区域的严格解一般不能较好地吻合。

我们得到的 T_c 近似公式 (10) 在函数形式上和 McMillan T_c 公式是相似的, 因而肯定了吴杭生和吉光达的猜测。如果重复他们在文献[4]进行的分析, 可立刻得出存在 A, B 两类超导体的结论来。

四、决定 A 型超导体临界温度的主要参量

在文献[4]中, 吴杭生和吉光达根据 McMillan T_c 公式研究了有效声子谱对 A 型超导体 T_c 的影响¹⁾。他们写道: “由此 T_c 公式直接看出, 或者增大 $\omega_{\log}$, 或者增大 λ , 都可以使 T_c 增加, 但 λ 是出现在 T_c 公式的指数上, 而 $\omega_{\log}$ 只出现在指数前的系数中, 因而 T_c 随 λ 变化迅速, 随 $\omega_{\log}$ 变化相对来说则缓慢得多了。所以, 要提高 A 型超导体的临界温度, 最有效方法是增大 λ 。”他们还写道: “电声子耦合强弱对它的临界温度影响大, 谱形状的影响相对来说则较小。”

但是, 这个分析不完全妥当。他们忽略了如下事实: McMillan 指数因子 $\exp\left(-1.04 \times \frac{1+\lambda}{\lambda}\right)$ 在 λ 小的区域变化很迅速; 在 λ 大的区域, 变化是很缓慢的。如果改正这个错误, 并考虑到 A 型超导体临界温度更正确地是由 (10) 式给出的, 不难看到: 上述结论只有对这样

1) 在同一文献中, 他们还研究了有效声子谱对 B 型超导体 T_c 的影响。这部分分析和结论是正确的。

一些 A 型超导体才是正确的, 它们的 Λ 较小——设 $\Lambda < \lambda_0$ ¹⁾, 因而 T_c 的变化主要是由指数函数 $\exp\left(-1.04 \frac{1+\lambda}{\lambda}\right)$ 决定的. 如果 Λ 比 λ_0 大, 那末他们的结论只有在 $\lambda < \lambda_0$ 区域才是正确的. 在 $\lambda_0 < \lambda < \Lambda$ 区域, T_c 的变化主要是由指数前的函数 $(1 + \beta\lambda^{1.55})$ 决定的, 因而决定 T_c 的主要参量不再是 λ , 而是 $\delta = \left(\frac{\bar{\omega}_{1/2}}{\omega_{\log}}\right)^{5.5} \frac{1}{\Lambda^{0.5}} \lambda^{1.55}$. 显然, 此时, 电声子耦合强弱和谱形状对 T_c 的影响是同样重要的.

因此, 吴杭生和吉光达在文献 [4] 得到的提高 A 型超导体临界温度的最有效方法是增大 λ 的结论, 只适用于这样一些 A 型超导体. 它们的收敛半径倒数 Λ 或者比 λ_0 小, 或者虽比 λ_0 大, 但 λ 小于 λ_0 . 对另一些 A 型超导体来说, 改变谱形状和增大 λ , 对提高 T_c 是同样有效的.

由于 δ 随 $\frac{\bar{\omega}_{1/2}}{\omega_{\log}}$ 变化快, 随 Λ 变化慢, 所以增大 $\frac{\bar{\omega}_{1/2}}{\omega_{\log}}$ 比减小 Λ 更有效地增大 δ 数值. 如何改变谱形使 $\frac{\bar{\omega}_{1/2}}{\omega_{\log}}$ 增大呢? 图 10 中曲线是用双 δ 函数谱计算得到的. 它表示出 $\frac{\bar{\omega}_{1/2}}{\omega_{\log}}$ 随谱参数 r 和 c 的变化. 从图 10 可见, 曲线的极大值位于 $c \approx 0.5$ 处, 并随 r 减小而增大. 因此, 适当改变谱形, 使有效声子谱双峰间的距离增大, 并且 A_1/ω_1 和 A_2/ω_2 接近相等, 可使 $\bar{\omega}_{1/2}/\omega_{\log}$ 增大, 其中 $A_1 = \frac{\lambda\omega_1}{2}c$ 和 $A_2 =$

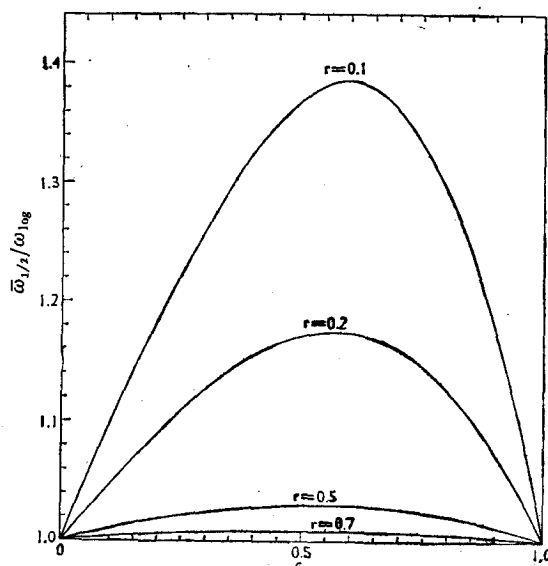


图 10 $\frac{\bar{\omega}_{1/2}}{\omega_{\log}}-c$ 曲线

$\frac{\lambda\omega_2}{2}(1-c)$ 分别是两峰下的面积. 这个结论对实际谱也是对的. 显然, 对谱形的这种要求是和声谱软化或者增大声谱面积都是有区别的.

在计算工作中, 吉光达同志和中国科学院高能物理研究所、中国科学技术大学 320 计算机组的同志曾给予大力帮助, 在此表示深切感谢.

参 考 文 献

- [1] 吴杭生、蔡建华、龚昌德、吉光达、蔡俊道, 物理学报, **26**(1977), 509; *Scientia Sinica*, **20**(1977), 583.
- [2] 龚昌德、吴杭生、蔡建华、蔡俊道、吉光达, 物理学报, **27**(1978), 85; *Scientia Sinica*, **21**(1978), 62.

1) λ_0 只是为了讨论的方便而引入的. 严格来说, T_c 从按指数函数 $\exp\left(-1.04 \frac{1+\lambda}{\lambda}\right)$ 变化转变为按 $1 + \beta\lambda^{1.55}$ 变化, 是经过一个过渡区域逐渐实现的. 因此, λ_0 的定义带有相当大的任意性, 我们把它粗略地定义为使 $1 + \beta\lambda^{1.55}$ 明显地偏离 1 的 λ 值. 譬如说, 取 $\beta\lambda_0^{1.55} = 0.2$, 即 $\lambda_0 \approx 1.5 \left(\frac{\omega_{\log}}{\bar{\omega}_{1/2}}\right)^{11/3} \Lambda^{1/3}$.

- [3] 蔡俊道、吉光达、吴杭生、蔡建华、龚昌德, 物理学报, **28**(1979), 393; *Scientia Sinica*, **22**(1979), 417.
- [4] 吴杭生、吉光达, 物理学报, **27**(1978), 746; *Scientia Sinica*, **22**(1979), 513.
- [5] M. L. McMillan, *Phys. Rev.*, **167** (1968), 331.
- [6] P. B. Allen and R. C. Dynes, *Phys. Rev.*, **B12** (1975), 905.
- [7] A. M. Cohen, J. F. Cutts, R. Fielder, D. E. Jones, J. Ribbans, E. Stuart, *Numerical Analysis*, **24** (1973), 165; 169.
- [8] J. M. Rowell, W. L. McMillan and R. C. Dynes, A Tabulation of the Electron-Phonon Interaction in Superconducting Metals and Alloys, Part I (to be published).
- [9] S. G. Louis and M. L. Cohen, *Solid St. Commun.*, **22** (1977), 1.

AN APPROXIMATE T_c FORMULA OF TYPE A SUPERCONDUCTORS (I)

CASE OF $\mu^* = 0$

WU HANG-SHENG ZHOU ZI-FANG

WANG ZHONG-YAN ZHANG XI-XIANG

ABSTRACT

By using numerical method, the superconducting critical temperature T_c is calculated from the Eliashberg equation and the dependence of T_c on λ and the shape of effective phonon spectrum is investigated. In this study, $\alpha^2F(\omega)$ is taken as the double delta-function spectrum and the spectrum parameters are permitted to change over a wide range. It is found with surprising that in the regime of $\lambda < \Lambda$, i.e. outside the convergence circle of the T_c series solution, T_c depends, not only on λ and ratios of moments but also on Λ , the reciprocal of the convergence radius of the T_c series solution, and the relation between them shows a certain regularity. Under the light of these results, an approximate T_c formula for the case of $\mu^* = 0$ is constructed in the regime of $\lambda < \Lambda$ through fitting the numerical solution of Eliashberg equation.

Then, a previous paper of Chi Guang-ta and one of the present authors [4] is re-examined. It is concluded that their suggestion for the classification of superconductors and most of their conclusions are correct, but their analysis for the main parameter through which the critical temperature of type A superconductor is determined, are suitable for those type A superconductors only, the parameter Λ of which is smaller than λ_0 , or Λ is greater than λ_0 but λ is smaller than λ_0 . Here, λ_0 is a parameter depending on the shape of spectrum and its definition is given in this paper. For other type A superconductors ($\lambda_0 < \lambda < \Lambda$), the main parameter through which T_c is determined is not λ , but $\delta = \frac{1}{\Lambda^{0.5}} \left(\frac{\bar{\omega}_{1/2}}{\omega_{\log}} \right)^{5.5} \lambda^{1.55}$.