

广义相对论中负指数多层球的结构及稳定性*

褚耀泉 程福臻 方励之

(中国科学技术大学天体物理研究室)

提 要

本文运用广义相对论讨论了满足负指数多方状态方程的流体多层球。经典引力理论与相对论性理论的差别由 σ 标志。 σ 是球体中心处的压力与密度之比。通过数值积分得到了 $n < 0$ 的相对论性 Emden 函数。在 $-1 < n < 0$ 间,平衡流体球是有限的,但是不稳定的。随着 σ 的增大,平衡半径减小。在 $-\infty < n < -1$ 的情况下,负指数多层球没有有限平衡解。讨论了在外压情况下的稳定性问题,随着 σ 的增大,稳定结构的临界半径 r_{*c} 也增大。

一、引 言

多层流体球的结构及稳定性是一个经典的物理问题,它是恒星结构理论的重要基础。从1870年 Lane 讨论这个问题开始,前后经过 Ritter, Kelvin, Emden, Fowler 以及 Chandrasekhar 等人的发展,对于多层球的特性已经有很细致的分析,并且已经给出了相当详尽的数值解^[1]。多层球问题之所以成为一个传统性的问题,是由于多方物态方程

$$P = K\rho^{1+\frac{1}{n}} \quad (1)$$

比较符合实际,而又比较简单。

然而,所有以前的工作,只限于讨论多方指数 $n > 0$ 的情况,没有讨论过负指数,即 $n < 0$ 的情况。方程(1)最早是 Kelvin 导出的,用来分析绝热过程,这时 $\gamma = 1 + 1/n = C_p/C_v$ 是比热比,故一定有 $n > 0$ 。后来,将绝热变化 $dQ = 0$ 推广到多方变化,即 $dQ = C'dT$ 情况, C' 为常数,则指数 $\gamma \equiv 1 + 1/n = (C_p - C')/(C_v - C')$ 。可见原则上容许有 $n < 0$ 的情况。尽管这一点是早已知道的,但在很长时间内并没有仔细地去处理 $n < 0$ 的多层流体球的性质,这可能是因为不清楚是否确实存在着用这种模型描述的实际现象。

近些年来发现,在某些条件下的星际气体正是属于 $n < 0$ 的物态^[2]。星际气体一般都是光薄的,它主要通过宇宙线加热及辐射冷却达到能量平衡。通过辐射电离及碰撞复合达到组分平衡。这种平衡使得密度高的星际气体温度低,而密度低的温度高,相当于 $n < 0$ 的多方变化。可能不仅星际气体,而且星系际气体也具有类似的性质。因此 $n < 0$

* 1978年11月8日收到。

的情况很可能是宇宙中一种相当常见的现象。直到最近,才开始利用牛顿引力理论研究负指数多层流体球的物理性质^[3]。

我们这项工作的目的是根据广义相对论讨论负指数多层流体球的结构及稳定性。一般认为,对一个体系来说,物态密度越高,则广义相对论的效应越重要。其实,这个看法不十分完全,就以多层球问题来说,相对论效应的大小,取决于下列参数:

$$\sigma = K\rho_c^{1/n}/c^2 = P_c/\rho_c. \quad (2)$$

它是球体中心处的压力与密度之比。 σ 越大,相对论的影响越显著。对于负多方指数的物态,密度低时,压力减少得慢或反而增高。所以对负指数多层球这种体系来说,密度越低,相对论的效应反而越大。

二、相对论性 Emden 方程

静态球对称流体球的广义相对论方程是熟知的,这里只给出一些必要的公式。

静态球对称流体球内部的度规为

$$d\tau^2 = -g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\varphi^2.$$

对于理想流体,能量动量张量为

$$T_{\mu\nu} = Pg_{\mu\nu} + (P + \rho)U_\mu U_\nu.$$

引力场方程为

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi GT_{\mu\nu}.$$

现在可以化为

$$-r^2 \frac{dP}{dr} \left[1 - \frac{2GM(r)}{r} \right] \left[1 + \frac{p}{\rho} \right]^{-1} = GM(r)\rho \left[1 + \frac{4\pi r^3 p}{M(r)} \right]. \quad (3)$$

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho. \quad (4)$$

作下列变换:

$$r = \xi/H, \quad (5)$$

$$\rho = \rho_c \theta^n(\xi), \quad (6)$$

$$M(r) = \frac{4\pi\rho_c}{H^3} v(\xi). \quad (7)$$

其中 ρ_c 为流体球中心的密度, H 为常数

$$H = \left[\frac{4\pi G\rho_c}{\pm(n+1)K\rho_c^{1/n}} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (8)$$

对于 $-1 < n < 0$ 范围,上式取正号;对于 $-\infty < n < -1$ 范围,则取负号。这时(3),(4)两式分别变为

$$\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \cdot \frac{\pm 1 - 2\sigma(n+1)v(\xi)/\xi}{1 + \sigma\theta} + v + \sigma\xi\theta \frac{dv}{d\xi} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{dv}{d\xi} = \xi^2 \theta^n, \quad (10)$$

其中 σ 由(2)式表示. 同样, 对于 $-1 < n < 0$, 取上面的符号, 对于 $-\infty < n < -1$, 取下面的符号. (9) 和 (10) 式就是相对论性 Emden 方程. 当光速 $c \rightarrow \infty$, 即 $\sigma \rightarrow 0$ 时, (9) 及 (10) 式即过渡到标准的经典 Emden 方程. 从方程(7)可知, 为了避免在原点质量的奇异性, 必须使 $v(0) = 0$, 因此, 求解(9)式和(10)式的条件为

$$\theta(0) = 1, \quad v(0) = 0. \quad (11)$$

由(10)式看到, 当 $\xi \rightarrow 0$ 时, $v \sim \xi^3$, 故由方程(9)应有 $\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\xi=0} = 0$.

有关流体球的其它物理量, 都可以通过相对论性 Emden 函数 $\theta(\xi)$ 及 $v(\xi)$ 得到. 例如: 度规分量 $g_{rr} = A(r)$, $g_{tt} = B(r)$ 可以分别表示为

$$A = \left(1 \mp 2\sigma(n+1)\frac{v(\xi)}{\xi}\right)^{-1}. \quad (12)$$

$$B = \exp \left\{ \mp 2(n+1)\sigma \int_{\xi}^{\infty} \frac{1}{\xi^2} [v + \sigma \xi^3 \theta^{n+1}] \right. \\ \left. \times [1 \mp 2\sigma(n+1)v(\xi)/\xi]^{-1} d\xi \right\}. \quad (13)$$

在(13)式中已取 $B(\infty) = 1$ 作为边界条件. 如果球体是有界的, 其边界坐标为 ξ_1 , 则当 $\xi \geq \xi_1$ 时, $\theta(\xi) = 0$, 而 v 为常数 $v = v(\xi_1)$. 这时由(12), (13)式得

$$A = B^{-1} = (1 \mp 2\sigma(n+1)v(\xi_1)/\xi)^{-1}.$$

这就是 Schwarzschild 度规.

应当指出, 变换(5)至(8)式对于 $n = -1$ 的情况不适用. $n = -1$ 相当于恒压情况, 此时方程(3)成为

$$\left[1 + \frac{P}{\rho}\right] \left[1 + \frac{4\pi r^3 p}{M}\right] = 0.$$

它没有物理解. 这一点与牛顿引力理论的结果是一样的. 但与牛顿理论情况不完全相同的是, 如果允许负压 ($p < 0$) 存在, 则上式有解:

$$M = 4\pi |p| r^3, \quad (14)$$

即

$$\rho = |p|. \quad (15)$$

在牛顿引力理论中, 压力对引力没有贡献, 所以这种解是不存在的.

三、数值计算结果及讨论

方程组(9), (10)只能用数值方法求解. 但是可以用级数展开方法粗略地估计一下 σ 的作用趋势, 在 $\xi = 0$ 点的附近有

$$\theta(\xi) = 1 + a_2 \xi^2 + a_4 \xi^4 + \dots, \quad (16)$$

$$v(\xi) = \frac{1}{3} \xi^3 + \frac{n}{5} a_2 \xi^5 + \frac{1}{7} \left[n a_4 + \frac{n(n-1)}{2} a_2^2 \right] \xi^7 + \dots, \quad (17)$$

其中

$$a_2 = \mp \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{3} + \sigma \left(\frac{4}{3} + \sigma \right) \right\},$$

$$a_4 = \frac{1}{8} \left\{ \frac{n}{15} + \frac{2}{9} n\sigma + \frac{2}{3} \left(\frac{8}{15} n + 1 \right) \sigma^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{9}{5} n + 4 \right) \sigma^3 + (n+2) \sigma^4 \right\}$$

.....

下面分两种情况来讨论。

1. $-1 < n < 0$ 的情况

由(9)及(10)式,在 $-1 < n < 0$ 的范围内,开始时 $d\theta/d\xi < 0$, 因而 $\theta(\xi)$ 的第一个零点 $\theta(\xi_1) = 0$ 就是流体球的边界, ξ_1 是它的坐标半径。而从(16)式可见, σ 越大则 $\theta(\xi)$ 下降得越快。

在数值计算中,对于每一组给定的 n, σ 值,采用龙格-库塔方法,从 $\xi = 0$ 开始,沿正 ξ 轴方向自选步长求积,以保证 θ 的相对误差不大于 10^{-4} 。

在图 1 中画出当 $n = -0.2$ 时相对论性的 Emden 函数的图形,其 σ 值分别取 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0。

表 1 中列出球体边界,即 $\theta(\xi)$ 的第一个零点处的一系列物理量。 ξ_1/H 是边界的坐标半径。 $\bar{\xi}_1/H$ 表示一个外部观测者测量到的从中心到径向坐标 ξ_1/H 之间的真实距离。其定义为

$$\bar{\xi}_1 = \int_0^{\xi_1} (g_{rr})^{\frac{1}{2}} d\xi = \int_0^{\xi_1} [1 - 2\sigma(n+1)v(\xi)/\xi]^{-\frac{1}{2}} d\xi. \quad (18)$$

$\rho_c/\bar{\rho}$ 为中心密度与平均密度之比。平均密度定义为

$$\bar{\rho} = M(R) \left(\frac{4\pi}{3} R^3 \right)^{-1}, \quad (19)$$

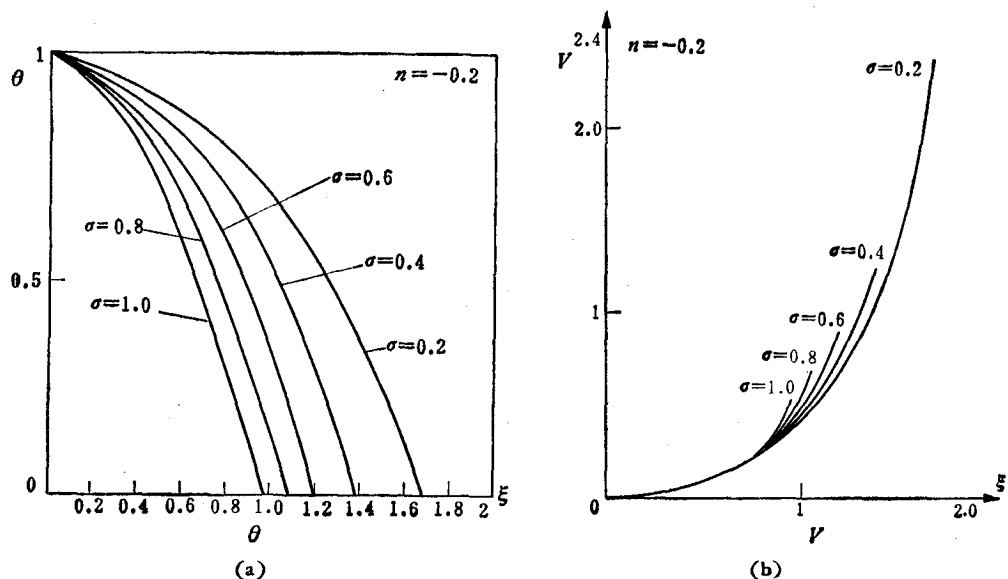


图 1

其中

$$R = \xi_1/H, \quad (20)$$

$$M(R) = \frac{4\pi\rho_c}{H^3} \nu(\xi_1). \quad (21)$$

利用变换关系(7)式,则有

$$\rho_c/\bar{\rho} = \xi_1^3/3\nu(\xi_1). \quad (22)$$

Q 表示引力势能,它由下式定义:

$$Q = M(R) - M_0. \quad (23)$$

$$\begin{aligned} M_0 &= 4\pi \int_0^R \rho A^{1/2} r^2 dr \\ &= \frac{4\pi\rho_c}{H^3} \int_0^{\xi_1} \frac{\theta^n \xi^2 d\xi}{[1 - 2\sigma(n+1)\nu(\xi)/\xi]^{1/2}}. \end{aligned} \quad (24)$$

故由(7)式有

$$\begin{aligned} \frac{Q}{M(R)} &= 1 - \frac{1}{\nu(\xi_1)} \\ &\times \int_0^{\xi_1} \frac{\theta^n \xi^2 d\xi}{[1 - 2\sigma(n+1)\nu(\xi)/\xi]^{1/2}}. \end{aligned} \quad (25)$$

由(8)和(22)式可以推得

$$M(R) = 4\pi \left(\frac{n+1}{4\pi G} \right)^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}} \rho_c^{\frac{1}{2}-n/2n} \nu(\xi_1). \quad (26)$$

对于给定的 n 及 K , (2) 式确定了 σ 与 ρ_c 的关系为

$$\rho_c = (\sigma/K)^n. \quad (27)$$

代入(26)式得

表 1 相对论性 Emden 函数的一些参数

n	σ	ξ_1	$\bar{\xi}_1$	$\nu(\xi_1)$	$\rho_c/\bar{\rho}$	$-Q/Mc^2$
-0.2	0.2	1.7526	1.8842	2.3527	0.7627	0.1620
	0.4	1.4473	1.6132	1.3366	0.7561	0.2476
	0.6	1.2553	1.4297	0.8804	0.7489	0.3094
	0.8	1.1208	1.2935	0.6326	0.7419	0.3688
	1.0	1.0200	1.1896	0.4813	0.7350	0.3734
-0.5	0.2	1.6786	1.7563	3.3330	0.4730	0.0530
	0.4	1.3919	1.4924	1.9493	0.4611	0.2107
	0.6	1.2063	1.3113	1.3018	0.4495	0.1929
	0.8	1.0740	1.1769	0.9419	0.4384	0.2525
	1.0	0.9730	1.0734	0.7189	0.4271	0.2875
-0.8	0.2	1.6189	1.6502	6.1990	0.2281	-0.2187
	0.4	1.3504	1.3900	3.8317	0.2142	0.5076
	0.6	1.1712	1.2122	2.6425	0.2027	0.0713
	0.8	1.0410	1.0811	1.9506	0.1928	0.1382
	1.0	0.9411	0.9746	1.4616	0.1901	0.1621

$$M(R) = 4\pi \left(\frac{n+1}{4\pi G} \right)^{3/2} K^{n/2} \sigma^{3-n/2} v(\xi_1). \quad (28)$$

由(27)及(28)两式, 可以求出 $M(R)-\rho_c$ 的关系. 图 2 中画出 $M(R)/4\pi \left(\frac{n+1}{4\pi G} \right)^{3/2} K^{n/2} = \sigma^{3-n/2} v(\xi_1)$ 与 $\rho_c K^n = \sigma^n$ 之间的关系. 由表 2 及图 2 看到总有 $dM/d\rho_c < 0$, 所以这些平衡态是不稳定的.

表 2
 $n = -0.2$

σ	0.2	0.4	0.6	0.8	1
σ^n	1.3797	1.2011	1.1076	1.0456	1
$\sigma^{(3-n)/2} v(\xi_1)$	0.1791	0.3085	0.3888	0.4427	0.4813

$n = -0.5$

σ	0.2	0.4	0.6	0.8	1
σ^n	2.2361	1.5811	1.2910	1.1180	1
$\sigma^{(3-n)/2} v(\xi_1)$	0.1994	0.3922	0.5325	0.6374	0.7189

$n = -0.8$

σ	0.2	0.4	0.6	0.8	1
σ^n	3.6239	2.0814	1.5048	1.1954	1
$\sigma^{(3-n)/2} v(\xi_1)$	0.2913	0.6719	1.0012	1.2766	1.4616

* $M(R) = 4\pi \left(\frac{n+1}{4\pi G} \right)^{3/2} K^{n/2} \sigma^{3-n/2} v(\xi_1)$ 由数据可作 $\sigma^n-M(R)$ 图.

由(6)式可知, 在 $\theta(\xi)$ 的零点处, ρ 是无限大的 (因 $n < 0$), 所以这个有限的平衡流体球好象一个球壳, 在球表面处密度高, 而中心处密度低, 真实情况 ρ 当然不能达到无限.

2. $-\infty < n < -1$ 的情况

由(9), (10)式看到, 在 $-\infty < n < -1$ 的情况, 恒有 $d\theta/d\xi > 0$, $\theta(\xi)$ 和 $v(\xi)$ 都是 ξ 的单调递增函数, 故没有有限边界的平衡解. 我们利用定步长 ($h = 0.01$) 吉尔方法, 计算了 ξ 从 0 到 100 的 $\theta(\xi)$, $v(\xi)$ 数值. 所采取的参数为 $n = -1.2, -1.5, -2, -3, -4, -10$, 对每个 n 值分别取 $\sigma = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$. 图 3 画出了其中 $n = -1.2$ 的曲线各六条.

我们知道 $\rho \sim \theta^n$, 虽然 θ 是随着 ξ 递增的函数, 但由于 $n < 0$, 所以当 $\theta \rightarrow \infty$ 时, $\rho \sim \theta^n \rightarrow 0$, 但是, 应当指出实际上这种情况下多层流体球的总质量并不是有限的. 由于 $dv/d\xi = \xi^2 \theta^n > 0$, 故当 $\xi \rightarrow \infty$ 时, 有 $dv/d\xi \rightarrow \infty$. 而 $M \propto v(\xi)$, 因此当 $\xi \rightarrow \infty$ 时, 虽然 $\rho \rightarrow 0$, 但 $M \rightarrow \infty$. 总之当 $-\infty < n < -1$ 时, 不可能存在有限质量和有限半径的流体球.

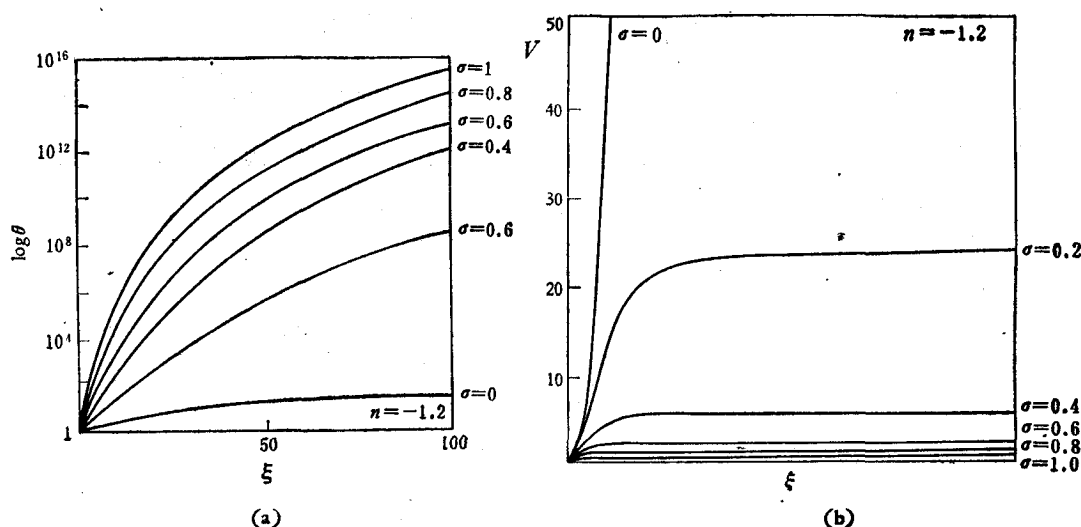


图 3

四、在外压下的稳定性

从上节知道,多方指数在 $-\infty < n < -1$ 的范围中,多方流体球是扩展到无限远的。但是如果流体球处在外部介质包围下,由于介质压力的维持则有可能存在着有限半径的多方流体球。例如在星际云中的多层球,或星系际气体中的多层球就都属于这种情况。因而这种稳定性的问题无论从理论上或是应用上都是有意义的。

我们讨论具有质量 M , 在外界压力 P_e 作用下的一个多层流体球的稳定性。在半径 ξ 以内的流体总质量为

$$M(\xi) = \frac{4\pi\rho_c}{H^3} v(\xi), \quad (29)$$

则

$$\rho_c = \left[\frac{4\pi G}{\pm(n+1)K} \right]^{3n/(3-n)} \left(\frac{M}{4\pi v(\xi)} \right)^{2n/(3-n)}. \quad (30)$$

由此可以得到一定质量 M 的多方流体球的半径 r_e 以及外压 P_e 与 ξ_e 的关系:

$$r_e = \xi_e/H = \xi_e \left(\frac{\pm(n+1)K}{4\pi G} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{4\pi G}{\pm(n+1)K} \right]^{\frac{3(1-n)}{2(3-n)}} \left[\frac{M}{4\pi v(\xi_e)} \right]^{\frac{1-n}{3-n}}. \quad (31)$$

$$\begin{aligned} P_e &= K\rho_c^{1+\frac{1}{n}}\theta^{n+1} \\ &= K \left[\frac{4\pi G}{\pm(n+1)K} \right]^{\frac{3(n+1)}{3-n}} \left[\frac{M}{4\pi v(\xi_e)} \right]^{\frac{2(n+1)}{3-n}} \theta^{n+1}. \end{aligned} \quad (32)$$

ξ_e 表示多方流体球截断的表面的 ξ 值。相应的无量纲部分:

$$r_e \sim r_{ed} = \xi_e v(\xi_e)^{-\frac{1-n}{3-n}}, \quad (33)$$

$$P_e \sim P_{ed} = v(\xi_e)^{-\frac{2(n+1)}{3-n}} \theta^{n+1}. \quad (34)$$

当 $\sigma \rightarrow 0$ 时, $v(\xi) = \pm \xi^2 \theta'$, 上述式子就回到牛顿引力理论的形式:

$$\gamma_{ed} = \xi_e \left(\pm \xi_e^2 \frac{d\theta}{d\xi_e} \right)^{-\frac{1-n}{3-n}},$$

$$P_{ed} = \left(\pm \xi_e^2 \frac{d\theta}{d\xi_e} \right)^{-\frac{n(n+1)}{3-n}} \theta(\xi_e)^{n+1}.$$

对于 $\xi \ll 1, \theta \simeq 1, v \simeq \frac{1}{3} \xi_e^3$, 则 $\gamma_{ed} \rightarrow \xi_e^{-\frac{2n}{3-n}} P_{ed} \rightarrow \xi_e^{\frac{6(n+1)}{n-3}}$, $\delta P_{ed} / \delta \gamma_{ed} = (\delta P_{ed} / \delta \xi_e) / (\delta \gamma_{ed} / \delta \xi_e) \simeq \frac{-6(n+1)}{2n} \xi_e^{\frac{6n+6}{n-3}}$. 因此当 $-\infty < n < -1$ 时, $\delta P_{ed} / \delta \gamma_{ed} < 0$, 多方流体球是稳定的.

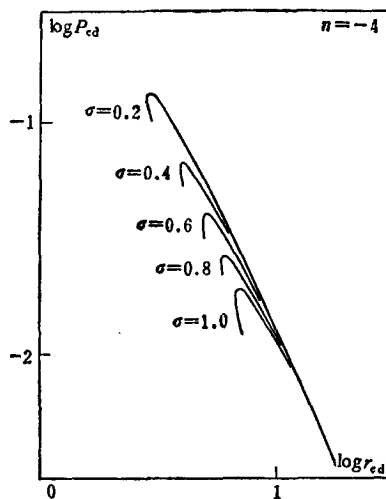


图 4

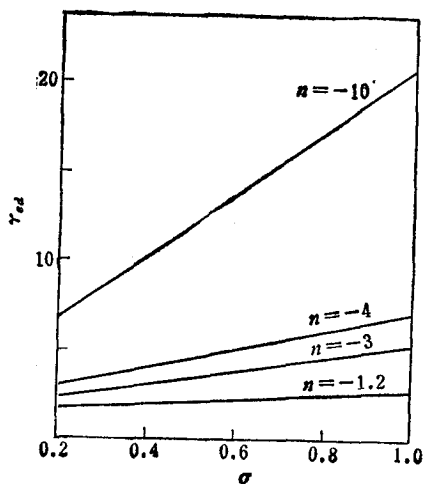


图 5

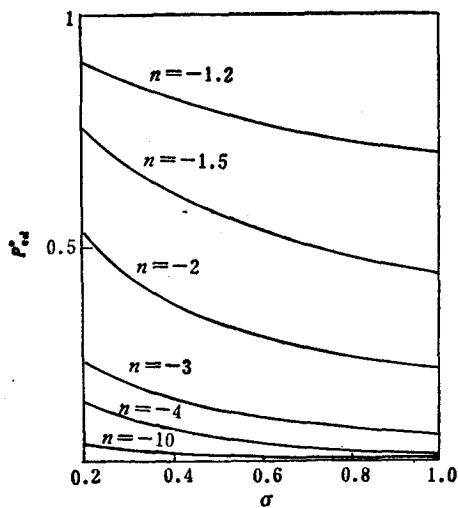


图 6

由(33),(34)式,我们计算了无量纲的外压力 P_{ed} 和相应的无量纲的 γ_{ed} 值. 所取的参数仍为 $n = -1.2, -1.5, -2, -3, -4, -10$; 以及 $\sigma = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$, 为便于讨论作图 4.

从图 4 中可以看到,类似于牛顿引力理论的情况,对于每一组参数 n, σ , 都存在着一个临界值 γ_{ed}^* . 当 $\gamma > \gamma_{ed}^*$ 时, $\delta P_{ed}/\delta \gamma_{ed} < 0$, 流体球的结构是稳定的. 流体球由于外部压力的不断增长而被压缩,当半径小于 γ_{ed}^* 时,就可能发生不稳定. 广义相对论的效应表现在 γ_{ed}^* 随着 σ 增大而逐渐增大这一点上. 图 5 和图 6 分别表示 $\gamma_{ed}^*-\sigma$ 和 $P_{ed}^*-\sigma$ 之间的关系,即广义相对论的作用是扩大了不稳定的范围.

参 考 文 献

- [1] S. Chandrasekhar, *Stellar Structure* (1939).
- [2] F. H. Shu, V. Milione, W. Gebel *et al.*, *Ap. J.*, **173**(1973), 557.
- [3] Y. P. Viala, Gp. Horedt, *A. Ap.*, **33**(1974), 195.

STRUCTURE AND STABILITY OF POLYTROPIC FLUID SPHERES WITH NEGATIVE INDEX WITHIN THE GENERAL RELATIVISTIC THEORY

CHU YAO-QUAN CHEN FU-ZHEN FANG LI-ZHI

(*Astrophysics Research Division, University of Science and Technology of China*)

ABSTRACT

Based on the general relativistic theory, an investigation on the polytropic fluid spheres with negative index is made. The difference between classical gravitational theory and the relativistic one is measured by a parameter σ , which is the ratio of pressure to density at the center of the sphere. The relativistic Emden functions for $n < 0$ are obtained by numerical integration. For $-1 < n < 0$, the fluid spheres are finite, but it is unstable. The larger the value of σ , the smaller the radius of equilibrium would be. For $-\infty < n < -1$, the polytropic fluid sphere with negative index has no finite solution of equilibrium. The stability under external pressure is discussed as well. It shows that the critical radius of stable structure r_{ed}^* increases with the value of σ .