

关联函数的长时间渐近行为*

——波对弛豫过程的影响

霍 裕 平

(中国科学院等离子体研究所)

提 要

本文从非平衡态统计的一般理论出发,系统地讨论了宏观体系中波对弛豫过程的影响,特别是关联函数的非指数型渐近行为。

由于表象选择对处理耗散过程的重要性,我们必须从元激发表象出发(而不是自由粒子表象)计算关联函数或输运系数(久保公式)。为此,应用了 C^* 代数的基本概念,发展了一套算子展开的方法,用之将流算子在元激发二次量子化表象中一般地表示出来。我们从刘维算子的预解式出发,对元激发间的剩余相互作用作微扰,应用了投影算子方法后,可以比较简单地得到关联函数非指数衰减部分的一般表达式。

根据对元激发处理过程的分析,我们将元激发间的剩余相互作用分为两类。对于纯耗散模,考虑线性相互作用后,即得到非指数衰减的主要部分($t^{-d/2}$ 项)。仔细分析表明,非线性作用(模模耦合)是比较小的,而且导致较快的衰减(t^{-d} 型),因而可以忽略。

本文还强调指出,对于波过程来说,局部涨落关联,粒子自关联以及输运过程(总粒子流,总热流的关联)有本质的不同,它们的相对大小(指对相应准粒子贡献部分)也可能差别较大。

应用这些一般的结果,我们简单分析了流体情况,并对模耦合理论作了一些讨论。

趋向平衡(耗散)是宏观体系所特有的属性。在平衡态附近,体系的弛豫行为完全由平衡态的时间关联函数所描述^[1]。根据涨落耗散定理,关联函数的傅氏展开又直接和人们最感兴趣的线性输运系数联系在一起。因此,对于关联函数长时间行为(宏观时间尺度的行为)的讨论,成为非平衡态统计理论的中心课题之一。

最基本最简单的弛豫过程是布朗粒子的运动:

$$\frac{d}{dt} v_x(t) = -\frac{\eta}{m} v_x(t) + \frac{F_x(t)}{m}, \quad (1.1)$$

η 是摩擦系数(反映其它分子对它的平均作用), F_x 是涨落力(在微观时间尺度内涨落)。粒子速度关联函数

$$\langle v_x(t) v_x(0) \rangle = \langle v_x(0)^2 \rangle \exp\left(-\frac{\eta}{m} t\right), \quad (1.2)$$

* 1978年5月8日收到; 1979年5月28日收到修改稿。

而布朗粒子自扩散系数

$$D_s = \frac{1}{2t} \langle \Delta \times (t)^2 \rangle = \langle v_s(0)^2 \rangle \frac{m}{\eta}. \quad (1.3)$$

人们也常将多体系中任一粒子看成布朗粒子(试探粒子),而将所有粒子的 D_s 求和即取作扩散系数 (nD_s , n 为粒子密度). 根据 (1.2) 式及类似的结果, 长时间以来广泛使用“弛豫时间近似”来处理弛豫过程. 即认为关联函数的长时间行为都是负指数型 $\left(\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$, 弛豫时间 τ 可以近似由跃迁几率求出.

Alder 等人用计算机模拟多粒子系的弛豫过程^[2], 结果表明, 速度关联函数除了指数衰减部分外, 还存在一负幂 ($t^{-\frac{d}{2}}$, d 是维数) 衰减部分, 后者与体系的低频波有密切关系. 这引起了人们很大兴趣, 而后发表了很多讨论这种非指数衰减行为的理论工作. 到目前为止, 这些理论大致可分为两类:

1) 模耦合理论^[3-5] 这是对流体情况的一种宏观和半宏观的讨论, 各种说法不同, 归根到底是在局部平衡的假设下, 将低频波对弛豫过程的贡献单独分出来, 得到

$$\phi_{BA}(t)_w = \langle B, A(t) \rangle_w \sim \Gamma_{BA} t^{-\frac{d}{2}}.$$

所谓局部平衡假设即认为体系从任何初始状态出发; 经过宏观短时间 (约为散射时间 τ) 后, 即达到局部平衡状态 (例如一个粒子与周围粒子达到平衡), 而后通过低频流体波过程趋向整体平衡. 但是, 已经有反例表明, 并不是所有可能的初始状态都首先趋向确定的局部平衡态^[5]. 我们也不能肯定, 是否应将初态分解, 使其分别独立地趋向相应的局部平衡态. 显然, 不同的做法虽然都能得到 $t^{-\frac{d}{2}}$ 项, 但 Γ_{BA} 系数可以差别很大. 此外, 局部平衡假设还很难推广讨论其它一些非流体的系统. 而正是可能在某些非流体系统中, 这种非指数衰减行为才更为明显.

2) 微观理论 从刘维方程 (或玻耳兹曼方程) 出发, 应用多体微扰论方法, 选择合适的部分图形并求和之, 得到低密度下 $t^{-\frac{d}{2}}$ 渐近行为^[6]. 如果进一步考虑更广一类的图形, 将相互作用重正化, 也可以讨论较高密度的情况. 这里, 宏观波包含在所选择的无穷图形中 (类似于多体理论中利用无穷图形求和得到集体激发), 因而元激发和弛豫是一齐解出的. 早已知道, 多体微扰级数只是一种渐近展开, 选择部分图形 (例如最发散图形) 求和的结果是否可靠, 依赖于和其它方法所得结果的比较. 即使不怀疑其结果, 由于要对每种具体情况 (不同体系, 不同过程) 分别进行复杂的计算, 我们也很难对弛豫过程进行比较一般的分析.

因此, 全面分析低频波对关联函数渐近行为的影响, 仍然是应该受到重视的课题. 我们应用算子代数的基本概念, 将关联函数用元激发算子展开, 并在刘维算子预解式微扰展开中, 采用了投影算子方法, 从而系统地讨论了低频集体激发部分 (包括波-波相互作用的非线性过程) 的长时间渐近行为. 由此分析了流体中的过程.

本文主要是描述一个理论框架. 对于具体体系的弛豫过程以及与它有联系的反常输运现象, 我们希望能以后进行讨论.

二

我们知道,多体系统基态附近的低激发谱一般具有“元激发”结构,即可以看成是一些波和准粒子(重正化以后的粒子)能量之和。因此,如果只考虑弱激发过程,可以将体系看成由元激发所组成。宏观波与温度有关,称为含温度的元激发,用来讨论平衡态附近的弱激发过程^[7]。对于不少体系,元激发谱都有了很好的计算。我们选择元激发表象作为分析弛豫过程的出发点,显然将使理论计算大为简单(避免能谱计算)。此外,在非平衡态统计理论中所有趋向平衡的讨论(计算耗散过程)都依赖于表象的选择,由不同表象出发得到的结果是不同的。既然很多元激发过程都被直接观测到,由元激发表象出发讨论弛豫过程当然更为合适。

由于在以下讨论中,需要仔细分析元激发间的各种过程,我们首先讨论元激发的基本性质以及通常所取的近似。为了叙述方便,限于无自旋的相互作用费密系统。

在二次量子化表象中,总能量算子(取 $\hbar = 1$) 为

$$H = \sum_k \frac{k^2}{2m} c_k^\dagger c_k + \frac{1}{2} \sum_q V_q \left(\rho_q^\dagger \rho_q - \sum_{k'} c_{k'}^\dagger c_{k'} \right), \quad (2.1)$$

$$V_q = \frac{8\pi^3}{V} \int d\mathbf{R} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}} V(\mathbf{R}), \quad \rho_q = \sum_k c_{k+q}^\dagger c_k.$$

这里 c_k 是 $\mathbf{k}$ 动量粒子消灭算子, $\mathbf{R}, \mathbf{q}$ 表示三维矢量,在不涉及内积的情况,我们也常将下面横道省略,如 c_k 而不写成 $c_{\mathbf{k}}$ 。如果只涉及粒子数守恒过程,可以只看 $f_q(k) = c_{k+q}^\dagger c_k$ 的运动方程:

$$-i \frac{\partial}{\partial t} f_q(k) = \frac{q^2 + 2\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}{2m} f_q(k) + \frac{1}{2} \sum_{q'} V_{q'} \{ (c_{k-q'+q} \rho_{q'} + \rho_{q'}^\dagger c_{k+q+q'}) c_k - c_{k+q}^\dagger (c_{k+q'} \rho_{q'}^\dagger + \rho_{q'} c_{k-q'}) \}. \quad (2.2)$$

取线性近似¹⁾,即所有 $c_{k+q}^\dagger c_k (q \neq 0)$ 及 $c_k^\dagger c_k - n_k$ (n_k 是粒子分布函数)都是一级小量,则

$$-i \frac{\partial}{\partial t} f_q(k) = \tilde{\omega}_q(k) f_q(k) + V_q (n_k - n_{k-q}) \rho_q - (n_k - n_{k+q}) \sum_{q'} V_{q'} f_q(k + q'), \quad (2.3)$$

其中

$$\tilde{\omega}_q(k) = \frac{q^2 + 2\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}{2m} - \frac{1}{2} \sum_{q'} V_{q'} (n_{k+q+q'} + n_{k+q-q'} - n_{k+q'} - n_{k-q'}).$$

(2.3) 式相当于动量为 $\mathbf{q}$ 的准玻色子在动量空间 ($\mathbf{k}$) 的运动方程,或者简写成

$$-i \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{f}_q = \mathcal{L} \cdot \mathbf{f}_q. \quad (2.3)'$$

$\mathbf{f}_q$ 的分量为 $f_q(k)$ 。若 $\mathcal{L}$ 算子的本征矢 $\mathbf{g}_q$, 则变到座标表象,

$$g_q(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} g_q(k) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}},$$

1) 线性近似只能讨论正常态附近的性质,相当于取部分 Feymann 图求和的结果。

则有

$$\begin{aligned} \omega_q g_q(\mathbf{r}) = & \tilde{\omega}_q \left(i \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) g_q(\mathbf{r}) + \delta(\mathbf{r}) \int V_q V N_q(\mathbf{r}') g_q(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \\ & - \int N_q(\mathbf{r} - \mathbf{r}') V(\mathbf{r}') g_q(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \end{aligned} \quad (2.4)$$

其中

$$N_q(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} (n_k - n_{k-q}) d\mathbf{k},$$

$V(\mathbf{r})$ 即粒子间相互作用势。(2.4) 式与一般单粒子在有形势场中运动的薛定谔方程很类似, 其解(构成完备组)有两类。一类是散射态, 即虽然有散射势, 在远处仍接近平面波解,

$$g_q \sim c_{k+q}^+ c_k.$$

所以基本上是粒子空穴对, 能谱是连续的, 近似等于 $\tilde{\omega}_q(k)$ 。另一类是束缚态解, 相应波函数由大量平面波叠加而成, 在坐标空间比较局域, 能量一般在散射态之下。这就是我们关心的集体激发。

准确解线性方程(2.4)当然是困难的, 通常是将其右方最后一项忽略, 称为无规相位近似, 得到一般零声色散率为

$$-V_q \sum_k \frac{n_{k-q} - n_k}{\omega_q - \tilde{\omega}_q(k)} = 1. \quad (2.5)$$

零声是被确证的, 因此在讨论弛豫过程时, 我们也取无规相位近似解作为元激发, 而将(2.4)式右方最后一项考虑为元激发间的转换。

如果只涉及粒子数守恒过程, 元激发只有两类。集体激发:

$$B_q = K_q \sum_k \frac{c_{k+q}^+ c_k}{\omega_q - \tilde{\omega}_q(k)}, \quad (2.6)$$

ω_q 即声子谱。另一类是准粒子空穴对:

$$A_{q,k} = c_{k+q}^+ c_k / a_{q,k}.$$

在线性近似下都满足玻色交换关系

$$[B_q, B_{q'}^+] = \delta_{q,q'}, \quad [A_{q,k}, A_{q,k'}^+] = \delta_{k,k'}. \quad (2.6)'$$

从而得到

$$K_q^{-2} = \sum_k \frac{n_k - n_{k+q}}{\omega_q - \tilde{\omega}_q(k)}, \quad (2.7)$$

$$a_{q,k}^2 = n_k - n_{k-q}. \quad (2.7)'$$

整个体系可看成由 $B_q, A_{q,k}$ 等玻色子所组成, 所忽略的(2.4)式最后一项引起 B, A 间的转换, 而非线性项引起更复杂的过程。

任何力学量算子都可以近似用元激发表示出来。例如

$$\begin{aligned} J_q &= \sum_k \left(k + \frac{q}{2} \right) c_{k+q}^+ c_k \\ &= \sum_{k'} (d_{q,k'} A_{q,k'}^+ + d'_{q,k'} A_{-q,k'}) + dB_q^+ + d'B_{-q}, \end{aligned}$$

则

$$d' = [B_q^+, J_q], \quad d = [B_{-q}, J_q]. \quad (2.8)$$

一般 $d_{q,k'}$, $d'_{q,k'}$ 不再计算, 因为它们与 $k + \frac{q}{2}$ 的差别为 $(1/V)$ 量级, 取热力学极限后为零.

三

先简略分析一下线性马尔科夫过程与非指数渐近行为的关系. 取简单情况,

$$\frac{d}{dt} \mathbf{f} = -\mathbf{A} \cdot \mathbf{f}, \quad (3.1)$$

$\mathbf{f}$ 是希伯特空间 $\mathcal{H}$ 中的矢量, 描写体系的状态, $\mathbf{A}$ 为非负实矩阵: $\mathbf{g} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{g} \geq 0$. (3.2) $\forall \mathbf{g} \in \mathcal{H}$. 根据体系趋向平衡的要求, (3.2) 式等号只在 $\mathbf{g}$ 是平衡态 $\mathbf{f}_0$ (唯一的) 时才成立.

若 $\mathcal{H}$ 是有限维, $\mathbf{A}$ 只有有限个分立本征值: $a_0 = 0, a_1, a_2, \dots, a_n (a_{n+1} \geq a_n)$. 因此所有非平衡态至少以 $\exp(-a_1 t)$ 形式趋向平衡.

但当 $\mathcal{H}$ 是无限维时, 就有可能出现非指数衰减行为. 有两种情况是通常遇到的.

1) 当 $\mathbf{A}$ 有一支连续谱以零为极限点. 则这部分子空间所贡献的关联函数长时间行为渐近于

$$\tilde{\phi}(t) \sim \sum_{\alpha} f(\alpha) \exp(-\lambda_{\alpha} t),$$

λ_{α} 为本征值, α 连续变化. 例如存在空间平移不变 $\alpha = \{s, q\}$, $\lambda_{s,q} \xrightarrow{q \rightarrow 0} 0$, 所以 $\lambda_{s,q} \simeq \gamma_s q^2$. 当 t 充分大, $f(s, q)$ 在 $q \sim 0$ 附近解析, 则

$$\tilde{\phi}(t) \sim \sum_q \exp(-\gamma_s q^2 t) \sim \left(\frac{1}{\gamma_s t}\right)^{\frac{d}{2}}. \quad (3.3)$$

这就是本文所要讨论的行为. 因此, 以下我们将主要关心并分出低频波, 并将其贡献叠加起来.

2) 与某个有限维非线性过程相联系. 例如一维运动

$$\frac{d}{dt} f = -\frac{3}{2} f^{5/3} \quad (3.4)$$

的解为 $f(t) = (t - t_0 + f(t_0)^{-\frac{2}{3}})^{-\frac{3}{2}}$.

当 t 充分大 $f(t) \sim t^{-\frac{3}{2}}$. 如果令

$\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n, \dots)$, $f_1 = f$, $f_2 = f^{\frac{5}{3}}$, $f_3 = f^{\frac{7}{3}}$, $\dots$, 则由 (3.4) 式得到无限元线性方程组

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{f} &= -\mathbf{A} \cdot \mathbf{f}, \\ \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & 0 \dots \\ & & & \dots & \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

因此,在我们的讨论中,非线性效应(模模耦合)也是需要仔细分析的.

在平衡态附近, Kubo 等^[1,8]给出了描述各种过程(涨落关联或输运过程)的一般表达式. 由于它不仅与表象选择无关,而且不依赖于体系服从经典还是量子统计,因而特别适于作为我们讨论的出发点. 根据 Kubo 公式,我们应该区分以下几种不同的过程.

1) 自关联过程(或相应的自扩散过程) 这只在经典系统中,即能分辨出某一粒子(或一个布朗粒子),观察它在其它粒子作用下的运动. 例如速度涨落关联:

$$c_i(t) = \langle v_i(t) v_i(0) \rangle, \quad (3.6)$$

用数字 1 标志此粒子. 与之联系的自扩散系数

$$D_i \sim \int_0^\infty \langle v_i(t) v_i(0) \rangle dt, \quad (3.6)'$$

Alder 等计算机模拟的就是(3.6)式.

2) 输运过程(在均匀外力下)及有关的关联函数 例如,在外加交变电场作用下,可测带电粒子系的电导率

$$\sigma \sim \frac{1}{V} \int_0^\infty \langle J(t), J(0) \rangle e^{-i\omega t} dt, \quad (3.7)$$

其中 J 是总粒子流算子: $J = \sum_i v_i$. (3.7) 式中除了包括粒子自关联外,还包括各粒子速度的相互关联

$$\sigma \sim \frac{1}{V} \sum_{i,j} \int_0^\infty \langle v_i(t) v_j(0) \rangle e^{-i\omega t} dt. \quad (3.8)$$

如果不同粒子速度关联很小基本上都是独立无规地运动,则

$$\sigma \sim \frac{1}{V} \sum_i \int_0^\infty \langle v_i(t) v_i(0) \rangle e^{-i\omega t} dt. \quad (3.8)'$$

这就是等离子体理论中通常使用的试探粒子方法^[9].

3) 局部强度量的涨落关联(相应于非常局域外力作用下的行为) 即 $\langle A(\mathbf{r}, t), B(\mathbf{r}, 0) \rangle$, 其中 A, B 都是上处的力学量(强度量,例如粒子流强度 $J(\mathbf{r}) = \sum_i v_i \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r})$). 如果作空间傅氏展开

$$A_q(t) = \int e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} A(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r},$$

$$\text{则} \quad \frac{1}{V} \int d\mathbf{r} \langle A(\mathbf{r}, t) B(\mathbf{r}, 0) \rangle \sim \sum_q \langle A_q(t), B_q(0) \rangle. \quad (3.9)$$

在一般流体中,如果只考虑粒子运动(除相互之间有散射作用外,几乎是独立的),以上三种过程差别不大. 但如果考虑低频波的影响时,上述过程却有本质的不同. 以速度关联为例,一个粒子的速度可以分成两部分: $v_i = v_{ii} + v_{iw}$, 其中 v_{ii} 是与热运动相联系的,不同粒子间关联很小, v_{iw} 是 i 粒子参与波运动的速度,因而有

$$v_{iw}(t) = \sum_{q,\lambda} u_{q,\lambda}(\mathbf{r}_i(t), t), \quad (3.10)$$

其中 q 为波矢, λ 标志不同波分支, $u_{q,\lambda}$ 为粒子参与 (q, λ) 波运动速度, $\mathbf{r}_i(t)$ 为 t 时刻 i

粒子的位置.

$$\text{所以} \quad \langle v_{iW}(t) v_{iW}(0) \rangle = \sum_{q,l} \langle u_{q,l}(\mathbf{r}_i(t), t) u_{q,l}(\mathbf{r}_i(0), 0) \rangle$$

并不为零. 应用试探粒子方法于这种情况(如等离子体理论中所经常做的)是值得怀疑的. 局部涨落关联函数与输运过程也有根本的区别, 前者是所有 $\langle J_q(t), J_{-q}(0) \rangle$ 之和, 即不同波长的速度分布都起作用, 而后者是 $\langle J(t), J(0) \rangle$, J 即 $J_{q=0}$ 是零傅氏分量. 从一定意义上讲, 局部涨落关联和自关联比较接近:

$$\sum_{q,l} \langle u_{q,l}(\mathbf{r}, t) u_{q,l}(\mathbf{r}, 0) \rangle \text{ 及 } \sum_{q,l} \langle u_{q,l}(\mathbf{r}_i(t), t) u_{q,l}(\mathbf{r}_i(0), 0) \rangle.$$

具体对认定的一个粒子进行经典统计力学的计算是比较困难的, 我们先在这里对流体自关联作一些比较一般的讨论. 为了简单, 只考虑存在一种耗散波:

$$u_q(\mathbf{r}_i(t), t) = \exp(-\gamma q^2 t) \exp(i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_i(0))) u_q(\mathbf{r}_i(0), 0),$$

$$\text{则} \quad \sum_q \langle u_q(\mathbf{r}_i(t), t) u_q(\mathbf{r}_i(0), 0) \rangle$$

$$\xrightarrow{t \text{ 充分大}} \langle u_0(\mathbf{r}_i(0), 0)^2 \rangle \int_0^\infty q^2 e^{-\gamma q^2 t} dq \cdot \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \exp(iq |\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_i(0)| \cos \theta) \cos \theta d\theta.$$

当粒子间碰撞频率远大于低频波的衰减, 则可用试探粒子的结果: $|\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_i(0)|^2 \sim D_s t$, 代入上式完成对 θ 积分, 得到

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{\pi}}{2} \langle u_0(\mathbf{r}_i(0), 0)^2 \rangle \int_0^\infty q^2 e^{-\gamma q^2 t} J_{\frac{3}{2}}(q\sqrt{D_s t}) \left(\frac{2}{q\sqrt{D_s t}} \right)^{\frac{3}{2}} dq \\ &= \langle u_0^2 \rangle \left(\frac{1}{\gamma t} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\pi} \frac{1}{\beta' (1 + \beta'^2)^{\frac{3}{2}}} P_{\frac{3}{2}}^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \beta'^2}} \right), \end{aligned} \quad (3.11)$$

其中 $\beta' = \sqrt{\frac{D_s}{\gamma}}$. 同样

$$\frac{1}{n^2} \langle J(\mathbf{r}, t) J(\mathbf{r}, 0) \rangle \sim \left(\frac{1}{\gamma t} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{4} \langle u_0^2 \rangle. \quad (3.11)'$$

一般 D_s 与 γ 是同量级的, 取 $\beta' = 1$, 则 (3.11) 式与 (3.11)' 式之比为 $\sqrt{8} : \sqrt{\pi}$. 即在流体情况下, 差一量级为 1 的因子, 我们可以通过计算局部关联得到自关联函数(除以 n^2)的行为.

另一种与流体情况相反的是自由程很长, 碰撞项可以忽略(由符拉索夫方程描述), 此时

$$\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_i(0)) = \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_i t.$$

但这时波的衰减由朗道阻尼引起, 以后的讨论表明, 这种情况不出现负幂行为.

因此, 在以下讨论中, 我们将着重分析局部关联及输运过程:

$$\frac{1}{V} \int d\mathbf{r} \langle J(\mathbf{r}, t) J(\mathbf{r}, 0) \rangle,$$

$$\frac{1}{V} \int d\mathbf{r}, d\mathbf{r}' \langle J(\mathbf{r}, t) J(\mathbf{r}', t) \rangle.$$

四

我们要讨论的是平衡态上的关联函数:

$$\phi_{B,A}(t) = \text{Tr} \rho_0 B(t) A. \quad (4.1)$$

平衡态 (ρ_0) 附近的元激发(已解出)为

单粒子型: $c_{k,\alpha}^+, c_{k,\alpha}$;

集体激发(波): $B_{q,s}^+, B_{q,s}$,

s 和 α 都表示不同分支. 体系能量算子

$$H = H_0 + H_1, \quad (4.2)$$

H_0 是元激发的自由能量算子

$$H_0 = \sum_{k,\alpha} \varepsilon_{k,\alpha} c_{k,\alpha}^+ c_{k,\alpha} + \sum_{q,s} \omega_{q,s} B_{q,s}^+ B_{q,s}, \quad (4.3)$$

而剩余相互作用

$$\begin{aligned} H_1 = & \sum_{q,s,s'} V_q(s, s') B_{q,s}^+ B_{q,s'} + \sum_{\substack{q,k \\ s,\alpha,\alpha'}} (V_{k,q}(s, \alpha, \alpha') c_{k+q,\alpha}^+ \\ & \times c_{k\alpha'} B_{q,s} + c.c.) + \sum_{\substack{k_1, k_2, q \\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4}} (V_{k_1, k_2, q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \\ & \times c_{k_1+q, \alpha_1}^+ c_{k_1, \alpha_2} c_{k_2, \alpha_3}^+ c_{k_2+q, \alpha_4} + c.c.), \end{aligned} \quad (4.4)$$

$c.c.$ 表示共轭项. (4.4) 式各项分别表示波-波转换, 波与粒子散射及粒子-粒子间散射, 耦合系数可以由各种方法求出. 如果元激发处理得好, 相互作用是很弱的 (用小参数 λ 标志), 它只引起散射, 从而导致弛豫过程. 因而在讨论中取弱耦合极限¹⁾: $t \rightarrow \infty$, $\lambda \rightarrow 0$, $\lambda^2 t$ 有限. 关联函数 (4.1) 式略改写为

$$\phi_{B,A}(t) = \text{Tr} B(t) (A \rho_0 \rho_{00}^{-1}) \rho_{00} = \text{Tr} B(t) \hat{A} \rho_{00}, \quad (4.5)$$

$$\hat{A} = A e^{-\beta H} e^{-\beta H_0} = A \left\{ 1 - \int_0^\beta H_1(i\lambda_1) d\lambda_1 + \cdots \right\},$$

$$H_1(-i\lambda_1) = e^{-\lambda_1 L_0} H_1, \quad \rho_{00} = e^{-\beta H_0} / \text{Tr} e^{-\beta H_0},$$

L_0 是自由刘维算子. 计算 (4.5) 式需要将 $B, \hat{A}$ 用元激发算子 $c_{k,\alpha}, B_{q,s}$ 的乘积展开. 对于一些简单系统, $B_{q,s}$ 的具体表达式可以写出来, 则可以像前节中所作, 利用交换关系得到展开系数. 但是在很多情况下这是不能做到的 (例如波只能由宏观或经典方程求出), 本节将发展一个一般的展开方法.

考虑由 $c_{k,\alpha}^+, c_{k,\alpha}, B_{q,s}^+, B_{q,s}$ 所构成的 c^* 代数 $\mathcal{R}^{[10]}$. 其上“态”(定义为 $\mathcal{R}$ 上的线性泛函) 的全体构成集合 $\{\sigma\}$. 平衡态(正则系综)为 $\{\sigma\}$ 中的一个态 $\beta: (\beta, A) = \text{Tr} e^{-\beta H_0} A / \text{Tr} e^{-\beta H_0}, A \in \mathcal{R}$. 根据 c^* 代数的基本理论, 可以由 β 态出发, 建立 $\mathcal{R}$ 的一个表示 $(G, N, S$ 构造) 空间 $\mathcal{H}_\beta$ (希伯特空间). 在我们的情况下由于

$$\gamma_\beta = \{K \in \mathcal{R} \mid (\beta, RK) = 0, \forall R \in \mathcal{R}\} = \{\phi\},$$

$\mathcal{R}$ 直接形成 $\mathcal{H}_\beta$ 的 Pn-Hilbert 空间 $\mathcal{H}_\beta^P$, 其中加法, 数乘运算不变, 内积定义

1) 取弱耦合极限只是为了讨论方便, 形式上推广到 λ 有限的情况是不困难的.

$$(R, S) = (\beta, R^+ S) = \text{Tr} R^+ S \rho_{00}^0, \quad (4.6)$$

$$R, S \in \mathcal{R}$$

则在 $\mathcal{H}_\beta$ 中长度定义为 $|R|^2 = (R, R)$, $R \in \mathcal{R}$. $\mathcal{H}_\beta$ 完备化(在此距离定义下)即得 $\mathcal{H}_\beta$.

刘维算子作用在 $\mathcal{R}$ 上, 因此它也是 $\mathcal{H}_\beta$ 中的算子. 由

$$\begin{aligned} (R, L_0 S) &= \text{Tr} R^+ L_0 S e^{-\beta H_0} = \text{Tr} e^{-\beta H_0} R^+ H_0 S - \text{Tr} e^{-\beta H_0} R^+ S H_0 \\ &= \text{Tr} e^{-\beta H_0} (R^+ H_0 - H_0 R^+) S = (L_0 R, S). \end{aligned}$$

即 L_0 是厄米算子. 由证明过程中可看到完全的刘维算子 L 在 $\mathcal{H}_\beta$ 上不是厄米的(厄米性与内积定义有关). 根据泛函分析的基本定理, L_0 在 $\mathcal{H}_\beta$ 中的本征矢 $\{\phi_m\}$:

$$L_0 \phi_m = \mathcal{E}_m \phi_m$$

构成正交完备组(简并情况下可用 Schmidt 正交化手续): $(\phi_m, \phi_{m'}) = \delta_{m, m'}$.

显然, ϕ_m 是由 $c_{k, \alpha}$, $c_{k, \alpha}^+$, $B_{q, s}$, $B_{q, s}^+$ 的乘积组成, 我们只对最简单的几类有兴趣:

$$1) L_0 c_{k, \alpha} = -\varepsilon_{k, \alpha} c_{k, \alpha}, \text{ 由 } \text{Tr} \rho_{00} c_{k, \alpha}^+ c_{k, \alpha} = n_{k, \alpha}$$

$$\text{所以 } \phi_{k, \alpha} = n_{k, \alpha}^{-\frac{1}{2}} c_{k, \alpha}.$$

$$2) L_0 c_{k, \alpha}^+ = \varepsilon_{k, \alpha} c_{k, \alpha}^+, \text{ 而 } \text{Tr} \rho_{00} c_{k, \alpha}^+ c_{k, \alpha} = 1 - n_{k, \alpha}$$

$$\text{所以 } \phi_{k, \alpha}^+ = (1 - n_{k, \alpha})^{-\frac{1}{2}} c_{k, \alpha}^+.$$

根据我们内积的定义, $c_{k, \alpha}^+$ 与 $c_{k, \alpha}$ 的长度是不同的.

$$3) L_0 B_{q, s} = -\omega_{q, s} B_{q, s}, \quad \phi_{q, s} = n_{q, s}^{-\frac{1}{2}} B_{q, s}$$

$$L_0 B_{q, s}^+ = \omega_{q, s} B_{q, s}^+, \quad \phi_{q, s}^+ = (1 + n_{q, s})^{-\frac{1}{2}} B_{q, s}^+.$$

$$4) L_0 c_{k, \alpha}^+ c_{k', \alpha'}^+ = (\varepsilon_{k, \alpha} + \varepsilon_{k', \alpha'}) c_{k, \alpha}^+ c_{k', \alpha'}^+$$

$$\begin{aligned} \phi_{k, \alpha}^+ c_{k', \alpha'}^+ &= (1 - n_{k, \alpha})^{-\frac{1}{2}} (1 - n_{k', \alpha'})^{-\frac{1}{2}} c_{k, \alpha}^+ c_{k', \alpha'}^+ \text{ 当 } c_{k, \alpha}^+ \neq c_{k', \alpha'}^+ \\ &= [\text{Tr} \rho_{00} (c_{k, \alpha} c_{k, \alpha}^+ c_{k', \alpha}^+ c_{k', \alpha}^-)]^{-\frac{1}{2}} c_{k, \alpha}^+ c_{k', \alpha}^+ \text{ 当 } c_{k, \alpha}^+ = c_{k', \alpha'}^+. \end{aligned}$$

$$\text{同样, } \phi_{q, s}^+ c_{q', s'}^+ = [\text{Tr} \rho_{00} B_{q', s'} B_{q, s}^+ B_{q, s}^+ B_{q', s'}^-]^{-\frac{1}{2}} B_{q, s}^+ B_{q', s'}^+.$$

5) L_0 的零本征矢很多, 如 $c_{k, \alpha}^+ c_{k, \alpha}$, $B_{q, s}^+ B_{q, s}$, $c_{k, \alpha}^+ B_{q, s}^+ B_{q, s} c_{k, \alpha}$ 等等. 用 Schmidt 手续将它们正交化. 如

$$\begin{aligned} \phi_{d, k, \alpha} &= (c_{k, \alpha}^+ c_{k, \alpha} - n_{k, \alpha}) / [\text{Tr} \rho_{00} (c_{k, \alpha}^+ c_{k, \alpha})^2 - n_{k, \alpha}^2]^{\frac{1}{2}} \\ \phi_{d, q, s} &= (B_{q, s}^+ B_{q, s} - n_{q, s}) / [\text{Tr} \rho_{00} (B_{q, s}^+ B_{q, s})^2 - n_{q, s}^2]^{\frac{1}{2}}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

6) 由于零本征值多重简并, 则任一本征值也是多重简并的, 如 $c_{k, \alpha}^+$, $c_{k, \alpha}^+ c_{k', \alpha'}^+ c_{k', \alpha'}^-$, $c_{k, \alpha}^+ B_{q, s}^+ B_{q, s}$ 等等. 因此

$$\phi_{k, \alpha, d, k', \alpha'} = N \{ c_{k, \alpha}^+ c_{k', \alpha'}^+ c_{k', \alpha'}^- - (\text{Tr} \rho_{00} c_{k, \alpha}^+ c_{k, \alpha} c_{k', \alpha'}^+ c_{k', \alpha'}^-) c_{k, \alpha}^+ / n_{k, \alpha} \},$$

其中 $N\{\}$ 表示归一化. 同样, $c_{k, \alpha}^+ B_{q, s}^+ B_{q, s}$ 对应

$$\begin{aligned} \phi_{k, \alpha, d, q, s} &= N \{ c_{k, \alpha}^+ B_{q, s}^+ B_{q, s} - (c_{k, \alpha}^+ c_{k, \alpha} B_{q, s}^+ B_{q, s}) c_{k, \alpha}^+ / n_{k, \alpha} \\ &\quad - \sum_{k', \alpha'} (\phi_{k, \alpha}^+, c_{k', \alpha'}^+ c_{k', \alpha'}^- B_{q, s}^+ B_{q, s}) \phi_{k, \alpha}^+, c_{k', \alpha'}^+, c_{k', \alpha'}^- \}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

1) 以下书写简便将 ρ_{00} 都写成 $e^{-\beta H_0}$.

由于主要是低阶展开,经常使用的是 $\phi_{q,s}, \phi_{d,q,s}, \phi_{k+q,s^+}, \phi_{k',s^+}$ 等。

由于 $\{\phi_m\}$ 是完备的, $\mathcal{H}_\beta$ 中的任一矢量(即 $\mathcal{H}$ 中的任一算子)都可以用 $\{\phi_m\}$ 展开:

$$R = \sum_m (\phi_m, R) \phi_m, \quad (4.7)$$

$$(\phi_m, R) = \text{Tr} \rho_{00} \phi_m^\dagger R. \quad (4.8)$$

一般说来,体系的任意一个力学量算子是不属于 $\mathcal{H}$ 的,因为它们的定义域远大于 β 平衡态附近的区域。但是,如果它们作用到一个状态上只引起有限个粒子状态变动(热流算子,粒子流算子都是单(或双)粒子型算子),而讨论的又是弱激发过程,即只有有限个算子作用到平衡态上,则可以认为它们都属于 $\mathcal{H}$,在讨论中按(4.7)式展开。其实,(4.7)式也就是在元激发二次量子化表象中将一般算子表示出来,只不过用了本征展开的形式。展开系数(4.8)式是 $\phi_m^\dagger R$ 的热力学平均值,在很多情况下,往往可以根据其意义用其它方法近似求出,避免繁杂的微观计算。

将(4.7)式用于计算关联函数(4.5)式,

$$\psi_{BA}(t) = (\beta, B e^{-iLt} \hat{A}) = \sum_{mm'} (\phi_m', \hat{A}) (B, \phi_m) (\phi_m e^{-iLt} \phi_m'), \quad (4.9)$$

取 $B = J_{-q}, A = J_q$, 在弱耦合极限下

$$\begin{aligned} \psi_{J_q}(t) = & \sum_k |(\phi_{k+q^+}, J_q)|^2 (\phi_{k+q^+}, e^{-iLt} \phi_{k+q^+}, k) \\ & + \sum_{s,s'} (\phi_{q,s'}, J_q) (J_q, \phi_{q,s}) (\phi_{q,s} e^{-iLt} \phi_{q,s'}). \end{aligned} \quad (4.10)$$

(4.10)式还应包括粒子空穴对的散射过程(指 $(\phi_{k'+q^+}, k', e^{-iLt} \phi_{k+q^+}, k)$)以及粒子与波的过程 $((\phi_{k+q^+}, k, e^{-iLt} \phi_{q,s}))$ 等,但它们都至少与 λ 成比例,是可以忽略的(弱耦合)。(4.10)式中右方第二项是波对弛豫过程的贡献,由于考虑到可能有几支波是简并的,不同波的交叉项仍然保存。如果 $(\phi_{q,s}, e^{iLt} \phi_{q,s'}) \sim e^{-\gamma q^2 t}$, 则 $\frac{1}{V} \int d\mathbf{r} \text{Tr} J(\mathbf{r}, t) J(\mathbf{r}, 0) \rho_0$ 出现 $t^{-\frac{d}{2}}$ 的渐近行为。显然此项大小主要由 $|(J_q, B_{q,s})|^2$ 决定。

如果 A, B 都是 J (体系总力学量),由于空间平移不变, $(J_0, B_{q,s}) = 0, q \neq 0$ 。我们感兴趣的部分是

$$\langle J_0(t) J_0 \rangle_W = \sum_{\substack{q, q_1 \\ s, s', s_1, s_1'}} (J, \phi_{q,s^+}, q, s') (\phi_{q_1, s_1^+}, q_1, s_1' J) (\phi_{q_1, s_1^+}, q_1, s_1' e^{-iLt} \phi_{q, s^+}, q, s'). \quad (4.11)$$

它与模模耦合理论的结果是一致的。

五

一般讨论关联函数 $\psi_{BA}(t)$ 的时间行为是比较困难的,关键在于需要将 $e^{i(L_0 + L_1)t}$ 对 L_1 展开。通常的多体理论往往是选择部分无穷项求和,但选择的标准往往不是很确切的,求和的计算也很困难,在大多数情况下往往只能得到一个输运型方程。经验表明,采用投影算子方法^[11]有可能使微扰项选择及求和步骤大大简化,特别是与刘维算子预解式

$$i \int_0^{\infty} e^{iZt} e^{-iLt} dt = \frac{1}{Z - L} = \mathcal{R}(Z) \quad \text{Im} Z > 0 \quad (5.1)$$

的微扰展开相结合. 应用预解式, 关联函数表示为

$$\phi_{BA}(t) = \int_c dZ \text{Tr} B \mathcal{R}(Z) \hat{A} \rho_{00} e^{-iZt}. \quad (5.2)$$

积分回路 c 表示于图 1 中. 长时间渐近行为主要由 $\mathcal{R}(Z)$ 在 $Z = 0$ 附近的奇异性决定.

为了叙述方便, 先讨论一种最简单的情况, 即只有一种波(无规相位近似下) B_q , A , B 都是 J_q 或类似算子, H_1 是线性近似 (2.4) 式最后一项引出, 因此它只包括

$B_q^+ \longleftrightarrow c_{k+q}^+ c_k$ 及 $c_{k+q}^+ c_k \longleftrightarrow c_{k'+q}^+ c_{k'}$ 两种基本过程. 各微扰项相应结构如图 2 所示. 引入投影算子

$$P_q A = (\phi_q, A) \phi_q \quad (5.3)$$

(也可以取 ϕ_{q+}), 将整个 $\mathcal{H}$ 投影到一维空间 B_q 上, 从而分出 $B_q(B_q^+)$ 对关联函数的

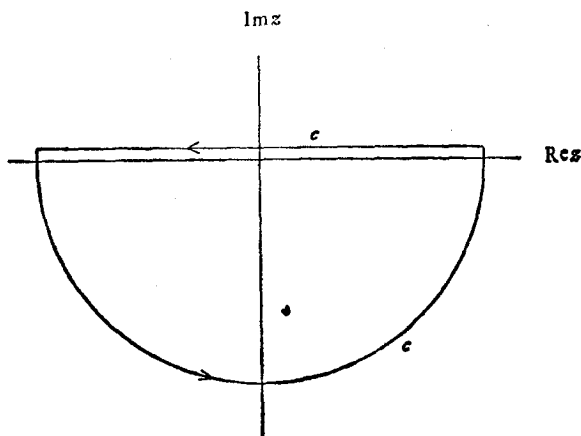


图 1

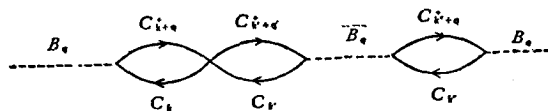


图 2

贡献. $Q_q = 1 - P_q$ 也是投影算子¹⁾. 采用矩阵式的写法

$$L = \begin{pmatrix} PLP & PLQ \\ QLP & QLQ \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

PLQ , QLP 都是波与粒子空穴对的转化 (因为只有一种波, 动量又必须守恒), 因而是 L_1 中的一部分, 正比于 λ , PLP 是波量子的能量 (ω_q), QLQ 中包括粒子能量以及粒子间的散射 (当然也包含其它 $q' \neq q$ 的波, 但在我们讨论中它们不与 AB 耦合, 可以不考虑). 将 (4.4) 式代入 $\mathcal{R}(Z)$ 所满足的方程后, 得到

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(Z) &= \begin{pmatrix} P\mathcal{R}P & P\mathcal{R}Q \\ Q\mathcal{R}P & Q\mathcal{R}Q \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{Z - PLP - \phi(Z)} & \frac{1}{Z - PLP - \phi(Z)} c(Z) \\ D(Z) \frac{1}{Z - PLP - \phi(Z)} & D(Z) \frac{1}{Z - PLP - \phi(Z)} c(Z) + \frac{1}{Z - QLQ} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

1) 以下为书写简单, 除特殊说明外, 将 P_q , Q_q 写成 P, Q .

其中散射算子

$$\phi(Z) = PLQ \frac{1}{Z - QLQ} QLP, \quad (5.6)$$

广义顶角算子

$$c(Z) = PLQ \frac{1}{Z - QLQ}, \quad D(Z) = \frac{1}{Z - QLQ} QLP. \quad (5.7)$$

分析(5.5)式,我们首先要强调指出,计算的目的是关联函数中非指数衰减的主要部分.也就是要将 $(B, \mathcal{R}(Z)\hat{A})$ 中那些与 $Z=0$ 的距离随 $q \rightarrow 0$ 而趋于零的极点的贡献分出来.所有那些不随 $q \rightarrow 0$ 而逼近零的极点,或者一些割线(在完成对 Z 的积分后也贡献指数衰减部分)部分,都认为以前的输运理论已处理过(至少主要部分已计算了),不必在此考虑.

先看 $P\mathcal{R}(Z)P = \frac{1}{Z - \omega_q - \phi(Z)}$ 部分,其中

$$\phi(Z) = PLQ \frac{\mathcal{P}}{Z - QLQ} QLP + i\pi PLQ \delta(Z - QLQ) QLP, \quad (5.8)$$

$\phi(Z)$ 出现虚部是由于 $c_{k+q}^+ c_k$ 的谱 $\tilde{\omega}_q(k)$ 是连续的. $\text{Im}\phi$ 对应于波的耗散,或者称为 q 波的宽度(由于 ϕ 只作用在 B_q 上,它已是一个数).弱耦合取到 λ^2 , QLQ 应取成 QL_0Q ,这就是标准二阶微扰线宽. $\mathcal{P}$ 是积分主值记号, $\text{Re}\phi$ 是对 ω_q 的修正,可以认为

已包含在 ω_q 中不用再考虑了.根据 $\text{Im}\phi$ 的含义,在很多情况下(特别当涉及宏观波)可以不由微观角度而用唯象或半唯象方法得到的波的宽度代替之,例如流体波可解 Navier-Stokes 方程.不过要注意的是, $\text{Im}\phi$ 仅由粒子中间态产生.如果出现耗散波,

$\phi \sim q^2$, 因此 $P\mathcal{R}(Z)P$ 的极点

$$Z - \omega_q - \phi(Z) = 0,$$

$$Z \sim \omega_q + \phi(\omega_q)$$

正是我们所需要的. $\phi(Z)$ 还具有($\lambda \rightarrow 0$ 时)逼近零的割线,因为其中间态都是粒子空穴对,所有粒子空穴都具有有限的寿命.虽然在完成对 Z 的积分时也应该考虑此种割线(l)的贡献,如图3所示.

虽然在完成对 Z 的积分时也应该考虑此种割线(l)的贡献,如图3所示.

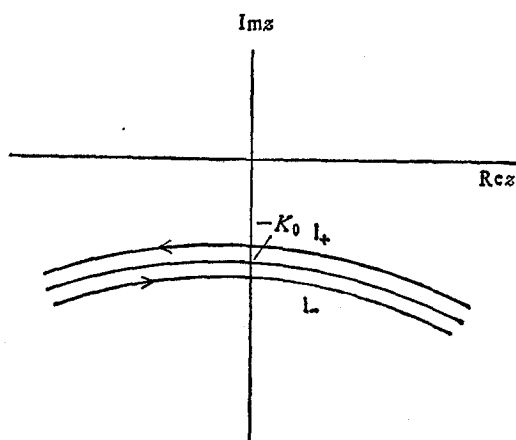


图 3

$$\int_{l-} + \int_{l+} \frac{e^{-iZt}}{Z - PLP - \phi(Z)} dZ \sim \int_l \frac{2i\text{Im}\phi(Z)}{(Z - \omega_q)^2 + \text{Im}\phi(Z)^2} e^{-iZt} dZ. \quad (5.9)$$

在 l 上, $\text{Im}Z \geq K_0$,因此积分至少包含一指数衰减因子 $e^{-K_0 t}$.这种项是不用考虑的.

在 $\mathcal{R}(Z)$ 其它部分中,所有 $1/(Z - QLQ)$ 所引起的奇异性都不用考虑.因为在不和其它 $q'(\neq q)$ 波耦合情况下, QLQ 只引出粒子空穴谱及其宽度,它们只贡献指数衰减行为.还需要讨论的极点仍是

$$D(Z) \frac{1}{Z - PLP - \phi(Z)}; \quad \frac{1}{Z - PLP - \phi(Z)} c(Z); \quad D(Z) \frac{1}{Z - PLP - \phi(Z)} c(Z) \quad (5.10)$$

中的 $\omega_q + \phi(\omega_q)$. 但 $c(Z)$, $D(Z)$ 都至少正比于 λ , 虽然能与 J_q 耦合的 $c_{k+q}^+ c_k$ 充分多(不同 k), 但 B_q 与 J_q 的耦合与所有粒子空穴对的总耦合是可以比较的(见费密系统计算结果), (5.10) 式中各项在弱耦合极限下, 相比于 $P\mathcal{R}(Z)P$ 项可以忽略. 因此, $(J_q, \mathcal{R}(Z)J_q)$ 中非指数衰减的主要部分为

$$(J_q, \mathcal{R}(Z)J_q)_{\text{nonexp}} \sim (J_q P\mathcal{R}(Z)PJ_q) = \frac{|(J_q, B_q)|^2}{(B_q, B_q)} \frac{1}{Z - \omega_q - \phi(\omega_q)}, \quad (5.11)$$

从而得到 $\phi_L(t)_{\text{nonexp}} = \frac{1}{V} \int d\mathbf{r} (J(\mathbf{r}, t), J(\mathbf{r}, 0))$

$$\underset{\text{弱耦合}}{\sim} \frac{1}{V^2} \sum_q \frac{|(J_q, B_q)|^2}{(B_q, B_q)} \exp(i\omega_q t - |\text{Im}\phi(\omega_q)|t) \quad (5.12)$$

+ 对应 B_q^+ 项.

一般 $\text{Im}\phi(\omega_q) \sim \gamma q^2 + o(q^4)$, t 充分大时, 则

$$\begin{aligned} \phi_L(t)_{\text{nonexp}} \sim & \frac{1}{V^2} \frac{|(J_q, B_q)|^2}{(B_q, B_q)} \Big|_{q \rightarrow 0} \sum_q \exp(i\omega_q t - \gamma q^2 t) \\ & + \frac{1}{V^2} \frac{|(\sigma_q, B_q^+)|^2}{(B_q^+, B_q^+)} \Big|_{q \rightarrow 0} \sum_q \exp(-i\omega_q t - \gamma q^2 t). \end{aligned} \quad (5.13)$$

如果体系中存在几支波¹⁾: $B_{q,s}$ ($s = 1, 2, \dots, m$), 则投影算子 P_q 定义为将 $\mathcal{H}_\beta$ 投到由 $B_{q,1}, \dots, B_{q,m}$ 所张的子空间上

$$PA = \begin{pmatrix} (B_{q,1}, A) B_{q,1} / (B_{q,1}, B_{q,1}) \\ \vdots \\ (B_{q,m}, A) B_{q,m} / (B_{q,m}, B_{q,m}) \end{pmatrix} A \in \mathcal{H}_\beta. \quad (5.14)$$

因此 PLP 及 ϕ 都是 $m \times m$ 矩阵. 弱耦合情况, ϕ 矩阵元正比于 λ^2 (H_1 中两个波的转换项包含在 PLP 中, 应该在解波算子时考虑), 当两支波不简并, 对应 ϕ 的非对角元至少正比于 λ^4 , 比之于 ϕ 对角部分 ($\sim \lambda^2$) 可以忽略. 对于简并波, ϕ 非对角元并不能忽略, 但与一般简并微扰做法一样, 可以重新组合简并波算子, 使其表示中 ϕ 不存在相应非对角元(在讨论流体时, 这已包含在解 Navier-Stokes 方程中). 结果是(5.11)式的直接推广:

$$(J_q, \mathcal{R}(Z)J_q)_{\text{nonexp}} = \sum_s \frac{|(J_q, B_{q,s})|^2}{(B_{q,s}, B_{q,s})} \frac{1}{Z - \omega_{q,s} - \phi(\omega_{q,s})}. \quad (5.15)$$

若 $\phi_{BA}(t)$ 中 A, B 算子是 $J(J_0)$ 或类似算子(动量为零), 根据平移不变要求

$$(B_q, J_0) = 0 \quad q \neq 0,$$

J 只能用 $\phi_{q,s,-q,s'}$ 展开(我们仍将 B_q 及 B_q^+ 看成两支波), 对于波, 粒子混合算子如 $B_{q,s} c_{k+q}^+ c_k$ 等, 由于粒子空穴对寿命有限, 我们也不感兴趣. 取

$$PA = \sum_c (\phi_c, A) \phi_c, \quad (5.16)$$

1) 为书写统一, 也可以认为 B_q 及 B_q^+ 为两支波 $B_{q,1}, B_{q,2}$, $\omega_{q,2} = -\omega_{q,1}$.

ϕ_c 是正交化后总动量为零的两个波算子乘积 (如 $\phi_{q,s,-q,s'}$), c 包含波矢 q 及其它脚标. 类似于上面的讨论表明, 在弱耦合情况下, 非指数衰减主要来自

$$\left(J, P \frac{1}{Z - PLP - \phi(Z)} PJ \right). \quad (5.17)$$

只考虑双波过程, 则 $\phi(Z)$ 包含以下几种过程:

- 1) 分别引起每个波的线宽, 如图 4(a) 所示.
- 2) 引起 $B_{q,s}$ 或 $B_{-q,s'}$ 转变为其它波, 如图 4(b) 所示.
- 3) 波对 $B_{q,s} B_{-q,s'}$ 到 $B_{q',s_1} B_{-q',s'_1}$ 的过渡, 如图 4(c) 所示. 显然, 第三种过程最低阶项也正比于 λ^4 , 可以忽略, 适当选择 $B_{q,s}$ (处理好简并波) 第二种过程亦可忽略. 第一种

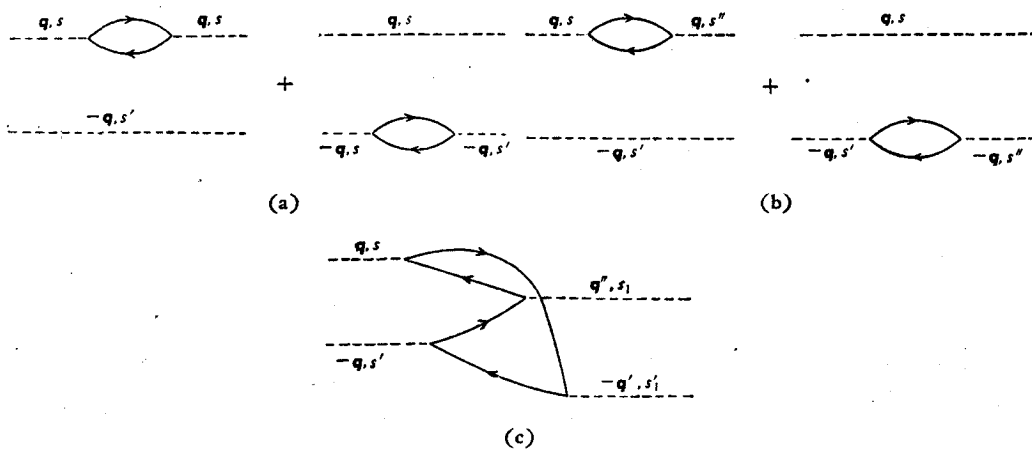


图 4

过程即

$$\phi(B_{q,s} B_{-q,s'}) = (\phi_{q,s} + \phi_{-q,s'}) B_{q,s} B_{-q,s'}$$

其中 $\phi_{q,s}$ 即单波 q, s 的自能修正 (包括宽度). 因此, 得到 (由 $\text{Tr} \rho_{00} J_0 = 0$)

$$\begin{aligned} \left(J, P \frac{1}{Z - PLP - \phi} PJ \right)_{\text{nonexp}} &= \sum_{q,s,s'} \frac{|(J, B_{q,s} B_{-q,s'})|^2}{|B_{q,s} B_{-q,s'} - (B_{q,s}, B_{-q,s'})|^2} \\ &\times \frac{1}{Z - \omega_{q,s} - \omega_{-q,s'} - \phi_{q,s} - \phi_{-q,s'}}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

完成对 Z 的积分 (只取极点贡献), 用到流体情况, 就得到推广了的模耦合理论的结果^[5].

以上整个讨论是在线性近似下 ((2.4) 式), 因此在弱耦合极限下模之间没有耦合, 每支波都是独立的.

六

我们将讨论线性近似所忽略的那部分相互作用的影响, 典型的元过程如图 5(a) 所示. 它可以引出一个波与多个波的耦合, 如图 5(b) 所示. 这种模的非线性耦合至少正比于 λ^4 , 但正如非线性振动理论所经常显示的那样, 这种非线性项并非能随意被忽略的.

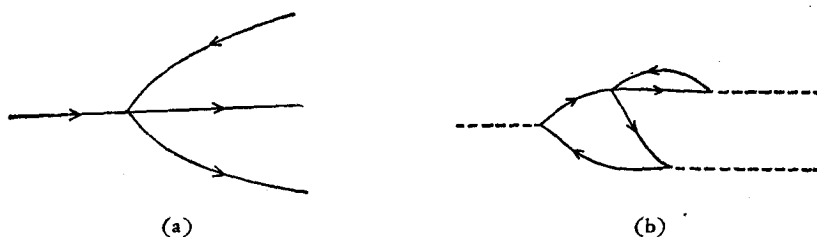


图 5

为了弄清非线性效应对长时间渐近行为的影响,先研究一种简单的非线性过程:

$$\frac{d}{dt} B_{q,s} = \sum_{q',s'} \Theta_{q,q'}(B) B_{q',s'} \quad (6.1)$$

或写成

$$\frac{d}{dt} B = \Theta B.$$

矢量 $B = \{B_{q,s}\}_{\text{所有 } q,s}$, $\Theta = \Theta_0 + \Theta_1 + \Theta_2 + \dots$, 其中脚标 0, 1, 2... 是包含 B 的方次, 因此 Θ_0 即线性算子. 将 (6.1) 式嵌入一线性过程

$$\frac{d}{dt} \mathcal{B} = \Lambda \mathcal{B}, \quad (6.2)$$

其中 $\mathcal{B}$ 的分量分别是 $\{\phi_{q,s}\}, \{\phi_{q,s,q',s'}\}, \dots$, Λ 为线性算子(作用在更大的 $\mathcal{B}$ 空间上). 作拉氏变换

$$Z \mathcal{B}(Z) = \Lambda \mathcal{B}(Z) + \mathcal{B}(t=0). \quad (6.3)$$

引入投影算子 P , 定义为

$$P \mathcal{A} = \sum_{q,s} \frac{(B_{q,s}, \mathcal{A})}{(B_{q,s}, B_{q,s})} B_{q,s}, \quad (6.4)$$

$$1 - P = Q.$$

将 (6.3) 式按 P, Q 分为两部分, 解出 $Q \mathcal{B}$ 代入 $P \mathcal{B}$ 方程得到 $P \mathcal{B}$ 自身所满足的方程

$$\left(Z - PAP - P\Lambda \frac{1}{Z - Q\Lambda Q} Q\Lambda P \right) P \mathcal{B} = \left(P + P\Lambda \frac{1}{Z - Q\Lambda Q} Q \right) \mathcal{B}(t=0), \quad (6.5)$$

其中 $(P\Lambda P \mathcal{B})_{q,s} = (P\Theta_0 \mathcal{B})_{q,s} = (i\omega_{q,s} - \Lambda_{q,s}) B_{q,s}$, $\Lambda_{q,s}$ 即线性近似下 $B_{q,s}$ 的宽度. (6.5) 式可写成

$$\begin{aligned} & (Z - i\omega_{q,s} - \Lambda_{q,s}) B_{q,s} - \sum_{q',s'} \phi \begin{pmatrix} q,s \\ q',s' \end{pmatrix} B_{q',s'} \\ & = B_{q,s}(t=0) + \left(P\Lambda \frac{1}{Z - Q\Lambda Q} \mathcal{B}(t=0) \right)_{q,s}, \end{aligned} \quad (6.6)$$

$$\phi \begin{pmatrix} q,s \\ q',s' \end{pmatrix} = \left(P\Lambda \frac{1}{Z - Q\Lambda Q} Q\Lambda P \right)_{q,s,q',s'}. \quad (6.7)$$

(6.6) 式表明, 由于非线性效应, 在单波过程 ($B_{q,s}$ 的运动方程) 中引入一附加耗散矩阵 $\phi(Z)$. 系统如果是平移不变的, $\phi \begin{pmatrix} q,s \\ q',s' \end{pmatrix}$ 中 $q' = q$, 则可写成 $\phi_{q,s,s'}(Z)$. 类似于前面讨论, 非简并波间的矩阵元可以忽略,

$$\phi_{q,s,s'}(Z) = \left(P\Lambda \frac{1}{Z - Q\Lambda} Q\Lambda P B_{q,s}, B_{q,s} \right) = \left(V'_{q,s} \frac{1}{Z - Q\Lambda Q} V'_{q,s} \right). \quad (6.8)$$

$V'_{q,s} = Q\Lambda B_{q,s}$ 是 $B_{q,s}$ 对应的非线性流。

(6.6) 式做反拉氏变换

$$\frac{d}{dt} B_{q,s} - i\omega_{q,s} B_{q,s} + \Lambda_{q,s} B_{q,s} - \int_{-\infty}^t \phi_{q,s,s}(t-t') B_{q,s}(t') dt' = r(t), \quad (6.9)$$

$r(t)$ 即 (6.6) 式等号右方反拉氏变换的结果, $\phi_{q,s,s}(t) = (V'_{q,s} e^{iQ\Lambda Q t} V'_{q,s})$.

一般说来 $\int_{-\infty}^t \phi_{q,s,s}(t-t') B_{q,s}(t') dt'$ 不能近似取成 $\int_0^{\infty} \phi_{q,s,s}(t') dt' B_{q,s}(t)$, 模耦合引入了非马尔科夫效应。为简单估计, 取

$$V'_{q,s} = \sum_k V_{k,q,s} B_{k+q,s} B_{-k,s}$$

$$\begin{aligned} \text{则} \quad \phi_{q,s,s}(t) &\simeq \sum_k |V_{k,q,s}|^2 (B_{k+q,s} B_{-k,s} B_{k+q,s} B_{-k,s}) \\ &\quad \times \exp[i(\omega_{k+q,s} + \omega_{-k,s})t - (\Lambda_{k+q,s} + \Lambda_{-k,s})t]. \end{aligned} \quad (6.10)$$

若 $B_{q,s}$ 为弛豫模, $\omega_{q,s} = 0$, $\Lambda_{q,s} \simeq \gamma_s q^2$

$$\begin{aligned} \phi_{q,s,s}(t) &\underset{t \gg \tau}{\sim} |V_{q,s}|^2 |B_{q,s}|^4 \int_0^{\infty} dk \exp[-\gamma_s((q+k)^2 + k^2)t] \\ &= \frac{|V_{q,s}|^2 |B_{0,s}|^4}{2} \left(\frac{\pi}{\gamma_s t}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\gamma_s q^2 t}{2}}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

根据定义, $|V_{q,s}|^2 \sim q^2$, 因此, $\phi_{q,s,s}$ 实际是对 $\Lambda_{q,s} = \gamma_s q^2$ 中 γ_s 的一个非马尔科夫型修正。(6.11) 式表明, $\phi_{q,s,s}(t)$ 的贡献(对关联函数), 至少是渐近于 t^{-3} (对 q 求和又引出 $t^{-\frac{3}{2}}$)。所有多波过程都是 λ (耦合) 的高次项, 加之我们感兴趣的只是最慢的衰减项 ($t^{-\frac{3}{2}}$), 因而均可忽略。

多波过程还可以直接表现在对算子的展开中。以 $(J_q(t), \hat{J}_q)$ 为例, 在超出线性近似后, $\hat{J}_q$ 的展开中还有 $B_{q-q',s} B_{q',s'}$ 项, 对应关联函数中有

$$\begin{aligned} &\sum_{q'} \frac{|(J_q, B_{q-q',s} B_{q',s'})|^2}{(B_{q-q',s} B_{q',s'} B_{q-q',s} B_{q',s'})} \exp[i(\omega_{q-q',s} + \omega_{q',s'})t] \\ &\quad \times \exp[-(\gamma_s(q-q')^2 + \gamma_{s'} q'^2)t]. \end{aligned} \quad (6.12)$$

简单计算表明, (6.12) 式渐近于 t^{-3} 行为。

七

利用以上的结果, 我们分析流体中的弛豫过程。流体中的元激发分为两类, 一类是粒子型元激发, 它们的寿命始终是有限的, 因而引起指数衰减行为; 另一类是低频宏观波, 如声波, 热波, 剪波等。低频波的频谱和场算子当然也可以直接由微观运动方程求出, 但是最方便的还是采用宏观途径, 即解 Navier-Stokes 方程的本征解。算子展开系数 (对长波部分) 也可以用热力学关系算出。由于在文献 [7] 中已经给出流体宏观计算方法的详细描述, 这里就只直接写出结果并进行讨论。

先看局部速度涨落关联:

$$\phi_L(t) = \frac{1}{V} \int d\mathbf{r} \langle J(\mathbf{r}, t) J(\mathbf{r}, 0) \rangle = \frac{1}{V^2} \sum_q \langle J_q(t) J_{-q}(0) \rangle, \quad (7.1)$$

$J(\mathbf{r}, t)$ 是在某一方向的粒子流密度。根据 (5.13) 式, J_q 在元激发表象展开的最低阶是 B_{q, ϵ_i} (剪波) 及 $B_{q, \sigma}$ (声波)。但声波不是纯耗散模, 在三维空间引起 $t^{-\frac{1}{2}} e^{-c_0^2 t / \Lambda}$ 行为 (Λ 是热导率), 因而只计算剪波贡献:

$$\phi_L(t)_w \sim \frac{2}{3} \frac{n}{m\beta} \left(\frac{1}{4\pi\gamma t} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (7.2)$$

$\nu = \left(\frac{\eta}{\rho} \right)$, η 是粘滞系数 (应该是由粒子型元激发贡献), $\beta = 1/K_B T$, $\rho = nm$ 。为了估计粒子对 $\phi_L(t)$ 的贡献, 必须考虑到外加扰动 (外力) 及测量都是在 $\mathbf{r}$ 附近很小 (宏观小) 的体积 ΔV 内进行, 观测的是 ΔV 内的平均值。因而

$$\phi_L(t)_c \sim \frac{1}{V} \int d\mathbf{r} \int_{\Delta V} d\mathbf{r}' \langle J(\mathbf{r}, t) J(\mathbf{r}', t) \rangle = \frac{1}{V^2} \sum_q' \langle J_q(t) J_q(0) \rangle, \quad (7.3)$$

$\sum_q'$ 表示对 $\mathbf{q}$ 求和限于 $-\frac{\Delta L^{-1}}{2} < q_x, q_y, q_z < \frac{\Delta L^{-1}}{2}$, $\Delta L^3 = \Delta V$, 取

$$J_q = \frac{1}{m} \sum_k \left(k + \frac{q}{2} \right)_x c_{k+q}^+ c_k$$

及高温近似, 则

$$\phi_L(t)_c \simeq n \langle v_x^2 \rangle \frac{1}{\Delta L^3} e^{-2\Gamma t}, \quad (7.4)$$

Γ 是粒子平均寿命 (平均碰撞时间)。我们取在 ΔV 中平均值并不影响波过程的长时间行为, 因为 t 很大后, 只有很小 q 起作用。取 $t = (2\Gamma)^{-1}$,

$$\begin{aligned} \phi_L \left(\frac{1}{2\Gamma} \right)_w : \phi_L \left(\frac{1}{2\Gamma} \right)_c \\ \sim \left(\frac{\Gamma}{2\pi\gamma} \right)^{\frac{1}{2}} : \frac{1}{\Delta L^3}, \end{aligned} \quad (7.4)'$$

$(\Gamma/2\pi\gamma)^{\frac{1}{2}} \sim q_c$ 可看成波数的长限, 因为 $q > q_c$ 后, 波的寿命与粒子寿命差不多。 $V(\Gamma/2\pi\gamma)^{\frac{1}{2}}$ 是允许的波自由度的总数。同样, ΔL 是宏观观测可分辨的最小距离, 对宏观波来说, 它应该是可以和 q_c^{-1} 相比的。因此, 在衰减初始阶段 ($t = 1/2\Gamma$), $\phi_L(t)$ 的两部分不会差别很大 (例如不会差到几个量级), 在经过几个 $1/2\Gamma$ 后, 非指数衰减部分即起主要作用, 是有可能被观测到的。

与一般扩散或电导相联系的是总速度 $J_0 = \sum_i v_i$ 的关联函数: $\phi_0(t) = \langle J_0(t) J_0 \rangle$ 。其时间行为可通过低频电导率随频率变化而测出。利用 (5.18) 式, 考虑到 J_0 展开的最低阶是声子算子的二次项 $B_{q, \sigma} B_{-q, \sigma}$, 得到

$$\phi_0(t)_w = \frac{1}{V} \sum_{q, \sigma} |(J_0, B_{q, \sigma} B_{-q, \sigma})|^2 e^{-2Dq^2 t} = \frac{8}{3} c_0^2 \left(\frac{1}{4\pi D t} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (7.5)$$

其中 $c_0 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)^{\frac{1}{2}}$ 是声速, D 是扩散系数。相应准粒子运动部分, 如果忽略不同粒子关联, 则

$$\phi_0(t)_c \simeq n \langle v_x^2 \rangle e^{-2\Gamma t}. \quad (7.6)$$

在 $t = 1/2\Gamma$ 时,

$$\phi_0 \left(\frac{1}{2\Gamma} \right)_c : \phi_0 \left(\frac{1}{2\Gamma} \right)_w \sim n \langle v_x^2 \rangle : \frac{8}{3} c_0^2 \left(\frac{\Gamma}{2\pi D} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$(8/3)c_0^2$ 与 $\langle v_x^2 \rangle$ 差不多, 则二者之比取决于单位体积中粒子数与允许存在波自由度之比。一般说来, 波的总数总要比粒子数少很多(一个波长内总应包含大量粒子), 但倒底是多少, 比较难确切估计。采用硬球模型,

$\Gamma^{-1} \sim \tau \sim (l/\bar{v})$, $l \sim (1/n\sigma)$ 是自由程, σ 是截面, 则 $D \sim \gamma \sim (l^2/\tau)$

$$n : \left(\frac{\Gamma}{2\pi D} \right)^{\frac{1}{2}} \sim 10nl^3.$$

以水为例¹⁾, 在常温下实验测得 $\gamma \sim D \sim 10^{-2}$ c. g. s. 单位, $n \sim 3 \times 10^{22} \text{cm}^{-3}$, $\bar{v} \sim 4 \times 10^4 \text{cm/sec}$, 则 $l \sim \frac{1}{4} \times 10^{-6} \text{cm}$, 由此得

$$\phi_0 \left(\frac{1}{2\Gamma} \right)_c : \phi_0 \left(\frac{1}{2\Gamma} \right)_w \sim 10^3 - 10^4.$$

因此, 看来必须衰减到 $\phi_0 \left(\frac{1}{2\Gamma} \right)_c$ 的 10^{-3} 左右, 非指数部分才明显表现出来。当然, 这是很难被观测到的。

其它输运过程情况也类似。从定性上看, 所有这些关联函数都可写成 $K_\alpha n_c$, K_α 是单个波对此过程的贡献, 它和一个准粒子的贡献差不多, n_c 为起作用波的总数, 它与 $t^{-\frac{1}{2}}$ 成比例。

八

最后, 简单讨论几个问题。

1) 前面已指出, 在非平衡态统计理论中, 趋向平衡问题一直未能得到根本的解决。这里的关键是要选择一个合适的表象, 在其中做微扰展开。过去, 人们一直认为, 至少在弱耦合系统中, 应该选用自由粒子表象。有关波对弛豫过程的讨论($t^{-\frac{1}{2}}$ 行为)说明这种做法是不尽合适的。即使是弱耦合系统, 也有波的存在, 因此有一部分相互作用必须并入原自由粒子能量算子中, 即取元激发表象。但是那部分相互作用应并入 H_0 中呢? 或者说, 元激发的严格定义是什么? 用无规相位近似求得的元激发是否合适? 这些问题在理论上还是不能圆满回答的。本文讨论弛豫过程的基本假设是: 无规相位近似决定了体系的低激发能谱, 剩余的相互作用只引起能级的变宽。由于宏观波是可以被观测到的, 这种假设在讨论宏观波对弛豫过程影响时可能是可取的。但其它部分是否像我们想像的那样简单呢?

2) 我们可以直接应用上述理论, 讨论其它体系弛豫过程的渐近行为。突出的例子是跳跃式的扩散或电导。在此系统中, 无相互作用粒子的本征态是局域的, 波函数为 ϕ_α , α 除标志不同束缚态外, 还表示束缚态的“平均位置”($\mathbf{X}_\alpha$)。位置算子 $\mathbf{r} = \mathbf{X} + \delta\mathbf{r}$, 其中 $\mathbf{X}\phi_\alpha = \mathbf{X}_\alpha\phi_\alpha$, $\langle \phi_\alpha | \delta\mathbf{r} | \phi_\alpha \rangle = 0$, $\langle \phi_\alpha | \delta\mathbf{r} \cdot \delta\mathbf{r} | \phi_\alpha \rangle < \infty$ 。取 $H = H_0 + H_1$, $H_0\phi_\alpha = \varepsilon_\alpha\phi_\alpha$,

1) 我们在这里是用硬球模型的一些关系, 将一些比较确切的值(如 n , $\bar{v}$, γ)代入, 作量级上的估计。

则 $[H_0, X] = 0$, 在二次量子化表象中,

$$X = \sum_a X_a c_a^\dagger c_a, \quad H_0 = \sum_a \varepsilon_a c_a^\dagger c_a,$$

$$H_1 = \sum_{\{a_i\}_{i=1,2,3,4}} V(\{a_i\}) c_{a_1}^\dagger c_{a_2}^\dagger c_{a_3} c_{a_4},$$

c_a 是 a 态消灭算子. $\dot{X} = i[H_1, X]$ 是 $c_{a_1}^\dagger c_{a_2}^\dagger c_{a_3} c_{a_4}$ 型 (即四个 c 算子乘积型) 算子的组合. 将 $\dot{X}$ 用波算子展开, 由于 $B_{q,s}, B_{-q,s'}$ 也是由四个 c 算子的乘积组合而成, 因而展开系数有可能大于准粒子算子的展开系数, 从而导致较大的非指数衰减过程 (对照在流体中 J_0 是由 $c_k^\dagger c_k$ 组合成). 这方面的分析还有待于进行.

3) 不同类型波对弛豫贡献到底会有什么过程呢?

(1) 声频支 包括一般流体中的声波, 等离子体中的离声波, 阿尔芬波, 固体中的声波等等. 长波频谱为

$$\omega_{q,\sigma} = \sigma c_0 q + dq^2 + \dots,$$

$$\Lambda_{q,\sigma} = \Lambda_2 q^2 + \dots,$$

因此,

$$\phi_L(t) \sim \begin{cases} t^{-\frac{d}{2}} & d \text{ 偶数;} \\ t^{-\frac{1}{2}} e^{-\delta t} & d \text{ 为奇数.} \end{cases}$$

而

$$\phi_0(t) \sim t^{-\frac{d}{2}} \quad \text{对所有 } d.$$

(2) 纯耗散模 如流体中的热波、剪波,

$$\omega_q - i\Lambda_q \simeq (c - i\gamma)q^2 + \dots,$$

则

$$\phi_L(t) \sim t^{-\frac{d}{2}}, \quad \phi_0(t) \sim t^{-\frac{d}{2}}.$$

(3) 高频模式 包括等离子体中的静电振荡, 固体中的光频支格波等,

$$\omega_q - i\Lambda_q \sim \omega_s + (\alpha - i\gamma)q^2 + \dots,$$

则

$$\phi_L(t) \sim e^{-i\omega_s t} t^{-\frac{d}{2}}, \quad \phi_0(t) \sim t^{-\frac{d}{2}}$$

(4) 一种特殊的波弛豫过程是朗道阻尼

$$\Lambda_{Lq} \sim q^{-s} e^{-\delta q^{-2}} \quad s > 0.$$

由于当 $q \rightarrow 0$, Λ_{Lq} 减小比任何 q^n (n 为正整数) 都快, 所引起的弛豫过程也快于任何 t^{-K} .

当然, 上述讨论中各种过程能否存在或被看到, 还要看展开系数 (耦合系数).

4) 在讨论非指数渐近行为的唯象理论 (所谓 Ландау-Плaczek 方法) 中, 波的宽度 γq^2 的系数 γ 由 Navier-Stokes 方程中的输运系数决定. 人们认为这些系数也应包含波的贡献, 因而 γ 与 q 有关. 对 q 展开后, 得到时间关联函数渐近行为是^[12]:

$$\sum_{j=1}^{\infty} K(j) t^{j^2 - j - 2}.$$

实际上, 除了 $j=1$ 的项 ($t^{-\frac{3}{2}}$ 行为) 外, 其它项是不存在的. 从前面的讨论看出, 计算关联函数中波的宽度只由粒子型元激发贡献, 认为 γ 中还包含波自身的贡献是不对的. 这也说明, 直观的推测不一定是可靠的.

工作中曾得到于泳、李铁城同志很大帮助, 并与郝柏林、陈式刚、蒲富恪等同志多次讨论, 特此致谢.

参 考 文 献

- [1] R. Kubo, *J. Phys. Soc. Japan*, **12**(1957), 1570.
- [2] B. Alder *et al.*, *Phys. Rev.*, **A1**(1970), 18.
- [3] M. Ernst *et al.*, *Phys. Rev.*, **A4**(1971), 2055.
- [4] Y. Pomeau, *et al.*, *Phys. Reports*, **19**(1975), 63.
- [5] M. Ernst *et al.*, *J. Stat. Phys.*, **15**(1976), 7, 23.
- [6] J. Dorfman *et al.*, *Phys. Rev.*, **A6**(1972), 776; **A12**(1975), 292.
- [7] D. Pines, Lectures on the Many-body Problems, Vol. 2, p. 15.
- [8] D. N. Zubarev, Non-Equilibrium Statistical Mechanics.
- [9] S. Ichimaru, Basic Principles of Plasma Physics (1973).
- [10] G. G. Emch, Algebraic Methods in Statistical Mechanics and Quantum Field Theory.
- [11] I. Prigogine *et al.*, *Physica*, **45**(1969—70), 418; M. Bans, *Bull. Acad. Roy. Belgique. Cl. Sci* (1976), 1291.
- [12] Y. Pomeau, *J. Chem. Phys.*, **57**(1972), 1134.

THE LONG TIME ASYMPTOTIC BEHAVIOUR OF THE CORRELATION FUNCTIONS

—THE INFLUENCES OF THE WAVES ON THE
RELAXATION PROCESSES

HO YU-PING

(Institute of Plasma Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT

Based on the general theory of the non-equilibrium statistical mechanics, we have discussed the influences of waves on the relaxation processes in macroscopic systems, especially, about the non-exponential asymptotic behaviour of the correlation functions.

Because, how to select the representation is important for discussing the dissipative processes in non-equilibrium statistical mechanics, it is desirable to start from the elementary excitation representation. Using the Basic idea of C^* algebra theory, we have developed a method for operator expansion, and employed it to express the flow operators in second quantized elementary excitation representation. Taking the residual interaction between the elementary excitations as perturbation in the calculation of the resolvent of the Liouville operator, and using the method of projection operator, a general expression of the non-exponential decaying part of the correlation functions have been obtained.

By analysing the procedure of treating the elementary excitation spectrum, we divided the residual interaction into two parts. For pure dissipative mode, taking into account the linear interaction, the main terms of the non-exponential decaying part ($t^{-\frac{d}{2}}$ term) were obtained. Detailed analysis shows that, the non-linear interaction (mode-mode coupling) is very small, and leads to a relatively faster decaying process (t^{-d} or so), hence it can be neglected.

This article emphasizes that, for the wave processes, the local fluctuation correlation, the particle self-correlation and the transport processes are different in nature. Their relative magnitudes (relative to the corresponding quasi-particle parts) may also be quite different.

With these general results, we have analysed briefly the relaxation processes in liquid, and made some discussion about the so called mode-mode coupling theory.